

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**  
**INSTITUT D'AERONAUTIQUE ET DES ETUDES SPATIALES**

**Mémoire DE MASTER**

**Spécialité : Aéronautique**

**Option : Avionique**

**Thème :**

**Stabilité Et Contrôle D'un Avion Pour Les Conditions  
D'équilibre**

Présenté par :

**Khediri Dounia Zed**

Dirigé par :

**Mr. Chegrani Ahmed**

**Année Universitaire : 2023/2024**

## Résumé

Ce mémoire propose l'étude théorique et numérique de la stabilité longitudinale et latéral-directionnel d'un avion autour du point d'équilibre.

Nous avons établi le modèle mathématique du vol pour un avion en utilisant les lois de la conservation de la mécanique. Les équations du mouvement sont écrites dans le référentiel terrestre considéré comme fixe puis transformées dans le repère lié à l'avion et explicite dans le repère de stabilité.

La première étape consiste à calculer le point d'équilibre (trim) d'un avion dans le cas longitudinal et latéral-directionnel.

La deuxième étape est d'énumérer tous les critères de stabilité statique et de discuter les paramètres importants de la stabilité statique d'un avion en état de vol stabilisé.

Dans cette partie on a traité les équations de mouvement du mode longitudinal et latéral-directionnel et les conditions d'équilibre et leurs contributions dans la stabilité statique.

Dans la dernière étape, on s'intéresse à la stabilité dynamique des avions en utilisant deux méthodes : la méthode des fonctions de transfert et la méthode de l'espace d'état. Il a été montré que l'avion présente des modes caractéristiques tel que le phugoïde et courte période (oscillation en incidence) dans le cas longitudinal et les modes spiral, roulis et roulis hollandais en latéral-directionnel.

En fin, une application numérique est faite sur l'avion SIAI Marchetti S211 où les résultats sont obtenus par le programme réalisé sous le logiciel MATLAB.

**Mots clé :** stabilité longitudinale, stabilité latéral-directionnel, stabilité statique, stabilité dynamique, phugoïde, courte période, le mode spiral, roulis, roulis hollandais, l'équilibre.

## Abstract

This thesis presents a theoretical and numerical study of the longitudinal and lateral-directional stability of an aircraft. This work aims to determine the characteristics of an aircraft's stability and its response to the main control inputs. We have established the fundamental equations of motion for an aircraft using the principles of mechanical conservation laws. These equations are written in the Earth-fixed reference frame and then transformed into the aircraft-fixed frame, and finally expressed in the stability reference frame.

We also outlined the stability criteria to discuss the important characteristics of static stability and control of an aircraft in a stabilized flight state. In this section, we addressed the equations of motion for both longitudinal and lateral-directional modes, the trim conditions and their contributions to static stability.

Additionally, we examined the dynamic stability of aircraft through the equations of motion using two methods: the transfer function method and the state-space method. It was shown that the aircraft exhibits characteristic modes such as the phugoid and short-period (incidence oscillation) in the longitudinal case, and spiral, roll, and Dutch roll modes in the lateral-directional case.

Finally, our application is based on the SIAI Marchetti S211 aircraft, with results obtained using our MATLAB programs.

Keywords: longitudinal stability, lateral-directional stability, static stability, dynamic stability, phugoid, short period, spiral mode, roll, Dutch roll, trim.

## ملخص

تقدم هذه الرسالة دراسة نظرية وعددية لاستقرار الطيران الطولي والجانبى-الاتجاهى للطائرة. يهدف هذا العمل إلى تحديد خصائص هذا الاستقرار واستجابة الطائرة للأوامر الرئيسية. لقد قمنا بدراسة المعادلات الأساسية لحركة الطائرة باستخدام قوانين الحفاظ على الميكانيكا.

كما قمنا بتعداد معايير الاستقرار لمناقشة الخصائص الهامة للاستقرار الثابت والتحكم في الطائرة في حالة الطيران المستقر. في هذا الجزء، عالجتنا معادلات الحركة لكل من الأوضاع الطولية والجانبية-الاتجاهية، بما في ذلك شروط التوازن ومساهماتها في الاستقرار الثابت.

بالإضافة إلى ذلك، قمنا بدراسة الاستقرار الديناميكي للطائرات من خلال معادلات الحركة باستخدام طريقتين.

وأخيرًا، تم تطبيق دراستنا على الطائرة SIAI Marchetti S211 حيث تم الحصول على النتائج باستخدام برنامج

. MATLAB

الكلمات المفتاحية: استقرار الطائرة، الاستقرار الثابت، الاستقرار الديناميكي.

## *Dédicace*

*À mon modèle dans cette vie, ma mère Nacira, dont le soutien indéfectible, l'encouragement chaleureux et l'amour inconditionnel ont été mes piliers tout au long de ce parcours académique.*

*À ma chère sœur Chahrazed, qui a partagé avec moi chaque étape de cette aventure, me rappelant toujours que je ne suis jamais seule dans mes défis.*

*À mes chères amies et ma deuxième famille, Ikram, Douaa, Khedidja, Israa, Manar et Malak, qui ont été une source de motivation et de joie à chaque instant et pour leur soutien constant et leurs encouragements.*

*Ce projet porte votre empreinte à tous, car chacun de vous a contribué à sa manière à mon chemin vers la réussite.*

## *Remerciement*

Premièrement, je remercie mon Dieu, le tout puissant qui m'a donné de la bonne santé et de la patience tout au long de mes études ainsi que dans ma vie quotidienne et professionnelle. Un grand remerciement à ma mère et ma sœur.

Je dois ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, Mr. Chegrani Ahmed, pour sa patience, sa compréhension et ses encouragements incessants pendant mes études de graduation et de post-graduation. Sa confiance immuable à mon égard m'a permis de trouver l'enthousiasme et la motivation nécessaire pour finir ce travail.

Je tiens également à remercier les membres du jury pour leur temps, leur expertise et leur évaluation attentive de mon travail. Leurs commentaires constructifs ont enrichi mon projet et ont contribué à son amélioration.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude à tous ceux qui ont apporté leur soutien, leur encouragement et leurs conseils tout au long de ce projet, ainsi qu'à ma famille et à mes amis pour leur amour et leur soutien indéfectibles.

# SOMMAIRE

LISTE DES TABLEAUX .....	8
LISTE DES FIGURES .....	9
Notations et Acronymes : .....	10
INTRODUCTION GENERALE.....	19
CHAPITRE 1 : Equations du Vol d'Un Avion .....	22
1.1 Introduction : .....	22
1.2 Dérivation des équations du mouvement d'un avion : .....	22
1.2.1 Les équations du mouvement de l'avion rigide : .....	22
1.3 Modélisation des forces et des moments : .....	28
1.3.1 Modélisation des forces et des moments dans le cas longitudinal : .....	28
1.3.2 Modélisation des forces et des moments dans le cas latéral-directionnel : .....	30
Conclusion : .....	31
CHAPITRE 2 : Stabilité Statique Pour Les Conditions De Trim .....	33
2.1 Définition de la stabilité statique : .....	33
2.2 Définition de critère de stabilité : .....	33
2.3 Les critères de stabilités.....	34
2.3.1 Les Critères de stabilité statiques pour les perturbations de vitesse linéaires ....	36
2.3.2 Critères de stabilité statique pour les perturbations d'angle d'incidence « $\alpha$ » : 38	
2.3.3 Critères de stabilité statique pour les perturbations d'angle de dérapage : .....	38
2.3.4 Critères de stabilité statique pour les perturbations de la vitesse angulaire : .....	39
2.3.5 L'effet de la vitesse de translation sur le Moment de tangage : .....	40
2.3.6 L'effet de dérapage sur le moment de roulis : .....	41
2.4 Stabilité statique et commande d'un état de vol stabilisé (vol rectiligne) : .....	41
2.4.1 Stabilité longitudinale et les caractéristiques de commandes : .....	41
2.4.2 Le diagramme de Trim d'un avion : .....	49
2.4.3 Stabilité latérale-directionnelle et les caractéristiques de commandes : .....	53
2.4.4 Comparaison de Trim pour la configuration conventionnelle, canard et trois surfaces : .....	56
Conclusion : .....	59
CHAPITRE 3 : Stabilité Dynamique Pour Les Conditions De Trim.....	62
3.1 Introduction : .....	62
3.2 Définition de la stabilité dynamique : .....	62
3.3 La réponse d'un avion : .....	62
3.3.1 Fonctions de transfert de réponse de l'avion : .....	62

3.4	Les fonctions de transfert de la stabilité dynamique .....	63
3.4.1	Les équations longitudinales et les fonctions de transferts : .....	63
3.4.2	Les modes de la stabilité longitudinale : .....	69
3.4.3	Les fonctions de transfert standards du mode longitudinal : .....	73
3.4.4	Les équations latérale-directionnelle et les fonctions de transfert : .....	76
3.4.5	Les modes dynamiques latéraux-directionnels : .....	80
3.5	La méthode d'espace d'état : .....	84
3.5.1	La matrice de la fonction de transfert.....	84
3.5.2	Réponse en termes de description d'état : .....	86
	Conclusion : .....	88
3.5.3	CHAPITRE 4 : Résultats Et Interprétations.....	90
4.1	Introduction : .....	90
4.2	Marchetti S211 : .....	90
4.3	Stabilité statique : .....	91
4.3.1	Le cas longitudinal : .....	92
4.3.2	Le cas latéral-directionnel : .....	96
4.3.3	Le diagramme de trim : .....	98
4.4	La stabilité dynamique : .....	100
4.4.1	Le cas longitudinal : .....	101
4.4.2	Le cas latéral-directionnel : .....	103
	CONCLUSION GENERALE .....	106
	REFERENCES.....	108

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1:définition des vecteurs des composantes .....	23
Tableau 2:Variables stabilisées et perturbées .....	26
Tableau 3: les critères de stabilité statique .....	35
Tableau 4:Dérivées de stabilité dimensionnelles longitudinales .....	64
Tableau 5:Dérivées dimensionnelles de la stabilité latérale-directionnelle.....	76
Tableau 6:les critères de stabilité de l'avion de Marchetti S211 .....	91
Tableau 7: les coefficients de stabilité en état de vol stabilisé .....	100
Tableau 8:coefficient de stabilité longitudinal .....	100
Tableau 9:coefficients de stabilité latéral-directionnelle.....	100
Tableau 10: la comparaison des valeurs propres trouver par Matlab et donné dans le livre de Napolitano .....	101
Tableau 11:: caractéristique dynamique longitudinal en méthode approximative et exact....	102
Tableau 12: paramètres du mouvement longitudinal de l'avion Marchetti S211 .....	102
Tableau 13:les valeurs propres trouvé par Matlab et donné par Napolitano .....	103
Tableau 14:Caractéristiques dynamiques du mouvement latéral-directionnel approximés et exacts .....	104
Tableau 15:: Paramètres dynamiques du mode roulis hollandais.....	104

## LISTE DES FIGURES

Figure 1:Equilibre stable, instable et indifférent pour un système mécanique .....	33
Figure 2: Equilibre stable, instable et indifférent du moment de tangage d'un avion.....	34
Figure 3: La détermination graphique des solutions d'équilibre.....	45
Figure 4: Détermination de point neutre à partir d'un test de vol.....	47
Figure 5: L'effet de la vitesse, le poids et la position de centre de gravité sur l'angle de la gouverne pour Fokker 27. ....	47
Figure 6: Diagramme de Trim.....	51
Figure 7: Utilisation d'un diagramme de trim pour trouver les coefficients de portance trimés pour différentes positions du centre de gravité .....	51
Figure 8: Diagramme de Trim sans l'effet de poussée .....	52
Figure 9: Diagramme de Trim avec l'effet de poussée .....	53
Figure 10: Configuration aile-empennage pour un avion conventionnel.....	56
Figure 11: Configuration avion aile-canard .....	57
Figure 12:Configuration canard-aile-empennage pour un avion a trois surfaces .....	59
Figure 13: La fonction de transfert.....	63
Figure 14: exemple de changement de racine .....	68
Figure 15: exemple de changement de partie réelle d'une racine.....	68
Figure 16:Relation entre l'entrée, fonction de transfert et la sortie d'un système .....	79
Figure 17: Evolution du mode de roulis en fonction de temps .....	82
Figure 18:Les gradients $\partial\alpha_1/\partial CL$ , $\partial ih_1/\partial CL$ en fonction de $xCG$ de l'avion SIAI Marchetti .....	94
Figure 19:Le gradient $\partial ih_1/\partial Vp_1$ en fonction de $xCG$ de l'avion SIAI Marchetti .....	94
Figure 20: Le gradient $\partial\delta e_1/\partial CL$ en fonction de $xCG$ de l'avion SIAI Marchetti.....	95
Figure 21: : Le gradient $\partial\delta e_1/\partial Vp_1$ en fonction de $xCG$ de l'avion SIAI Marchetti .....	96
Figure 22:Courbes $C_m$ et $C_L$ en fonction de $\alpha$ dans le cas de Trim .....	98
Figure 23:Diagramme d'équilibre de l'avion Marchetti S211 .....	99

## Notations et Acronymes :

$A$	L'allongement
$A_1$	Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert longitudinale
$A_2$	Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert latéral-directionnel
$A_\alpha$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle d'incidence
$A_\beta$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de dérapage
$A_u$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de la vitesse
$A_\theta$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'assiette longitudinale
$A_\phi$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de roulis
$A_\psi$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de lacet

---

$b$	L'envergure
$B_1$	Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert longitudinale
$B_2$	Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert latéral-directionnel
$B_\alpha$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle d'incidence
$B_u$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de la vitesse
$B_\theta$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'assiette longitudinale
$B_\phi$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de roulis
$B_\psi$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de lacet

---

$c$	La corde
$\bar{c}$	La corde géométrique moyenne
$C_d$	Coefficient de trainée (profil)
$C_1$	Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert longitudinale
$C_2$	Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert latéral-directionnel
$C_\alpha$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle d'incidence
$C_\beta$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de dérapage
$C_u$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de la vites

## Notations et acronymes

---

$C_\theta$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'assiette longitudinale
$C_\phi$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de roulis
$C_\psi$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de lacet
$C_D$	Coefficient de trainée (avion)
$C_{D_0}$	Coefficient de trainée (avion) d'incidence nulle
$C_{D_\alpha}$	La variation de la trainée de l'avion avec l'angle d'incidence
$C_{D_{\dot{\alpha}}}$	La variation de la trainée de l'avion avec le taux de l'angle d'incidence
$C_{D_{i_h}}$	La variation de la trainée de l'avion avec l'angle de calage du stabilisateur
$C_{D_{\delta_e}}$	La variation de la trainée de l'avion avec l'angle du gouvernail de profondeur
$C_{D_{\delta_t}}$	La variation de trainée avec la déflexion de la tab
$C_{D_q}$	La variation de la trainée de l'avion avec le taux de tangage
$C_{D_u}$	La variation de la trainée de l'avion avec la vitesse
$\bar{c}_e$	La corde moyenne aérodynamique de l'empennage horizontal
$C_f$	Coefficient de frottement superficiel
$C_{h_\alpha}$	Coefficient de moment du centre de gravité dû à l'angle d'attaque
$C_{h_0}$	Coefficient de moment du centre de gravité à angle d'attaque nul
$C_{h_{\delta_e}}$	Coefficient de moment du centre de gravité dû à la déflexion de la gouverne de profondeur
$C_{h_{\delta_t}}$	Coefficient de moment du centre de gravité dû à la déflexion de la tab
$C_l$	Coefficient de portance (profil)
$C_{l_\alpha}$	La Pente de coefficient de portance
$C_{l_\beta}$	Coefficient de moment de roulis par rapport à l'angle de dérapage
$C_{l_\delta}$	L'efficacité de portance d'une gouverne (profil)
$c_{l_p}$	Coefficient de moment de roulis par rapport à la vitesse angulaire de roulis
$c_{l_r}$	Coefficient de moment de roulis par rapport à la vitesse de lacet
$C_{l_{\delta_a}}$	Variation du coefficient de moment de roulis de l'avion avec l'angle de déflexion de l'aileron
$C_{l_{\delta_r}}$	Variation du coefficient de moment de roulis de l'avion avec l'angle de déflexion de la gouverne de direction

## Notations et acronymes

---

$C_{l_{\delta_e}}$	Pente de coefficients de portance du profil de la gouverne de profondeur
$C_L$	Coefficient de portance (avion)
$C_{L_0}$	Coefficient de portance (avion) d'incidence nulle
$C_{L_\alpha}$	La variation de la traînée de l'avion avec l'angle d'incidence
$C_{L_{\dot{\alpha}}}$	La variation de la traînée de l'avion avec le taux de l'angle d'incidence
$C_{L_{i_h}}$	La variation de la traînée de l'avion avec l'angle de calage du stabilisateur
$C_{L_{\delta_e}}$	La variation de la traînée de l'avion avec l'angle du gouvernail de profondeur
$C_{L_{\delta_t}}$	La variation de portance avec la déflexion de la tab
$C_{L_q}$	Coefficient de portance dû au taux de tangage
$C_{L_u}$	La variation de la traînée de l'avion avec la vitesse
$C_m$	Coefficient du moment de tangage
$C_{m_0}$	Coefficient du moment de tangage d'incidence nulle
$\bar{C}_{m_0}$	Coefficient du moment de tangage de portance nulle
$C_{m_\alpha}$	La variation du moment de tangage avec l'angle d'incidence
$C_{m_{\dot{\alpha}}}$	La variation du moment de tangage avec le taux de l'angle d'incidence
$C_{m_{i_h}}$	La variation du moment de tangage avec l'angle de calage du stabilisateur
$C_{m_{\delta_e}}$	La variation du moment de tangage avec l'angle du gouvernail de profondeur
$C_{m_{\delta_t}}$	Moment de tangage dû à la déflexion de la tab
$C_{m_T}$	Coefficient du moment de tangage dû à la poussée
$C_{m_q}$	Moment de tangage dû au taux de tangage
$C_{m_u}$	La variation du moment de tangage avec la vitesse
$C_{m_{T_\alpha}}$	La variation du coefficient du moment de tangage dû à la poussée avec l'angle d'incidence
$C_{m_{T_u}}$	La variation du coefficient du moment de tangage dû à la poussée avec la vitesse
$C_T$	Coefficient de poussée
$C_{T_{x_u}}$	La variation du coefficient de poussée suivant l'axe X avec la vitesse
$C_{T_{x_\alpha}}$	La variation du coefficient de poussée suivant l'axe X avec l'angle d'incidence
$C_{T_{x,y,z}}$	Composantes du coefficient de poussée suivant X, Y et Z

## Notations et acronymes

---

$C_{T_{zu}}$	La variation du coefficient de poussée suivant l'axe Z avec la vitesse
$C_{T_{z\alpha}}$	La variation du coefficient de poussée suivant l'axe Z avec l'angle
$C_x$	Coefficient de la force suivant l'axe de stabilité X
$C_{x\alpha}$	La variation du coefficient de la force suivant l'axe de stabilité X avec l'angle d'incidence
$C_{xq}$	La variation du coefficient de la force suivant l'axe de stabilité X avec l'angle d'incidence
$C_{xu}$	La variation du coefficient de la force suivant l'axe de stabilité X avec la vitesse
$C_y$	Coefficient de la force suivant l'axe de stabilité Y
$C_{y_0}$	Coefficient de la force latéral pour un angle de dérapage nul
$C_{y\beta}$	Variation du coefficient de la force latéral de l'avion avec un angle de dérapage
$C_{y\delta_a}$	Variation du coefficient de la force latéral de l'avion avec l'angle de déflexion de l'aileron
$C_{y\delta_r}$	Variation du coefficient de la force latéral de l'avion avec l'angle de déflexion de la gouverne de direction
$C_{yp}$	Variation du coefficient de la force latéral de l'avion avec vitesse de roulis
$C_{yr}$	Variation du coefficient de la force latéral de l'avion avec vitesse de lacet
$C_z$	Coefficient de la force suivant l'axe de stabilité Z
$C_{z\alpha}$	La variation du coefficient de la force suivant l'axe de stabilité Z avec l'angle d'incidence
$C_{zq}$	La variation du coefficient de la force suivant l'axe de stabilité Z avec l'angle d'incidence
$C_{zu}$	La variation du coefficient de la force suivant l'axe de stabilité Z avec la vitesse

---

$D_1$	Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert longitudinale
$D_2$	Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert latéral-directionnel
$D_\alpha$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle d'incidence
$D_\beta$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de dérapage
$D_u$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de la vitesse
$\bar{D}_1$	Dénominateur des fonctions de transfert longitudinales
$D_\psi$	Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de lacet

## Notations et acronymes

---

$d_T$  Distance entre la projection de la ligne de poussée sur le plan symétrique de l'avion et le centre de gravité

$d v$  Volume élémentaire

---

$e$  Le facteur d'efficacité d'Oswald

$E_1$  Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert longitudinale

$E_2$  Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert latéral-directionnel

---

$(t)$  Fonction du temps

$\vec{F}$  Force par unité de surface

$\vec{F}_A$  Force aérodynamique totale

$F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}$  Composantes de la force aérodynamique suivant XYZ

$f_{Ax}, f_{Ay}, f_{Az}$  Valeurs perturbée de  $F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}$

$\vec{F}_T$  Force de poussée totale

$F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Tz}$  Composantes de la force de poussée suivant XYZ

$f_{Tx}, f_{Ty}, f_{Tz}$  Valeurs perturbée de  $F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Tz}$

$F_s$  Force sur le manche (stick force)

---

$\vec{g}$  Accélération gravitationnelle

$G_e$  Ratio de démultiplication de la gouverne de profondeur

$g_x, g_y, g_z$  Composantes de l'accélération gravitationnelle

$G(s)$  Fonction de transfert de boucle ouverte

---

$\vec{h}$  Vecteur du moment angulaire du rotor

$h_x, h_y, h_z$  Composantes de  $\vec{h}$  suivant XYZ

---

$i_c$  Angle de calage du canard

$i_h$  Angle de calage de l'empennage horizontal

$i_v$  Angle de calage de l'empennage vertical

## Notations et acronymes

---

$i, j, k$  Vecteurs unitaires suivant XYZ

$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  Moments d'inertie suivant XYZ

$I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$  Produits d'inertie suivant XYZ

$I_A, m_A, n_A$  Composantes du moment aérodynamique perturbé suivant XYZ

$I_T, m_T, n_T$  Composantes du moment de poussée perturbé suivant XYZ

$I_c$  Distance du centre aérodynamique du canard au centre de gravité

$I_h$  Distance du centre aérodynamique de l'empennage horizontal au centre de gravité

$I_R$  Moment d'inertie du rotor selon son axe de rotation

---

$K_{1...7}$  Constantes proportionnelles (différentes pour chaque effet)

$K_{\alpha\delta_e}$  Gain en incidence a fréquence nulle de fonction de transfert

---

L la portance

$L_A, M_A, N_A$  Composantes du moment aérodynamique suivant XYZ

$L_T, M_T, N_T$  Composantes du moment de poussée suivant XYZ

$L_\beta$  Variation du moment de roulis par rapport à l'angle de dérapage

$L_p$  Variation du moment de roulis par rapport au taux de roulis

$L_r$  Variation du moment de roulis par rapport au taux de lacet

$L_{\delta_a}$  Variation du moment de roulis par rapport à la déflexion de l'angle d'aileron

$L_{\delta_r}$  Variation du moment de roulis par rapport à la déflexion de la gouverne de direction

---

m masse de l'avion

M nombre de mach

$M_\alpha$  Variation du moment de tangage par rapport à l'angle d'attaque

$M_{T_\alpha}$  Variation du moment de tangage de poussée par rapport à l'angle d'attaque

$M_{\dot{\alpha}}$  Variation du moment de tangage par rapport au taux de l'angle d'attaque

$M_q$  Variation du moment de tangage par rapport au taux de tangage

$M_{\delta_e}$  Variation du moment de tangage par rapport à l'angle de déflexion de la gouverne de profondeur

$M_A$  Moment aérodynamique

## Notations et acronymes

---

$M_T$  Moment de poussée

---

n Facteur de charge

$N_\alpha$  Numérateur de la fonction de transfert de l'angle d'attaque

$N_\beta$  Numérateur de la fonction de transfert de l'angle de dérapage

$N_u$  Numérateur de la fonction de transfert de la vitesse

$N_\theta$  Numérateur de la fonction de transfert de l'angle de tangage

$N_\phi$  Numérateur de la fonction de transfert de l'angle de roulis

$N_\psi$  Numérateur de la fonction de transfert de l'angle de lacet

$N_\beta$  Variation du moment de lacet par rapport à l'angle de dérapage

$N_{T\beta}$  Variation du moment de lacet de poussée par rapport à l'angle de dérapage

$N_p$  Variation du moment de lacet par rapport au taux de roulis

$N_r$  Variation du moment de lacet par rapport au taux de lacet

$N_{\delta_a}$  Variation du moment de lacet par rapport à la déflexion de l'angle d'aileron

$N_{\delta_r}$  Variation du moment de lacet par rapport à la déflexion de la gouverne de direction

---

P, q, r composantes perturbées de la vitesse de rotation  $\omega$

P, Q, R composantes de la vitesse de rotation  $\omega$  par rapport à XYZ

---

$\bar{q}$  Pression dynamique

---

s Variable de Laplace

S Surface

SM Marge de stabilité statique

---

t Temps

T Période

$t_{1/2}$  Temps pour réduire de moitié l'amplitude

$T_s, T_r$  Constantes du temps des modes spiral et roulis

---

## Notations et acronymes

---

$u, v, w$  Composantes perturbées de la vitesse  $V_p$

$U, V, W$  Composantes de la vitesse  $V_p$  par rapport à XYZ

---

$V_v$  Coefficient du volume de l'empennage vertical

$V_h$  Coefficient du volume de l'empennage horizontal

---

$W$  poids de l'avion

---

$x, y, z$  Composantes du vecteur position  $r$  par rapport à XYZ

$x_{ac}$  Position du centre aérodynamique par rapport à la corde

$\overline{x_{ac}}$  Position du centre aérodynamique en fonction de la corde

$\overline{x_{cp}}$  Position du centre de pression en fonction de la corde

$\overline{x_{cg}}$  Position du centre de gravité en fonction de la corde

$X_\alpha$  Variation de la force longitudinale par rapport à l'angle d'attaque

$X_u$  Variation de la force longitudinale par rapport à la vitesse le long de X

$X_{T_u}$  Variation de la force de poussée longitudinale par rapport à la vitesse le long de X

$X_{\delta_e}$  Variation de la force longitudinale par rapport à la gouverne de profondeur

---

$Y_\beta$  Variation de la force latérale par rapport à l'angle de dérapage

$Y_p$  Variation de la force latérale par rapport au taux de roulis

$Y_r$  Variation de la force latérale par rapport au taux de lacet

$Y_{\delta_a}$  Variation de la force latérale par rapport à la déflexion de l'angle d'aileron

$Y_{\delta_r}$  Variation de la force latérale par rapport à la déflexion de la gouverne de direction

---

$Z_\alpha$  Variation de la force verticale par rapport à l'angle d'attaque

$Z_u$  Variation de la force verticale par rapport à la vitesse le long de X

$Z_q$  Variation de la force verticale par rapport au taux de tangage

$Z_{\dot{\alpha}}$  Variation de la force verticale par rapport au taux de l'angle d'attaque

## Notations et acronymes

---

$Z_{\delta_e}$  Variation de la force verticale par rapport à l'angle de déflexion de la gouverne de profondeur

---

$\alpha$  Angle d'attaque

$\dot{\alpha}$  Variation de l'angle d'attaque par rapport au temps

$\alpha_0$  Angle d'attaque du profil correspond à la portance nulle

$\alpha_{0L}$  Angle d'attaque de l'avion correspond à la portance nulle

$\alpha_\delta$  Dérivée de l'angle d'attaque par rapport à la déflexion de la gouverne

$\alpha_{trim}$  Angle d'attaque équilibré

$\beta$  Angle de dérapage

$\gamma$  Angle de pente

$\delta$  Angle de déflexion de la gouverne

$\delta_e$  Angle de déflexion de la gouverne de profondeur

$\delta_t$  Angle de déflexion de la tab

$\delta_r$  Angle de déflexion de la gouverne de direction

$\delta_{e_{trim}}$  Angle de déflexion de la gouverne de profondeur équilibré

$\varepsilon$  Angle de déviation de l'écoulement dans le plan vertical

$\eta_h, \eta_v, \eta_c$  Rapport de pression dynamique empennage horizontal, vertical et cana

$\Theta$  Angle de tangage

$\theta$  Angle perturbé de tangage

$\lambda$  Effilement

$\Lambda$  Angle de flèche

$\zeta$  Facteur d'amortissement

$\rho$  Masse volumique

$\phi$  Angle d'inclinaison

$\psi$  Angle de cap

$\omega$  Vitesse de rotation de l'avion

$\omega_n$  Pulsation propre

## INTRODUCTION GENERALE

Au 19<sup>e</sup> siècle, les premiers concepteurs d'avions, tels que Sir George Cayley (1773-1857), ont commencé à identifier les forces agissant sur un avion : la portance, le poids, la traînée et la poussée. Cayley a été l'un des premiers à théoriser sur la nécessité d'une surface de contrôle pour la stabilité. Il a compris que pour qu'un avion soit stable, il devait avoir un centre de gravité bien positionné par rapport à ses surfaces portantes.

Les concepteurs ont cherché à rendre les avions plus "statiquement stables", c'est-à-dire qu'ils reviennent naturellement à une position équilibrée après une perturbation. Ils ont montré que des empennages horizontaux et verticaux plus grandes pouvaient améliorer la stabilité en vol, permettant à l'avion de se recentrer après des turbulences.

Durant cette période, les chercheurs se sont penchés sur la stabilité dynamique, c'est-à-dire la capacité d'un avion à amortir les oscillations après une perturbation. Les oscillations longitudinales, telles que les modes courte période et Phugoïde et les oscillations latérales comme le roulis hollandais, ont été étudiées en détail. Ces concepts ont permis de développer des avions plus faciles à piloter sur de longues distances et dans des conditions météorologiques variables.

À l'époque des premiers avions, le pilotage nécessitait des ajustements constants pour maintenir l'équilibre en vol. Alors les ingénieurs ont commencé à développer des mécanismes d'équilibre pour aider les pilotes à maintenir une trajectoire stable sans avoir à exercer constamment une pression sur les commandes de vol. L'équilibre permettait non seulement de stabiliser l'avion dans une position d'équilibre statique, mais il jouait également un rôle dans le contrôle des oscillations qui pouvaient apparaître après une perturbation. Il pouvait être utilisé pour corriger automatiquement l'attitude de l'avion après des légères perturbations, réduisant ainsi la nécessité de corrections manuelles de la part du pilote. Cela a permis de développer des avions qui étaient non seulement statiquement stables, mais aussi dynamiquement plus prévisibles.

Ce projet de fin d'étude se concentre sur l'analyse approfondie sur l'équilibre (trim), de la stabilité statique et dynamique dans les cas longitudinale et latéral-directionnelle.

Ce travail est divisé en quatre chapitres ;

Le premier chapitre consiste à déterminer les équations du mouvement d'un avion dans les conditions de vol stabilisé et perturbé et la modélisation des forces et des moments dans le cas longitudinal et le cas latéral-directionnel

Ensuite, le deuxième chapitre est une étude de la stabilité statique pour les conditions d'équilibre pour les mouvements longitudinal et latéral-directionnel.

Le troisième chapitre aborde l'analyse de la stabilité dynamique pour les conditions d'équilibre, cette analyse est faite par la méthode de la fonction de transfert et la méthode d'espace d'état dans les deux cas longitudinal et latéral-directionnel.

Finalemant, le chapitre quatre est consacré à la présentation et l'interprétation des résultats obtenus par les calculs en exécutant les programmes réalisés sous le logiciel Matlab qui consiste à déterminer les points d'équilibre et les caractéristiques des mouvements statique et dynamique de l'avion SIAI Marchetti S211.

# **CHAPITRE 1**

## **EQUATIONS DU VOL D'UN AVION**

## CHAPITRE 1 : Equations du Vol d'Un Avion

### 1.1 Introduction :

Ce chapitre se concentre sur l'analyse des équations du mouvement d'un avion, qui sont essentielles pour comprendre la dynamique du vol et la stabilité de l'avion. Nous commençons par dériver les équations fondamentales en tenant compte des forces extérieures, telles que les forces aérodynamiques, gravitationnelles et de propulsion. Ces équations, exprimées dans un référentiel inertiel, sont ensuite transformées dans un repère lié à l'avion. Puis on a entamé la modélisation des forces et moments dans les axes longitudinaux et latéraux-directionnels.

### 1.2 Dérivation des équations du mouvement d'un avion :

Dans cette étape, on s'intéresse à l'établissement du modèle mathématique décrivant le mouvement et la dynamique de l'avion dans l'espace. C'est un modèle basé sur l'application des lois de Newton en translation et en rotation.

#### 1.2.1 Les équations du mouvement de l'avion rigide :

L'obtention des équations du mouvement générale de l'avion commence par l'identification du repère inertiel et le repère lié à l'avion. Il est essentiel de rappeler que la seconde loi de Newton est exprimée par rapport au repère inertiel, qui n'est pas en accélération ou en rotation. L'approche utilisée est basée sur l'application des lois de Newton appliquées pour les particules de masses définissant le corps rigide.

#### **Théorème de la conservation de la quantité de mouvement en translation :**

L'avion est considéré comme un corps solide qui est soumis aux forces extérieures suivantes : le poids dû à l'attraction terrestre, la force aérodynamique et celle du système de propulsion.

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum f_{ex} \quad (1.1)$$

Qui peut être écrite sous la forme :

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_T \quad (1.2)$$

L'équation (1.2) représente la première relation vectorielle intermédiaire pour la conservation de la quantité de mouvement. Le vecteur vitesse transformée du repère inertiel considéré comme fixe au repère avion en rotation est :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\delta\vec{v}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{1.3}$$

Ensuite, chacun des vecteurs doit être exprimé par rapport au repère avion G X.Y Z en utilisant les composantes de la vitesse et de sa dérivée. Par conséquent, les équations de conservation de la quantité de mouvement (ECQM) :

$$m(\dot{U} - VR + WQ) = mg_x + F_{Ax} + F_{Tx} \tag{1.4}$$

$$m(\dot{V} - UR + WP) = mg_y + F_{Ay} + F_{Ty} \tag{1.5}$$

$$m(\dot{W} - UQ + VP) = mg_z + F_{Az} + F_{Tz} \tag{1.6}$$

**Tableau 1:définition des vecteurs des composantes**

Variables	Désignations
$\vec{F}_A = F_{Ax}\vec{i} + F_{Ay}\vec{j} + F_{Az} \vec{k}$	Forces aérodynamiques
$\vec{F}_T = F_{Tx}\vec{i} + F_{Ty}\vec{j} + F_{Tz}\vec{k}$	Forces de poussée
$\vec{M}_A = L_A\vec{i} + M_A\vec{j} + N_A\vec{k}$	Moments aérodynamiques
$\vec{M}_T = L_T\vec{i} + M_T\vec{j} + N_T\vec{k}$	Moments de poussée
$\vec{\omega} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$	Composantes de la vitesse angulaire
$\vec{V}_p = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k}$	Composantes de la vitesse linéaire
$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	Vecteur position
$\psi, \phi \text{ et } \theta$	Angles d'Euler

Les équations de conservation de la quantité de mouvement (ECQM) précédentes forment un système d'équations différentielles non linéaires dont les inconnues U, V, W qui sont les composantes du vecteur vitesse linéaire par rapport au repère avion. Les termes connus de ces équations (les entrées du système) sont les forces présentes dans le membre de droite de l'équation (1.2). La solution de ce système d'équations nécessite également la connaissance des composantes du vecteur de vitesse angulaire P, Q, R par rapport au repère avion.

**Théorème de la conservation de la quantité de mouvement en rotation :**

Le mouvement de rotation de l'avion autour du centre de gravité est exprimé par la variation du moment cinétique qui est égale à la somme de tous les moments appliqués par rapport au centre de gravité :

$$\frac{d(I\dot{\theta})}{dt} = \sum M_{f_{ex}} \quad (1.7)$$

Comme la plupart des avions sont symétriques par rapport au plan XZ, dans ce cas :

$$I_{xy} = I_{yz} = 0 \quad (1.8)$$

En utilisant la propriété de symétrie des avions, il est possible maintenant de faire la projection de l'équation vectorielle (1.1) pour obtenir le système d'équations différentielles suivantes :

$$I_{xx}\dot{P} - I_{xz}\dot{R} - I_{xz}PQ + (I_{zz} - I_{yy})RQ = L_A + L_T \quad (1.9)$$

$$I_{yy}\dot{Q} + (I_{xx} - I_{zz})PR + I_{xz}(P^2 - R^2) = M_A + M_T \quad (1.10)$$

$$I_{zz}\dot{R} - I_{xz}\dot{P}(I_{yy} - I_{xx})PQ + I_{xz}QR = N_A + N_T \quad (1.11)$$

Les équations (1.4) à (1.8) et celles de (1.9) à (1.11) forment six équations différentielles avec six inconnues : U, V, W, P, Q et R. A ce stade, il n'est pas encore possible de résoudre ces équations différentielles en fonction du temps pour obtenir les paramètres du mouvement U(t) jusqu'à R(t) pour les raisons suivantes :

- Les forces aérodynamiques et de poussées ainsi que les moments correspondants dans les équations (1.2) et (1.7) ne sont pas encore définis en fonction des inconnues du mouvement U, V, W, P, Q et R.
- Les composantes de la force de gravité dans l'équation (1.2) dépend de l'orientation relative de l'avion par rapport au système fixe des coordonnées XYZ.

**1.2.1.1 Les équations du mouvement de l'état de vol stabilisé :**

L'état du vol stabilisé est défini comme une condition dans laquelle toutes les variables du mouvement restent constantes dans le temps par rapport à un système de coordonnées liés à l'avion. Mathématiquement, l'état de vol stabilisé stipule que :

$$\vec{V}_p = \vec{0} \quad , \quad \vec{\omega} = \vec{0} \quad (1.12)$$

Ces équations montrent que  $\vec{V}_p$  et  $\vec{\omega}$  sont constantes dans le temps par rapport au système de coordonnées lié à l'avion. En considérant un état d'équilibre initial (1), l'application des conditions de l'état de vol stabilisé est exprimée par les équations (1.4) à (1.6) et celles (1.9) à (1.11) pour obtenir les équations suivantes :

Les équations de forces du vol longitudinal :

$$\text{La force le long de X : } m(-V_1 R_1 + W_1 Q_1) = -mg \sin\theta_1 + F_{Ax1} + F_{Tx1} \quad (1.13)$$

$$\text{La force le long de Z : } m(-U_1 Q_1 + V_1 P_1) = mg \cos\Phi_1 \cos\theta_1 + F_{Az1} + F_{Tz1} \quad (1.14)$$

L'équation de forces du vol latéral-directionnel :

$$\text{La force le long de Y : } m(U_1 R_1 - W_1 P_1) = mg \sin\Phi_1 \cos\theta_1 + F_{Ay1} + F_{Ty1} \quad (1.15)$$

Les équations des moments du vol latéral-directionnel :

$$-I_{xz} P_1 Q_1 + (I_{zz} - I_{yy}) R_1 Q_1 = L_{A1} + L_{T1} \quad (1.16)$$

$$(I_{yy} - I_{xx}) P_1 Q_1 + I_{xz} Q_1 R_1 = N_{A1} + N_{T1} \quad (1.17)$$

L'équation de moment du vol longitudinal :

$$(I_{xx} - I_{zz}) P_1 R_1 + I_{xz} (P_1^2 - R_1^2) = M_{A1} M_{T1} \quad (1.18)$$

Tableau 2: Variables stabilisées et perturbées

Les variables	Les équations		
	Suivant X	Suivant Y	Suivant Z
La vitesse linéaire	$U = U_1 + u$	$V = V_1 + v$	$W = W_1 + w$
La vitesse angulaire	$P = P_1 + p$	$Q = Q_1 + q$	$R = R_1 + r$
Les angles d'Euler	$\Psi = \Psi_1 + \psi$	$\theta = \theta_1 + \theta$	$\phi = \phi_1 + \phi$
Les forces aérodynamiques	$F_{Ax} = F_{Ax} + f_{Ax}$	$F_{Ay} = F_{Ay} + f_{Ay}$	$F_{Az} = F_{Az} + f_{Az}$
Les forces de poussée	$F_{Tx} = F_{Tx} + f_{Tx}$	$F_{Ty} = F_{Ty} + f_{Ty}$	$F_{Tz} = F_{Tz} + f_{Tz}$
Les moments aérodynamiques	$L_A = L_{A_1} + l_A$	$M_A = M_{A_1} + m_A$	$N_A = N_{A_1} + n_A$
Les moments de poussée	$L_T = L_{T_1} + l_T$	$M_T = M_{T_1} + m_T$	$N_T = N_{T_1} + n_T$

Ces équations forment un système de six équations différentielles non linéaires. Elles sont du premier degré par rapport aux six inconnues  $U_1$ ,  $V_1$ ,  $W_1$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$  et  $R_1$ , de même, elles contiennent les inconnues  $\theta_1$ ,  $\phi_1$  et  $\Psi_1$ . Ces derniers inconnus sont liés à  $P_1$ ,  $Q_1$  et  $R_1$  au moyen des équations cinématiques :

$$P_1 = \dot{\Phi}_1 - \dot{\Psi}_1 \sin \theta_1 \quad (1.19)$$

$$Q_1 = \dot{\theta}_1 \cos \Phi_1 + \dot{\Psi}_1 \cos \theta_1 \sin \Phi_1 \quad (1.20)$$

$$R_1 = \dot{\Psi}_1 \cos \theta_1 \cos \Phi_1 - \dot{\theta}_1 \sin \Phi_1 \quad (1.21)$$

### 1.2.1.2 Les équations du mouvement de l'état de vol perturbé :

L'état du vol perturbé est défini comme une condition dans laquelle toutes les variables du mouvement sont définies par rapport à l'état du vol stabilisé. Il est décrit mathématiquement en considérant que toutes les variables du mouvement étant comme la somme de celles de l'état de vol stabilisé et les quantités de perturbation.

En effectuant les substitutions des variables de perturbation et en tenant compte des hypothèses suivantes :

- La première est que les variables de perturbation  $\Theta_1$  et  $\Phi_1$  sont faibles pour approximer les fonctions trigonométriques.
- La seconde est que les perturbations sont suffisamment petites pour que les produits et les dérivées des produits des variables de perturbation puissent être négligés.

De même, la majorité des problèmes de la dynamique d'avion sont concernés par des perturbations par rapport à un état de vol stabilisé pour lequel :

- La vitesse latérale initiale est nulle  $V_1 = 0$ .
- L'angle de roulis initial est nul  $\Phi_1 = 0$ .
- La vitesse angulaire initiale est nulle.

Finalement, on obtient les équations suivantes :

Les équations des forces dans le cas longitudinal :

$$m(\dot{u} + W_1 q) = -mg\theta \cos\Theta_1 + f_{Ax} + f_{Tx} \quad (1.22)$$

$$m(\dot{w} - U_1 q) = -mg\theta \sin\Theta_1 + f_{Az} + f_{Tz} \quad (1.23)$$

L'équation de force dans le cas latéral-directionnel :

$$m(\dot{v} + U_1 r - W_1 p) = mg\Phi \cos\Theta_1 + f_{Ay} + f_{Ty} \quad (1.24)$$

Les équations de moments dans le cas latéral-directionnelle :

$$I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} = l_A + l_T \quad (1.25)$$

$$I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} = n_A + n_T \quad (1.26)$$

L'équation de moment dans le cas longitudinal :

$$I_{yy}\dot{q} = m_A + m_T \quad (1.27)$$

Aussi :

$$p = \dot{\phi} - \psi \sin \Theta_1 \quad (1.28)$$

$$q = \dot{\theta} \quad (1.29)$$

$$r = \dot{\psi} \cos \Theta_1 \quad (1.30)$$

Les équations (1.22) à (1.30) forment les outils de base pour la plupart des études de la stabilité dynamique, réponse aux commandes ainsi que le système du pilotage automatique des avions.

### 1.3 Modélisation des forces et des moments :

#### 1.3.1 Modélisation des forces et des moments dans le cas longitudinal :

##### 1.3.1.1 Les forces dans le cas longitudinal

Les forces gravitationnelles dans le cas longitudinal peuvent être exprimées comme suit :

$$F_{Gx} = -mg \sin \theta \quad (1.31)$$

$$F_{Gz} = -mg \cos \Theta \cos \theta \quad (1.32)$$

Les forces aérodynamiques dans le cas longitudinal sont présentées dans les équations :

$$F_{Ax} = -D \cos \alpha + L \sin \alpha \quad (1.33)$$

$$F_{Az} = -D \sin \alpha + L \cos \alpha \quad (1.34)$$

La force de portance de l'avion est écrite comme suit :

$$L = C_L \bar{q} S; \quad C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha + C_{L_{i_h}} i_h + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L\dot{\alpha}} \frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2V_{AIR,T}} + C_{Lq} \frac{Q\bar{c}}{2V_{AIR,T}} \quad (1.35)$$

L'équation de la force de traînée parabolique de l'avion est décrite comme suit :

$$D = C_D \bar{q} S; \quad C_D = \bar{C}_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi A_e} \quad (1.36)$$

$C_{D0}$  est la valeur de  $C_D$  pour  $\alpha = i_h = \delta_e = 0$ .

$\bar{C}_{D0}$  est la valeur du coefficient de traînée de l'aéronef à coefficient de portance nul.

$$C_{D_0} = \bar{C}_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi \cdot AR \cdot e} - C_{D\alpha} \alpha \quad (1.37)$$

Les forces de propulsion dans le cas longitudinal :

$$F_{T_x} = T_{max_{SL}} \sigma \delta_T \cos \phi_T \quad (1.38)$$

$$F_{T_z} = T_{max_{SL}} \sigma \delta_T \sin \phi_T \quad (1.39)$$

Pour un avion à moteurs multiples, la force de poussée du moteur numéro  $i$  dans le cas longitudinal est modélisée comme suit :

$$T_i = T_{max_{SL,i}} \sigma \delta_{T,i} \quad (1.40)$$

$$F_{T_{x,i}} = T_i \cos \phi_{T,i} \cos \psi_{T,i} \quad (1.41)$$

$$F_{T_x} = \sum_{i=1}^{n_E} F_{T_{x,i}} \quad (1.42)$$

$$F_{T_{z,i}} = -T_i \sin \phi_{T,i} \quad (1.43)$$

$$F_{T_z} = \sum_{i=1}^{n_E} F_{T_{z,i}} \quad (1.44)$$

### 1.3.1.2 Les moments du cas longitudinal :

Les moments aérodynamiques :

- Le moment de tangage de l'avion est :

$$M_A = c_m \bar{q} S \bar{c}; \quad C_M = C_{M0} + C_{M\alpha} \alpha + C_{M_{i_h}} i_h + C_{M_{\delta e}} \delta e + C_{M_{\dot{\alpha}}} \frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2V_{AIR,T}} + C_{M_q} \frac{Q \bar{c}}{2V_{AIR,T}} \quad (1.45)$$

Les moments de poussée :

- Le moment de tangage de poussée est donné par :

$$M_{T,i} = T_{x,i} z_{T,i} - T_{z,i} x_{T,i}; \quad M_T = \sum_{i=1}^{n_E} M_{T,i} \quad (1.46)$$

### 1.3.2 Modélisation des forces et des moments dans le cas latéral-directionnel :

#### 1.3.2.1 Les forces dans le cas latéral-directionnel :

Les forces gravitationnelles dans le cas longitudinal peuvent être exprimées comme suit :

$$F_{Gy} = -mg \sin\phi \cos\theta \quad (1.47)$$

Les forces aérodynamiques dans le cas latéral directionnel sont présentées dans les équations :

$$F_{Ay} = C_y \bar{q} S; \quad C_y = C_{y0} + C_{y\beta} \beta + C_{y\delta a} \delta a + C_{y\delta r} \delta r; \quad F_{Ay} = C_y \bar{q} S. \quad (1.48)$$

Les forces de propulsion dans le cas latéral-directionnelle :

Pour un avion à moteurs multiples, la force de poussée du moteur numéro  $i$  dans le cas latéral-directionnelle est modélisée comme suit :

$$T_i = C_{maxSL,i} \sigma \delta_{T,i} \quad (1.49)$$

$$F_{T_y,i} = T_i \cos\phi_T \sin\psi_{T,i} \quad (1.50)$$

$$F_{T_y} = \sum_{i=1}^{n_E} F_{T_y,i} \quad (1.51)$$

#### 1.3.2.2 Les moments dans le cas latéral-directionnelle :

Les moments aérodynamiques :

- Le moment de lacet aérodynamique est écrit comme suit :

$$N = C_n \bar{q} S b; \quad C_n = C_{n0} + C_{n\beta} \beta + C_{n\delta a} \delta a + C_{n\delta r} \delta r \quad (1.52)$$

- Le moment de roulis aérodynamique est écrit comme suit :

$$L_A = C_l \bar{q} S b \quad (1.53)$$

$$C_l = C_{l0} + C_{l\beta} \beta + C_{l\delta a} \delta a + C_{l\delta r} \delta r + C_{lp} \frac{pb}{2U_1} + C_{lr} \frac{rb}{2U_1} \quad (1.54)$$

Les moments de poussée :

- Le moment de roulis de poussée :

$$L_{T,i} = -T_{y,i}z_{T,i} + T_{z,i}y_{T,i}; \quad L_T = \sum_{i=1}^{n_E} L_{T,i} \quad (1.55)$$

- Le moment de lacet de poussée :

$$N_{T,i} = T_{y,i}x_{T,i} - T_{x,i}y_{T,i}; \quad N_T = \sum_{i=1}^{n_E} N_{T,i} \quad (1.56)$$

### Conclusion :

En conclusion, ce chapitre a permis de poser les bases théoriques de l'étude de la stabilité et du mouvement des avions en établissant les équations générales du vol. Ces équations sont fondamentales pour analyser les forces et moments qui influencent la dynamique d'un avion, dans le cas d'un vol stabilisé ainsi que le cas perturbé.

**CHAPITRE 2**

**STABILITE STATIQUE POUR LES**

**CONDITIONS DE TRIM**

## CHAPITRE 2 : Stabilité Statique Pour Les Conditions De Trim

### 2.1 Définition de la stabilité statique :

La stabilité statique est définie comme la tendance d'un avion à développer des forces ou bien des moments qui s'opposent directement à une perturbation. L'objectif du Trim est de ramener les forces et les moments agissant sur l'avion à un état d'équilibre.

Par exemple, quand le nez d'un avion est soulevé relativement à la trajectoire de vol et par conséquent l'avion développe un moment de nez-vers le bas, on dit que l'avion serait statiquement stable pour une telle perturbation.

### 2.2 Définition de critère de stabilité :

Le critère de stabilité statique est défini comme règle par laquelle les conditions de vol équilibrées sont séparées dans les catégories : stable, instable ou indifférent.

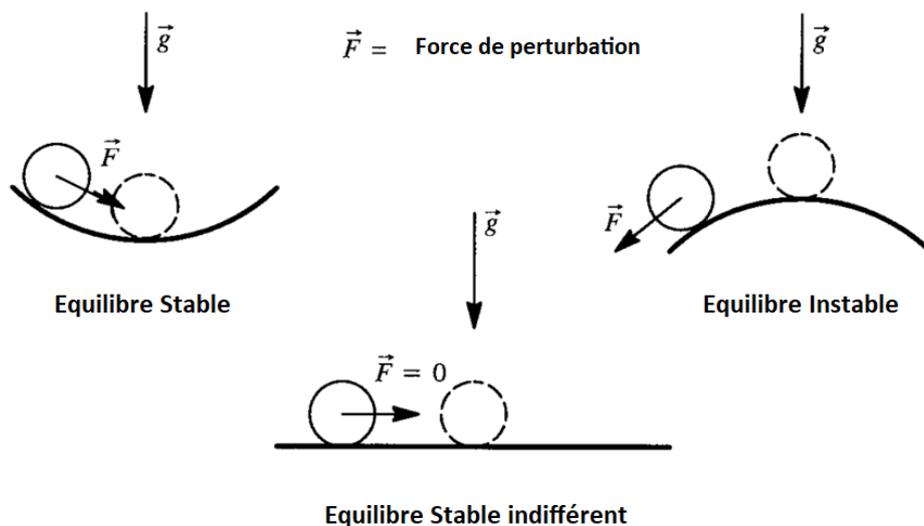


Figure 1: Equilibre stable, instable et indifférent pour un système mécanique

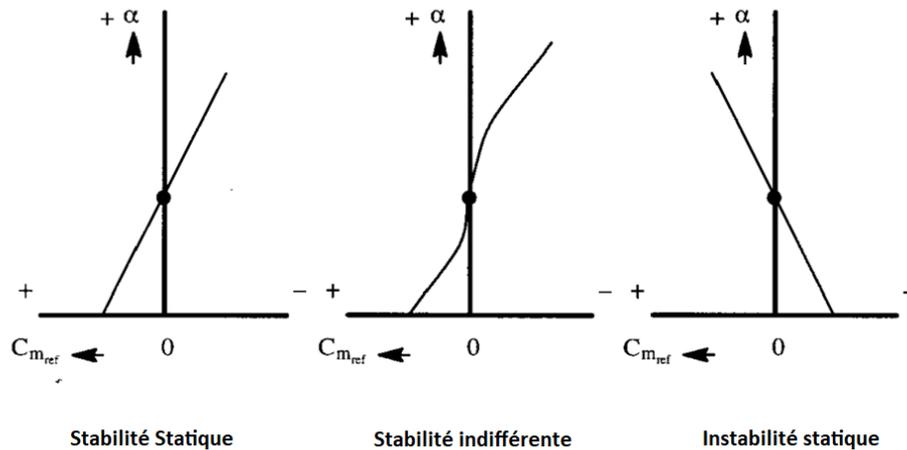


Figure 2: Equilibre stable, instable et indifférent du moment de tangage d'un avion

### 2.3 Les critères de stabilités

Le mouvement équilibré d'un avion a été défini en tant qu'un mouvement pour lequel la vitesse de translation  $\vec{V}_p$  et la vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  demeurent constantes avec le temps dans un repère fixe X, Y, Z. En langage plus commun, le cas d'état d'équilibre d'un avion est défini en tant qu'ayant une vitesse de translation constante, des vitesses de rotation constantes et un facteur de charge constant. Ce type de vol est fréquemment rencontré en palier et aux virages stabilisés.

Pour la détermination de la stabilité statique, il suffit de considérer seulement les composants  $\vec{V}_p$  et de  $\vec{\omega}$  (dans l'état de vol stabilisé) qui sont respectivement :  $U_1, V_1, W_1$  et  $P_1, Q_1, R_1$ . Les perturbations relativement à ces variables stabilisées de mouvement sont : u, v, w et p, q, r.

La définition de la stabilité statique sera maintenant appliquée en utilisant de la force et le moment instantanés. En déterminant quelles combinaisons des forces, des moments et des perturbations doivent être choisies, ces règles arbitraires ont été suivies :

1. Des perturbations de vitesse linéaires sont initialement opposées par des forces.
2. Des perturbations de vitesse angulaire sont initialement opposées seulement par des moments.
3. Les perturbations des angles d'incidence et de dérapage obtenues en interprétant les perturbations de vitesse v et w en tant que  $\beta = v / U_1$  et  $\alpha = W / U_1$  sont l'initialement opposé par des moments.

Appliquant uniformément ces règles et la définition de la stabilité statique au comportement des forces et de moments instantanés d'un avion, une série de critères de stabilité statique évoluent. Les résultats sont énoncés dans le tableau 2.1. Un avion sera considéré statiquement stable dans un mouvement variable s'il satisfait le critère correspondant du tableau 2.1. Pour la convenance, chaque variable de la stabilité statique dans le tableau 2.1 est accompagné d'une dérivée de coefficient de stabilité correspondant. D'un point de vue qualités de vol tous les critères de stabilité statique dans ce tableau ne sont pas également importants.

**Tableau 3: les critères de stabilité statique**

Les critères de la stabilité statique longitudinale				
Les variables de mouvement				
Forces et moments	$u$	$w$	$\alpha = \frac{w}{U_1}$	$q$
$F_{A_x} + F_{T_x}$	$\frac{\partial(F_{A_x} + F_{T_x})}{\partial u} < 0$			
	$\approx C_{D_u} > 0$			
$F_{A_z} + F_{T_z}$		$\frac{\partial(F_{A_z} + F_{T_z})}{\partial w} < 0$		
		$\approx C_{L_\alpha} > 0$		
$M_A + M_T$	$\frac{\partial(M_A + M_T)}{\partial u} > 0$		$\frac{\partial(M_A + M_T)}{\partial \alpha} > 0$	$\frac{\partial(M_A + M_T)}{\partial q} < 0$
	$\approx C_{m_u} > 0$		$\approx C_{m_\alpha} < 0$	$\approx C_{m_q} < 0$

### 2.3.1 Les Critères de stabilité statiques pour les perturbations de vitesse linéaires

#### 2.3.1.1 Vitesse de perturbation en translation longitudinale « u » :

Du tableau 2.1, un avion est statiquement stable pour une perturbation de vitesse de translation longitudinale u, si :

$$\frac{\partial(F_{A_X} + F_{T_X})}{\partial u} < 0 \quad (2.1)$$

La signification physique de ce critère est lors d'une augmentation de vitesse vers l'avant u, (le long de l'axe des abscisses), une force doit être produite qui tend à s'opposer à l'augmentation de la vitesse.

Les conséquences et la signification du critère 2.1 seront maintenant examinées en détail. Par rapport aux axes de stabilité :

$$F_{A_X} + F_{T_X} = (c_{T_{Xu}} - c_{D_u})\bar{q}S \quad (2.2)$$

L'application du critère (2.1) donne :

$$(c_{T_{Xu}} - c_{D_u}) + (c_{T_{X1}} - c_{D_1})\frac{2}{U_1} < 0 \quad (2.3)$$

Pour l'état de vol stabilisé l'expression suivante doit être satisfaite :

$$c_{T_{X1}} - c_{D_1} = 0 \quad (2.4)$$

Dans ce cas, le critère de stabilité statique de vitesse se réduit à :

$$(c_{T_{Xu}} - c_{D_u}) < 0 \quad (2.5)$$

L'avion qui répond au critère (2.1) ou (2.5) a la tendance de retourner à sa vitesse d'équilibre une fois perturbé dans l'une ou l'autre direction.

#### 2.3.1.2 Vitesse de perturbation latérale « v » :

Du tableau 2.1, on trouve que le critère de stabilité statique de la vitesse latérale est :

$$\frac{\partial(F_{A_Y} + F_{T_Y})}{\partial v} < 0 \quad (2.6)$$

Dans le système des axes de stabilité :

$$F_{A_Y} + F_{T_Y} = (-c_y + c_{T_y}) \bar{q} S \quad (2.7)$$

En appliquant le critère de stabilité (2.6) à l'équation (2.7) et en supposant que la vitesse de perturbation latérale n'affecte pas la pression dynamique, on trouve que :

$$c_{y_\beta} + c_{T_{y_\beta}} < 0 \quad (2.8)$$

Dans la majorité des cas, l'approximation  $c_{T_{y_\beta}} \approx 0$  est acceptable donc (2.6) se réduit à :

$$c_{y_\beta} < 0 \quad (2.9)$$

### 2.3.1.3 Vitesse de perturbation verticale « w » :

Du tableau 2.1, l'avion est statiquement stable pour une perturbation de la vitesse verticale si :

$$\frac{\partial(F_{A_Z} + F_{T_Z})}{\partial w} < 0 \quad (2.10)$$

La signification physique de ce critère lors d'une perturbation de vitesse positive  $w$  (le long de l'axe  $Z$ ), une force est produite qui tend à s'opposer à  $w$ . L'approximation  $w = \alpha U_1$  sera employée dans l'analyse supplémentaire du critère (2.10). Dans les axes de stabilité :

$$F_{A_Z} + F_{T_Z} = (-c_L + c_{T_z}) \bar{q} S \quad (2.11)$$

En appliquant le critère (2.6) et en utilisant  $w = \alpha U_1$ , tout en négligeant l'effet de  $w$  sur la pression dynamique, on trouve :

$$\frac{1}{U_1} (-c_{L_\alpha} + c_{T_{z_\alpha}}) \bar{q} S < 0 \quad (2.12)$$

Pour beaucoup d'avions et conditions de vol il est acceptable de supposer  $c_{T_{z_\alpha}} \ll c_{L_\alpha}$  de sorte que la condition (2.8) puisse habituellement être écrite comme :

$$c_{L_\alpha} > 0 \quad (2.13)$$

Cette condition montre que la pente de la courbe portance d'un avion doit être positive pour la stabilité statique pour s'opposer aux perturbations de vitesse verticale. Tant que l'incidence d'avion est au-dessous de l'incidence de décrochage, la condition (2.9) est toujours satisfaisante.

### 2.3.2 Critères de stabilité statique pour les perturbations d'angle d'incidence « $\alpha$ » :

D'après le tableau 2.1, l'avion est statiquement (longitudinalement) stable pour une perturbation d'angle d'attaque  $\alpha$ , si :

$$\frac{\partial(M_A + M_T)}{\partial \alpha} < 0 \quad (2.14)$$

La signification physique de ce critère est lors d'une perturbation d'angle d'attaque  $\alpha$ , l'avion sera orienté par effet girouette dans la nouvelle vitesse relative. Dans les axes de stabilité :

$$M_A + M_T = (c_m + c_{m_T}) \bar{q} S \bar{c} \quad (2.15)$$

En appliquant le critère (2.10) dans l'équation au-dessus on obtient :

$$c_{m_\alpha} + c_{m_{T_\alpha}} < 0 \quad (2.16)$$

Dans les cas où le  $c_{m_{T_\alpha}}$  est négligeable comparant à  $c_{m_\alpha}$  la condition de stabilité statique (2.12) se réduit à :

$$c_{m_\alpha} < 0 \quad (2.17)$$

### 2.3.3 Critères de stabilité statique pour les perturbations d'angle de dérapage :

$$\frac{\partial(N_A + N_T)}{\partial \beta} > 0 \quad (2.18)$$

La signification de ce critère lors d'une perturbation d'angle de dérapage, l'avion sera orienté par effet girouette dans la nouvelle vitesse relative.

Dans les axes de stabilité :

$$N_A + N_T = (c_n + c_{n_T}) \bar{q} S b \quad (2.19)$$

En appliquant le critère (2.18) à l'équation (2.19) :

$$c_{n_\beta} + c_{n_{T_\beta}} > 0 \quad (2.20)$$

Si la contribution de la poussée à la stabilité directionnelle est négligeable ( $c_{n_{T_\beta}} \ll c_{n_\beta}$ ), la condition (2.20) se réduit à :

$$c_{n\beta} > 0 \quad (2.21)$$

### 2.3.4 Critères de stabilité statique pour les perturbations de la vitesse angulaire :

#### 2.3.4.1 Critère de stabilité en taux de roulis « p » :

Le critère de stabilité statique pour une perturbation du taux de roulis est :

$$\frac{\partial(L_A + L_T)}{\partial p} < 0 \quad (2.22)$$

La signification physique de ce critère est lors d'un changement dans le taux de roulis p, un moment de roulis se génère qui s'oppose à l'augmentation de la vitesse de roulis.

Dans les axes de stabilité :

$$L_A + L_T = (C_l + C_{l_T})\bar{q}Sb \quad (2.23)$$

En négligeant la poussée dans l'équation (2.23) :

$$C_{l_p} < 0 \quad (2.24)$$

$C_{l_p}$  : La dérivée d'amortissement en roulis.

#### 2.3.4.2 Critère de stabilité en taux de tangage « q » :

Un avion est statiquement stable pour une perturbation du taux de tangage si :

$$\frac{\partial(M_A + M_T)}{\partial q} < 0 \quad (2.25)$$

La signification physique de ce critère est lors d'une augmentation du taux de tangage, q, qui produit un moment tend à s'opposer à cette augmentation. Dans les axes de stabilité :

$$M_A + M_T = (c_m + c_{m_T})\bar{q}S\bar{c} \quad (2.26)$$

En négligeant le terme de poussée, le critère (2.14) sera :

$$c_{m_q} < 0 \quad (2.27)$$

$c_{m_q}$  : La dérivée d'amortissement en tangage.

### 2.3.4.3 Critère de stabilité en taux de lacet « r » :

Le critère de stabilité dans ce cas est :

$$\frac{\partial(N_A+N_T)}{\partial r} > 0 \quad (2.28)$$

La signification physique de ce critère est lors d'un changement dans le taux de lacet, r, un moment de roulis ce génère qui s'oppose à l'augmentation de la vitesse de lacet.

Dans les axes de stabilité :

$$N_A + N_T = (c_n + c_{n_r})\bar{q}Sb \quad (2.29)$$

En négligeant l'effet de poussé, le critère (2.28) sera :

$$c_{n_r} < 0 \quad (2.30)$$

$c_{n_r}$  : la dérivée d'amortissement en lacet.

### 2.3.5 L'effet de la vitesse de translation sur le Moment de tangage :

Le comportement désiré d'un avion une fois perturbé par la vitesse de translation longitudinale est :

$$\frac{\partial(M_A+M_T)}{\partial u} > 0 \quad (2.31)$$

L'application de cette condition est qu'une augmentation de vitesse longitudinale, relativement à sa vitesse d'équilibre  $U_1$ , elle devrait réagir avec une augmentation positive (c-à-d nez vers le haut) dans le moment de tangage.

L'application du critère (2.31) donne :

$$\left(c_{m_u} + c_{m_{T_u}}\right) + \left(c_{m_1} + c_{m_{T_1}}\right) \frac{z}{U_1} > 0 \quad (2.32)$$

En conditions de vol d'état d'équilibre :

$$\left(c_{m_1} + c_{m_{T_1}}\right) = 0 \quad (2.33)$$

De sorte que ceci réduise à :

$$\left(c_{m_u} + c_{m_{T_u}}\right) > 0 \quad (2.34)$$

Dans la plupart des avions, l'effet de la poussée peut être négligé, alors le critère (2.31) sera :

$$c_{m_u} > 0 \quad (2.35)$$

Le signe et le module de  $c_{m_u}$  dépendent essentiellement de la forme en plan de l'avion ainsi que du nombre de Mach.

### 2.3.6 L'effet de dérapage sur le moment de roulis :

Le comportement désiré d'un avion d'une perturbation par un angle de dérapage  $\beta$  est :

$$\frac{\partial(L_A + L_T)}{\partial\beta} > 0 \quad (2.36)$$

La signification physique c'est que pour un dérapage positif l'avion a tendance à s'écarter de la perturbation, c'est-à-dire à rouler vers la gauche.

Dans le système des axes de stabilité :

$$L_A + L_T = (c_l + c_{l_T})\bar{q}Sb \quad (2.37)$$

En négligeant l'effet de poussée, le critère (2.36) est :

$$c_{l_\beta} < 0 \quad (2.38)$$

La dérivée  $c_{l_\beta}$  aussi connu comme l'effet de dièdre de l'avion.

## 2.4 Stabilité statique et commande d'un état de vol stabilisé (vol rectiligne) :

Pour maintenir un avion dans les conditions d'un état de vol stabilisé et permettre le manœuvré d'une condition à l'autre, il faut que les conditions suivantes soit satisfaites :

- L'avion doit avoir une puissance de commande suffisante.
- Le pilot ne doit pas exiger un effort extraordinaire.

L'objectif est d'analyser ces conditions en détail pour qu'elles puissent être employées par le concepteur. Pour effectuer l'analyse de ces conditions de commande, les équations appropriées du mouvement doivent être utilisées.

### 2.4.1 Stabilité longitudinale et les caractéristiques de commandes :

En Introduisant les expressions des forces et moments aérodynamiques et de poussée et de gravité dans les lois de Newton. Dans le cas de vol stabilisé longitudinale, on obtient :

$$mg \sin \gamma_1 = - \left( C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha_1 + C_{D_{i_h}} i_{h_1} + C_{D_{\delta_e}} \delta_{e_1} \right) \bar{q}_1 S + T_1 \cos(\phi_1 + \alpha_1) \quad (2.39.a)$$

$$mg \cos \gamma_1 = (C_{L_0} + C_{L_{\alpha_1}} \alpha_1 + C_{L_{i_{h_1}}} i_{h_1} + C_{L_{\delta_{e_1}}} \delta_{e_1}) \bar{q}_1 S + T_1 \sin(\phi_1 + \alpha_1) \quad (2.39.b)$$

$$0 = (C_{m_0} + C_{m_{\alpha_1}} \alpha_1 + C_{m_{i_{h_1}}} i_{h_1} + C_{m_{\delta_{e_1}}} \delta_{e_1}) \bar{q}_1 S \bar{c} - T_1 d_T \quad (2.39.c)$$

Ces équations sont écrites dans le système d'axes de stabilité. On assume que la pression dynamique est connue. Ces trois équations présentent six inconnus suivants :  $\gamma_1, \phi_1, \alpha_1, i_{h_1}, \delta_{e_1}$  et  $T_1$ .

On observe que les équations (2.39) supposent que l'angle d'inclinaison  $\phi_1 = 0$ . On suppose que  $T_1$  et  $i_{h_1}$  sont sélectionnés, les variables  $\alpha_1, \delta_{e_1}$  et  $\gamma_1$  peuvent être résolus par des techniques itératives qui sont exigées en raison de non linéarité de l'équation (2.39).

Avec les solutions itératives trouvées, l'ingénieur peut donner une interprétation en vue d'une application pratique. Par exemple, si une des solutions est de 45 degrés pour l'angle de gouverne profondeur, il y a clairement un problème : les empennages avec un angle de gouverne supérieur à 25-30 degrés vont provoquer le phénomène de décrochage, même si la solution est mathématiquement acceptable.

On introduit les trois hypothèses suivantes :

- La poussée équilibre la trainé dans l'équation (2.39.a)
- La ligne de poussée passe par le centre de gravité ( $d_T = 0$ )
- Le terme  $T_1 \sin(\phi_1 + \alpha_1)$  est négligeable dans l'équation de portance (2.39.b)

Avec ces hypothèses l'équation (2.39) peut être simplifiée sous la forme suivante :

$$mg \cos \gamma_1 = (C_{L_0} + C_{L_{\alpha_1}} \alpha_1 + C_{L_{i_{h_1}}} i_{h_1} + C_{L_{\delta_{e_1}}} \delta_{e_1}) \bar{q}_1 S \quad (2.40.a)$$

$$0 = (C_{m_0} + C_{m_{\alpha_1}} \alpha_1 + C_{m_{i_{h_1}}} i_{h_1} + C_{m_{\delta_{e_1}}} \delta_{e_1}) \bar{q}_1 S \bar{c} \quad (2.40.b)$$

La forme matricielle des équations (2.40) est donnée par :

$$\begin{bmatrix} C_{L_{\alpha_1}} & C_{L_{\delta_{e_1}}} \\ C_{m_{\alpha_1}} & C_{m_{\delta_{e_1}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \delta_{e_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{L_1} - C_{L_0} - C_{L_{i_{h_1}}} i_{h_1} \\ -C_{m_0} - C_{m_{i_{h_1}}} i_{h_1} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Avec  $C_{L_1} = \frac{mg}{\bar{q}_1 S}$ , si  $\cos \gamma_1 = 1$ , qui est le coefficient de portance en régime permanent de l'avion.

Les solutions de la matrice (2.41) sont :

$$\alpha_1 = \frac{(C_{L_1} - C_{L_0} - C_{L_{i_h}} i_{h_1}) C_{m_{\delta_e}} + (C_{m_0} + C_{m_{i_h}} i_{h_1}) C_{L_{\delta_e}}}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (2.42)$$

$$\delta_{e_1} = \frac{-C_{L_\alpha} (C_{m_0} + C_{m_{i_h}} i_{h_1}) - C_{m_\alpha} (C_{L_1} - C_{L_0} - C_{L_{i_h}} i_{h_1})}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (2.43)$$

Ces équations peuvent être écrites comme suit :

$$\alpha_1 = \alpha_{C_{L_1}=0} + \frac{\partial \alpha}{\partial C_L} C_{L_1} \quad (2.44)$$

$$\delta_{e_1} = \delta_{e_{C_{L_1}=0}} + \frac{\partial \delta_e}{\partial C_L} C_{L_1} \quad (2.45)$$

$\alpha_{C_{L_1}=0}$  : c'est l'angle d'incidence pour lequel l'avion est équilibré avec  $C_{L_1} = 0$ .

$\delta_{e_{C_{L_1}=0}}$  : c'est l'angle de la gouverne pour lequel l'avion est équilibré avec  $C_{L_1} = 0$ .

$\frac{\partial \alpha}{\partial C_L}$  : C'est la variation de l'angle d'incidence de l'équilibre avec le coefficient de portance.

$\frac{\partial \delta_e}{\partial C_L}$  : C'est la variation d'angle de gouverne d'équilibre avec le coefficient de portance

D'après les équations (2.42) et (2.43) on peut déduire :

$$\alpha_{C_{L_1}=0} = \frac{(-C_{L_0} - C_{L_{i_h}} i_{h_1}) C_{m_{\delta_e}} + (C_{m_0} + C_{m_{i_h}} i_{h_1}) C_{L_{\delta_e}}}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (2.46)$$

$$\delta_{e_{C_{L_1}=0}} = \frac{-C_{L_\alpha} (C_{m_0} + C_{m_{i_h}} i_{h_1}) - C_{m_\alpha} (-C_{L_0} - C_{L_{i_h}} i_{h_1})}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial C_L} = \frac{C_{m_{\delta_e}}}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial C_L} = \frac{-C_{m_\alpha}}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (2.49)$$

La figure 2.3 montre une solution graphique de l'équation (2.40) pour le cas d'un avion où l'angle de gouverne de profondeur est limité de -20 degrés à + 10 degrés. D'après la partie supérieure de cette figure, on note que l'équilibre (trim) ( $C_m = 0$ ) se produit seulement pour les points A, B, C et D. avec le transfert des points A, B, C et D à la partie inférieure de la

figure, il résulte la courbe de coefficient de portance équilibré (trimmed) en fonction de l'angle d'attaque. La pente de cette courbe correspond à la pente inverse de l'équation (2.48).

Observer qu'au point D de la figure 2-3, le coefficient de portance est 1.0. En conséquent, dans ce cas, 1.0 est la valeur de coefficient de portance maximal à l'équilibre. L'avion ne peut pas être équilibré pour une vitesse inférieure à celle qui correspondant la valeur maximale de coefficient de portance.

Concernant le point A de la figure 2-3, le coefficient de portance a une valeur de 0.57 et désigné par coefficient de portance minimal d'équilibre. L'avion ne peut pas être équilibré pour une vitesse supérieure à celle correspondant à la valeur minimale de coefficient de portance.

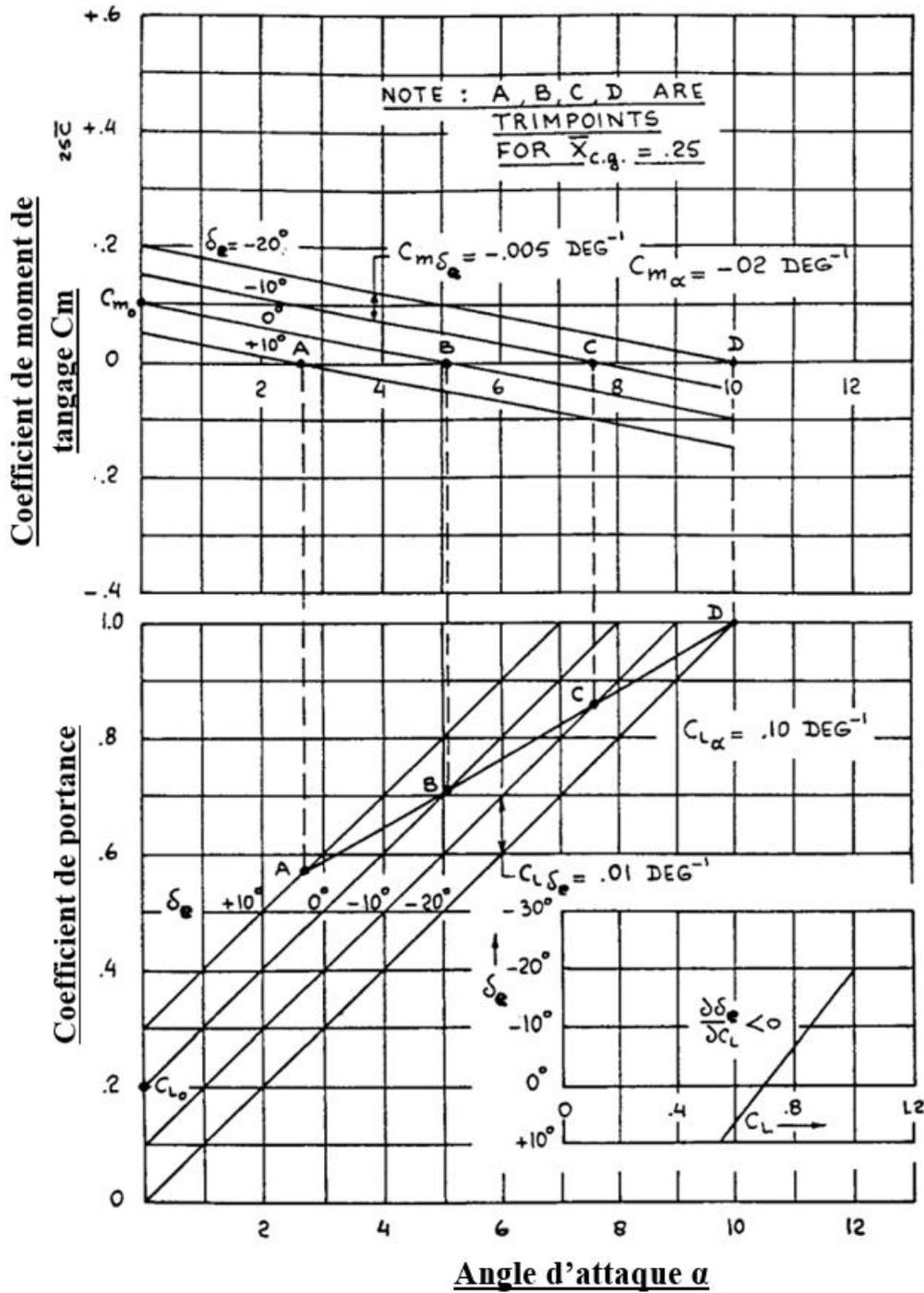


Figure 3: La détermination graphique des solutions d'équilibre

Deux facteurs sont principalement responsables de ces conséquences :

- La supposition que l'angle de gouverne de profondeur est entre de + 10 degrés à -20 degrés.

- Le paramètre de puissance de control qui est proportionnel à la distance verticale entre les lignes de gouverne de profondeur constantes dans la partie supérieure de la figure 2.3.

Pendant la conception préliminaire d'un avion, les deux facteurs sont sous le contrôle du concepteur et doivent être choisis de telle manière que le Trim ne soit pas un facteur de limitation dans l'enveloppe de vol prévue de l'avion.

La variation de gouverne par rapport au coefficient de portance de l'équation (2.49) peut être déterminée dans le test en vol comme une fonction de la position du centre de gravité. D'après la figure (2.4), il est possible de déterminer l'emplacement de centre aérodynamique. Ce point est aussi désigné par le point neutre avec manche fixe  $NP_{\text{fix}}$ .

Puisque  $C_{L_1} = \frac{mg}{\bar{q}_1 S}$  on trouve que :

$$\frac{\partial C_L}{\partial U_1} = - \frac{4W}{\rho S U_1^3} \quad (2.50)$$

Ce résultat est également appelé le gradient de gouverne de profondeur en fonction de la vitesse. On peut l'exprimer aussi par :

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial U_1} = \frac{4W}{\rho S U_1^3} \frac{C_{m_\alpha}}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (2.51)$$

De point de vue qualité de vol il est essentiel que la variation de gouverne par rapport à la vitesse soit positive :

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial U_1} > 0 \quad (2.52)$$

Cela signifie que pour augmenter la vitesse, il est nécessaire de déplacer le bord de fuite de la gouverne de profondeur vers le bas (le cas de déflexion positive). De même, pour ralentir, il est nécessaire de déplacer le bord de fuite de la gouverne de profondeur vers le haut. Pour que la condition (2.52) soit satisfaite, on doit vérifier le signe de la dérivée de l'équation (2.51).

Pour la plupart des avions la condition suivante :  $|C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}}| \gg |C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}}|$

Elle est satisfaite car la dérivée  $C_{L_\alpha}$  est généralement positive au-dessous de décrochage et puisque la dérivée  $C_{m_{\delta_e}}$  est généralement négative, la condition (2.52) est satisfaite lorsque :

$$C_{m_\alpha} < 0.$$

Pour qu'un avion soit stable, cette condition est satisfaite tant que le centre de gravité est situé devant le centre aérodynamique.

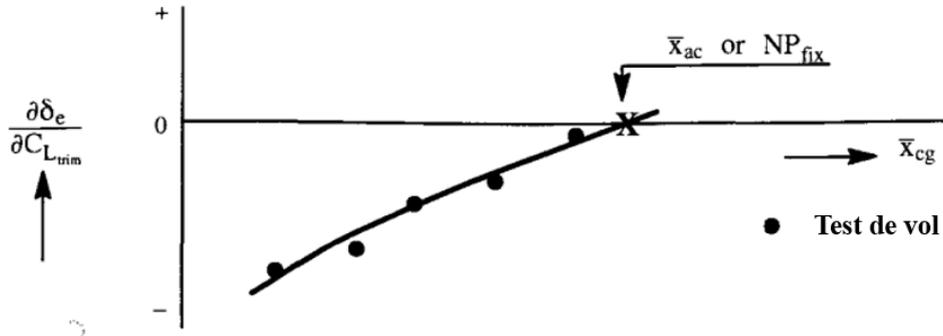


Figure 4: Détermination de point neutre à partir d'un test de vol

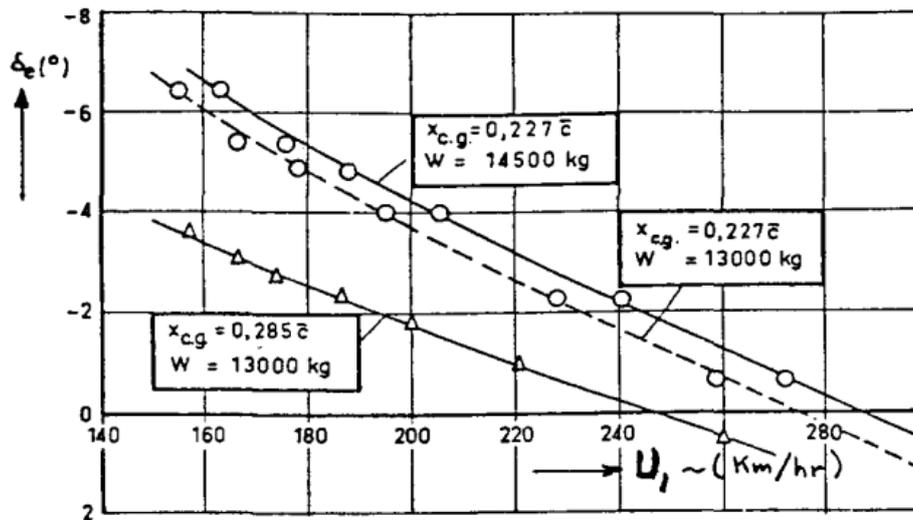


Figure 5: L'effet de la vitesse, le poids et la position de centre de gravité sur l'angle de la gouverne pour Fokker 27.

On considère l'équation (2.40b) et on suppose que l'angle d'incidence de stabilisateur ( $i_h \approx 0$ ) et l'angle  $\alpha_1$  est connue. La gouverne de profondeur requise pour l'équilibrage peut être écrite comme suit :

$$\delta_{e_{trim}} = \frac{-(C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_{trim})}{C_{m_{\delta_e}}} \tag{2.53}$$

La dérivée partielle par rapport à la vitesse en tenant compte des variations du nombre de Mach, donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_{e_{trim}}}{\partial V_p} &= \frac{1}{a} \frac{\partial \delta_{e_{trim}}}{\partial M} \\ &= -\frac{1}{a} \frac{\left( \frac{\partial C_{m_0}}{\partial M} + \frac{\partial C_{m_\alpha}}{\partial M} \alpha_{trim} + C_{m_\alpha} \frac{\partial \alpha_{trim}}{\partial M} \right)}{C_{m_{\delta_e}}} + \frac{1}{a} \frac{(C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_{trim})}{(C_{m_{\delta_e}})^2} \frac{\partial C_{m_{\delta_e}}}{\partial M} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Le signe de la dérivée de la gouverne de profondeur par rapport à la vitesse dépend non seulement de la position du centre de gravité, mais aussi de la manière dont les différents termes dépendant du nombre de Mach varient avec celui-ci.

$$C_{m_u} \approx \frac{1}{a} \left( \frac{\partial C_{m_0}}{\partial M} + \frac{\partial C_{m_\alpha}}{\partial M} \alpha_{trim} \right) \quad (2.55)$$

De l'équation (2.54) le signe positif de  $C_{m_u}$  sert à augmenter le gradient de vitesse de la gouverne de profondeur  $\frac{\partial \delta_e}{\partial V_p}$ . Cependant si  $C_{m_u} < 0$  et son module est suffisamment grand, il est possible d'inverser le signe  $\frac{\partial \delta_e}{\partial V_p}$  qui génère le phénomène "la tendance à piquer".

### 2.4.1.1 Trim longitudinal :

La forme matricielle de l'équation de Trim est :

$$\begin{bmatrix} C_{D_\alpha} + C_{D_{\alpha^2}} \alpha & \frac{W}{\bar{q}S} & C_{D_{i_h}} & C_{D_{\delta_e}} & C_{D_{\delta_t}} & 0 \\ C_{L_\alpha} & 0 & C_{L_{i_h}} & C_{L_{\delta_e}} & C_{L_{\delta_t}} & 0 \\ C_{m_\alpha} & 0 & C_{m_{i_h}} & C_{m_{\delta_e}} & C_{m_{\delta_t}} & 0 \\ C_{h_\alpha} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) & 0 & C_{h_\alpha} + \frac{K_5}{\eta_h \bar{q} S_e \bar{c}_e} & C_{h_{\delta_e}} + \frac{(K_3 + K_4 \delta_e)}{\eta_h \bar{q} S_e \bar{c}_e} & C_{h_{\delta_t}} & \frac{-1}{\eta_h \bar{q} S_e \bar{c}_e G_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \gamma \\ i_h \\ \delta_e \\ \delta_t \\ F_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -C_{D_0} + \frac{T}{\bar{q}S} \cos(\alpha + \phi_T) \\ \frac{nW}{\bar{q}S} - C_{L_0} - C_{L_q} \frac{g\bar{c}}{2U_1^2} \left(n - \frac{1}{n}\right) - \frac{T}{\bar{q}S} \sin(\alpha + \phi_T) \\ -C_{m_0} - C_{m_q} \frac{g\bar{c}}{2U_1^2} \left(n - \frac{1}{n}\right) + \frac{Td_T}{\bar{q}S\bar{c}} - I_{xz} \frac{g^2}{U_1^2 \bar{q}S\bar{c}} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ -C_{h_0} - C_{h_\alpha} \left\{ -\varepsilon_0 + \frac{g(x_{ac_h} - x_{cg})}{U_1^2} \left(n - \frac{1}{n}\right) \right\} - \frac{(nW_{bw}K_1 + G_e K_2)}{\eta_h \bar{q} S_e \bar{c}_e G_e} \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

On note que :  $C_{D_0}$ ,  $C_{L_0}$  et  $C_{m_0}$  sont défini à  $\alpha = 0$ .

D'après l'équation (2.56), on trouve qu'on a six variables :  $\alpha, \gamma, i_h, \delta_e, \delta_t, F_S$ . Deux de ces variables doit être présélectionner avant qu'on trouve la solution. Pour faire l'analyse d'un avion donné avec un système de contrôle de vol donné, on a les cas suivants :

1<sup>er</sup> cas : on suppose un trim de gouverne de profondeur incontrôlé,  $\delta_t = \delta_{t_{max}}$  et on applique la force maximale acceptable sur la manche  $F_S = F_{S_{max}}$ .

Maintenant l'équation (2.56) a une solution de Trim unique pour :  $\alpha, \gamma, i_h$  et  $\delta_e$ . Cette solution doit être physiquement réaliste,

2eme cas : on suppose une défaillance d'incidence incontrôlée du stabilisateur  $i_h = i_{h_{max}}$  dans un avion sans compensateur. Cela est simulé par :  $\delta_t = 0$ .

L'équation (2.56) a alors une solution unique pour :  $\alpha, \gamma, i_h, \delta_e$  et  $F_S$ .

En plus du 1<sup>er</sup> et 2eme cas, toute autre combinaison de deux entrées présélectionnées peut être calculé par la matrice (2.56)

## 2.4.2 Le diagramme de Trim d'un avion :

La solution de l'équation (2.40) présenté dans les graphs de la figure 2-3 change avec la variation de la position du centre de gravité. Les courbes  $C_m$  en fonction de  $\alpha$  du graph de la figure 2-3 (en haut) peuvent être redessinées pour chaque nouvelle position du centre de gravité. Pour éviter ce processus les équations (2.40) seront exprimées comme suit :

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{i_h}} i_h + C_{L_{\delta_e}} \delta_e \quad (2.57.a)$$

$$0 = \bar{C}_{m_0} + \frac{dC_m}{dC_L} C_L + \bar{C}_{m_{i_h}} i_h + \bar{C}_{m_{\delta_e}} \delta_e \quad (2.57.b)$$

La dérivée  $\frac{dC_m}{dC_L}$  est obtenu en divisant  $C_{m_\alpha}$  par  $C_{L_\alpha}$ . Un avion doit avoir une marge statique positif, SM si la dérivée  $\frac{dC_m}{dC_L} < 0$ .

$$SM = -\frac{dC_m}{dC_L} = -\frac{C_{m_\alpha}}{C_{L_\alpha}} = -(\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac}) = (\bar{x}_{ac} - \bar{x}_{cg}) \quad (2.58)$$

La marge statique est la distance entre le centre de la gravité et le centre aérodynamique d'avion, tous les deux donnés comme fractions de la corde géométrique moyenne  $\bar{c}$ . Les quantités qui représentent des barres dans les équations (2.57) ont une nouvelle signification :

$$\bar{C}_{m_0} = C_{m_{(C_L=i_h=\delta_e=0)}} \quad , \quad (C_{m_0} = C_{m_{(\alpha=i_h=\delta_e=0)}}) \quad (2.59)$$

$$\bar{C}_{m_{i_h}} = \left( \frac{dC_m}{di_h} \right)_{(C_L \text{ constant et } \delta_e \text{ constant})} \quad (2.60)$$

$$\bar{C}_{m_{\delta_e}} = \left( \frac{dC_m}{d\delta_e} \right)_{(C_L \text{ constant et } i_h \text{ constant})} \quad (2.61)$$

Les relations entre les coefficients sont :

$$\bar{C}_{m_0} = C_{m_0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}} C_{L_0} \quad (2.62.a)$$

$$\bar{C}_{m_{i_h}} = C_{m_{i_h}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}} C_{L_{i_h}} \quad (2.62.b)$$

$$\bar{C}_{m_{\delta_e}} = C_{m_{\delta_e}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}} C_{L_{\delta_e}} \quad (2.62.c)$$

Les quantités barrées (définies pour un coefficient de portance constant) sont égales aux quantités non barrées (définies pour un angle d'incidence constant) pour des avions lorsque

$$C_{L_0} \approx C_{L_{i_h}} \approx C_{L_{\delta_e}} \approx 0 \text{ est satisfaite.}$$

La figure 2.6 présente une solution graphique de l'équation (2.57). On note que le point de référence pour le coefficient de moment de tangage est arbitrairement sélectionné au quart de la corde (0.25). Le graphe de la figure 2.6 est le diagramme de Trim de l'avion. Il détermine :

- Si l'avion peut être équilibré à n'importe quelle position de centre de gravité avec des braquages de gouverne raisonnables.
- Si le décrochage d'empennage est un facteur de limitation de l'équilibre (Trim).

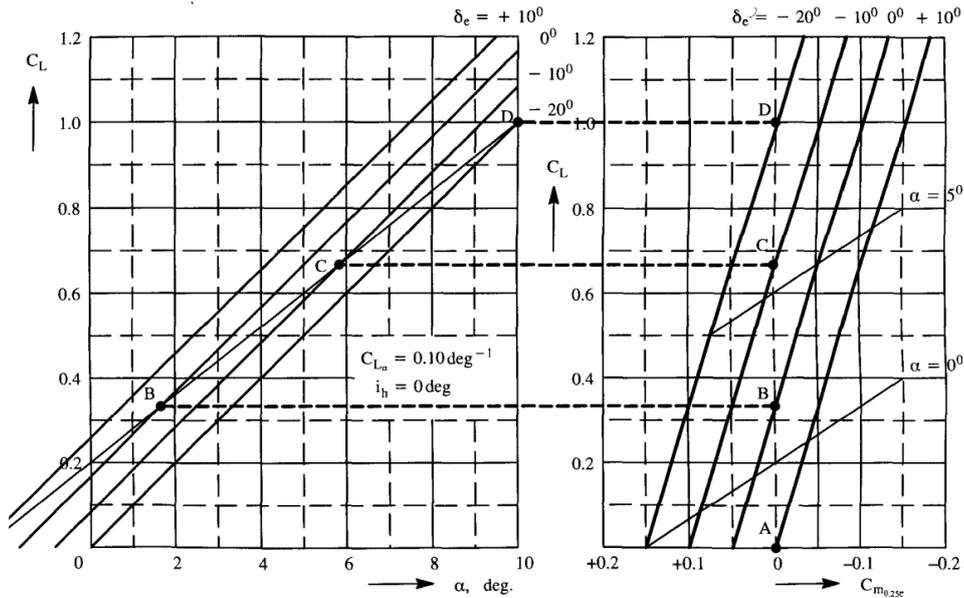


Figure 6: Diagramme de Trim

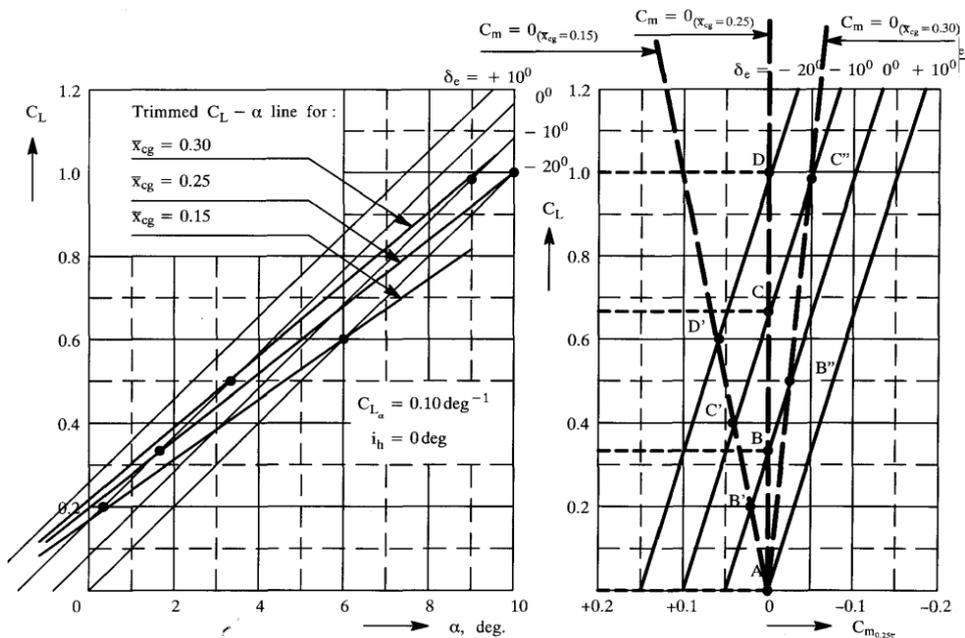


Figure 7: Utilisation d'un diagramme de trim pour trouver les coefficients de portance trimés pour différentes positions du centre de gravité

**2.4.2.1 L'effet de poussé sur le diagramme de Trim :**

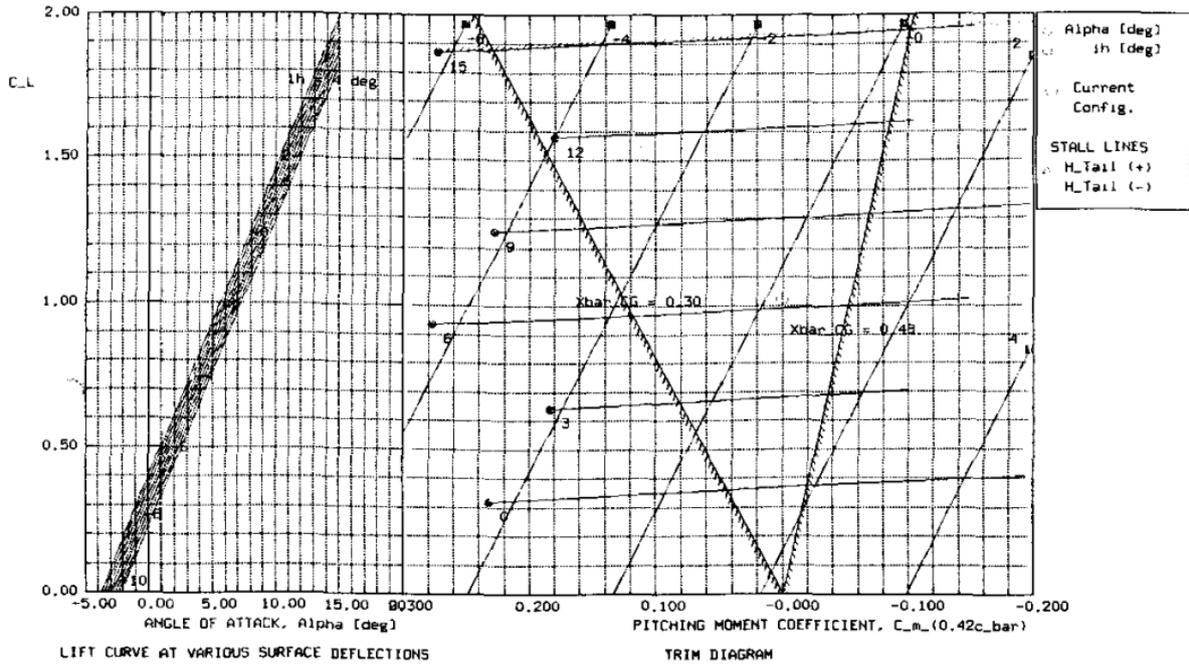
L'effet des termes de poussée sur les équations (2.57) résulte :

$$C_L = \frac{W}{\bar{q}_1 S} = \left( C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{i_h}} i_h + C_{L_{\delta_e}} \delta_e \right) + \frac{T_1 \sin(\phi_T + \alpha_1)}{\bar{q}_1 S} \tag{2.63.a}$$

$$0 = \left( \bar{C}_{m_0} + \frac{dC_m}{dC_L} C_L + \bar{C}_{m_{i_h}} i_h + \bar{C}_{m_{\delta_e}} \delta_e \right) - \frac{T_1 d_T}{\bar{q}_1 S c} \tag{2.63.b}$$

L'effet de terme de poussé sur l'équation de portance est généralement négligeable. Vue que la poussée équilibre trainée et la portance équilibre le poids sont approximativement satisfaites, le terme de poussé dans l'équation (2.63) peut être approximé par :

$$\frac{T_1 \sin(\phi_T + \alpha_1)}{\bar{q}_1 S} \approx \frac{1}{L/D} \sin(\phi_T + \alpha_1) \tag{2.64}$$



$$d_T = 0 \text{ ft}$$

Figure 8: Diagramme de Trim sans l'effet de poussée

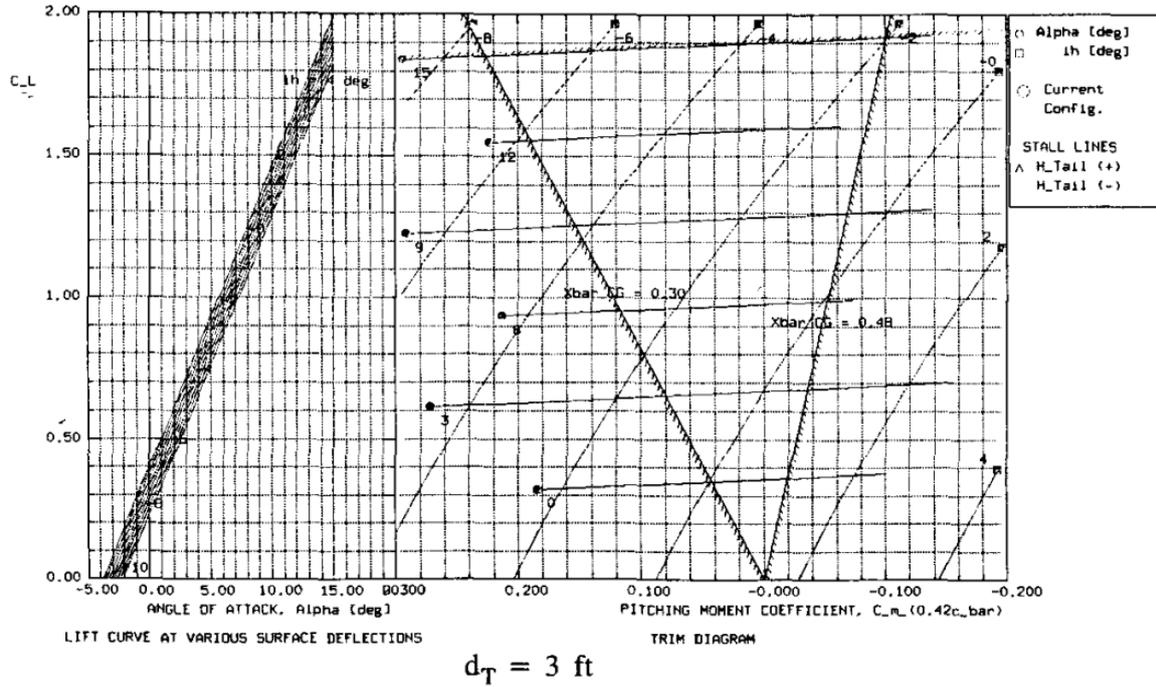


Figure 9: Diagramme de Trim avec l'effet de poussée

### 2.4.3 Stabilité latérale-directionnelle et les caractéristiques de commandes :

Les équations de mouvement latéral-directionnel peuvent être écrites comme :

$$-mgsin\phi_1 \cos\gamma_1 = (C_{y\beta}\beta_1 + C_{y\delta_a}\delta_{a_1} + C_{y\delta_r}\delta_{r_1}) \bar{q}_1 S + F_{y_{T_1}} \quad (2.65.a)$$

$$0 = (C_{l\beta}\beta_1 + C_{l\delta_a}\delta_{a_1} + C_{l\delta_r}\delta_{r_1}) \bar{q}_1 S b + L_{T_1} \quad (2.65.b)$$

$$0 = (C_{n\beta}\beta_1 + C_{n\delta_a}\delta_{a_1} + C_{n\delta_r}\delta_{r_1}) \bar{q}_1 S b + N_{T_1} \quad (2.65.c)$$

Les équations (2.65) sont appliquées aux situations de vol avec une poussée symétrique ainsi qu'asymétrique. Dans le cas de poussée symétrique les termes de poussée peuvent être négligés dans les équations (2.65). Pour les situations de vol avec un moteur inopérant, une augmentation de la traînée du côté du moteur inopérant entraîne généralement un moment de lacet supplémentaire  $\Delta N_{D_1}$ .

La forme matricielle de l'équation (2.65) :

$$\begin{bmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_a} & C_{y\delta_r} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_a} & C_{l\delta_r} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_a} & C_{n\delta_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-mgsin\phi_1 cos\gamma_1 + F_{yT_1}}{\bar{q}_1 S} \\ \frac{-L_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} \\ \frac{-N_{T_1} - \Delta N_{D_1}}{\bar{q}_1 S b} \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

Les solutions des équations de mouvement latérales-directionnelles en régime permanent :

$$\beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-mgsin\phi_1 cos\gamma_1 + F_{yT_1}}{\bar{q}_1 S} & C_{y\delta_a} & C_{y\delta_r} \\ \frac{-L_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} & C_{l\delta_a} & C_{l\delta_r} \\ \frac{-N_{T_1} - \Delta N_{D_1}}{\bar{q}_1 S b} & C_{n\delta_a} & C_{n\delta_r} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (2.67)$$

$$\delta_{a_1} = \frac{\begin{vmatrix} C_{y\beta} & \frac{-mgsin\phi_1 cos\gamma_1 + F_{yT_1}}{\bar{q}_1 S} & C_{y\delta_r} \\ C_{l\beta} & \frac{-L_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} & C_{l\delta_r} \\ C_{n\beta} & \frac{-N_{T_1} - \Delta N_{D_1}}{\bar{q}_1 S b} & C_{n\delta_r} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (2.68)$$

$$\delta_{r_1} = \frac{\begin{vmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_a} & \frac{-mgsin\phi_1 cos\gamma_1 + F_{yT_1}}{\bar{q}_1 S} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_a} & \frac{-L_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_a} & \frac{-N_{T_1} - \Delta N_{D_1}}{\bar{q}_1 S b} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (2.69)$$

$$\text{Où : } \Delta = \begin{vmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_a} & C_{y\delta_r} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_a} & C_{l\delta_r} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_a} & C_{n\delta_r} \end{vmatrix} \quad (2.70)$$

### 2.4.3.1 Trim latéral-directionnel :

La forme matricielle de l'équation longitudinale de Trim :

$$\begin{bmatrix}
 \frac{(1-\hat{n})W}{\bar{q}_1 S} + \frac{\hat{n}C_{y_r}bg}{2U_1^2} & C_{y\beta} & C_{y\delta_a} & C_{y\delta_r} & C_{y\delta_{aT}} & C_{y\delta_{rT}} & 0 & 0 \\
 \frac{\hat{n}(I_{yy}-I_{zz})g^2 \tan\phi \sin\phi}{\bar{q}_1 S b U_1^2} + \frac{\hat{n}C_{l_r}bg}{2U_1^2} & C_{l\beta} & C_{l\delta_a} & C_{l\delta_r} & C_{l\delta_{aT}} & C_{l\delta_{rT}} & 0 & 0 \\
 \frac{-\hat{n}I_{xz}g^2 \tan\phi \sin\phi}{\bar{q}_1 S b U_1^2} + \frac{\hat{n}C_{n_r}bg}{2U_1^2} & C_{n\beta} & C_{n\delta_a} & C_{n\delta_r} & C_{n\delta_{aT}} & C_{n\delta_{rT}} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -2C_{h\delta_a} & \frac{K_6}{\bar{q}_1 S a \bar{c}_a} & -C_{h\delta_{aT}} & 0 & \frac{-1}{\bar{q}_1 S a \bar{c}_a G_a} & 0 \\
 -C_{h\beta_r} \frac{\hat{n}g(x_{acv}-x_{cg})}{U_1^2} & C_{h\beta_r} \left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right) & \frac{K_7}{\eta_v \bar{q}_1 S r \bar{c}_r} & C_{h\delta_r} & 0 & C_{h\delta_{rT}} & 0 & \frac{-1}{\eta_v \bar{q}_1 S r \bar{c}_r G_r}
 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix}
 \sin\phi \\
 \beta \\
 \delta_a \\
 \delta_r \\
 \delta_{a_t} \\
 \delta_{r_t} \\
 F_a \\
 F_r
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 \frac{-F_{T_{y_1}}}{(\bar{q}_1 S)} \\
 \frac{-L_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} \\
 \frac{-\{(N_{T_1})(F_{OEI})\}}{\bar{q}_1 S b} \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

D'après l'équation (2.71), on trouve que les cinq équations latéral-directionnelles de trim ont un total de huit variables :  $\phi, \beta, \delta_a, \delta_r, \delta_{a_t}, \delta_{r_t}, F_a$  et  $F_r$ . Le tri de ces variables doit être présélectionner avant que la solution soit trouvée. Lors de l'analyse d'un avion donné avec un système de contrôle de vol donné, on a les cas suivants :

1<sup>er</sup> cas : on suppose une défaillance de moteur est produite dans un avion sans aileron ni gouverne de direction ( $\delta_{a_t} = \delta_{r_t} = 0$ ). Supposons aussi que l'angle d'inclinaison soit le maximum autorisé, c'est-à-dire cinq degrés, pour le moteur opérationnel.

L'équation (2.71) a une solution de Trim unique pour :  $\beta, \delta_a, \delta_r, F_a$  et  $F_r$ . Cette solution doit être applicable dans les cas réels.

2em cas : Supposons un compensateur de gouverne de direction incontrôlé  $\delta_{r_t} = \delta_{r_t \max}$ ,  $\delta_{a_t} = 0$  et  $\phi = 0$

L'équation (2.71) a une solution unique pour :  $\beta, \delta_a, \delta_r, F_a$  et  $F_r$ .

## 2.4.4 Comparaison de Trim pour la configuration conventionnelle, canard et trois surfaces :

### 2.4.4.1 Le Trim de configuration conventionnelle :

La figure 2-10 montre une combinaison aile-empennage pour un avion conventionnel. Le fuselage a été omis pour la clarté. L'effet de fuselage est exprimé en plaçant le vecteur de portance aile-fuselage dans le centre aérodynamique aile-fuselage. Ces hypothèses sont données :

$$C_{mac_{wf}} < 0 \text{ et } C_{mac_h} \approx 0 \quad (2.71)$$

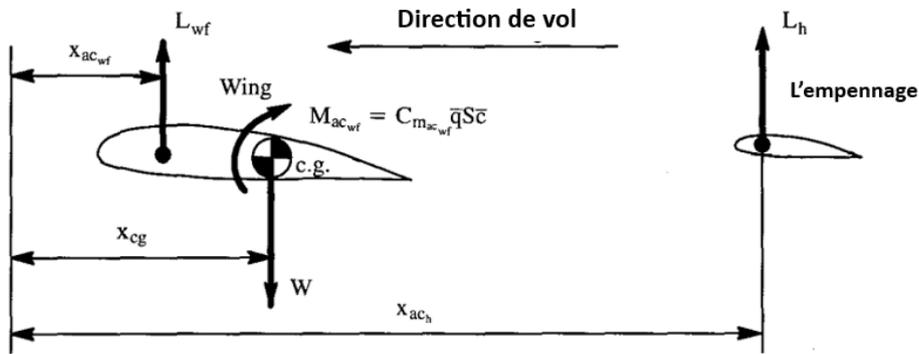


Figure 10: Configuration aile-empennage pour un avion conventionnel

Pour le moment d'équilibre autour le centre de gravité, cette condition doit s'appliquer :

$$L_{wf}(x_{cg} - x_{ac_{wf}}) + M_{ac_{wf}} - L_h(x_{ac_h} - x_{cg}) = 0 \quad (2.72)$$

De cette équation, la charge d'empennage pour l'équilibre est :

$$L_h = \frac{L_{wf}(x_{cg} - x_{ac_{wf}}) + M_{ac_{wf}}}{(x_{ac_h} - x_{cg})} \quad (2.73)$$

On observe que pour un avion conventionnel, ces inégalités valables sont :

$$(x_{ac_h} - x_{cg}) > 0 \quad M_{ac_{wf}} < 0 \quad L_{wf} > 0 \quad (2.74)$$

Par conséquent, les conclusions suivantes pour le « signe » de la portance d'empennage (la charge), peuvent être tirées, selon l'emplacement du centre de la gravité :

- 1er cas :  $x_{cg} > x_{ac_{wf}}$  (combinaison aile-fuselage instable) conduit à :  
 $L_h > 0$  ou  $L_h < 0$  La charge vers le haut ou vers le bas, dépend de grandeur négative de  $M_{ac_{wf}}$
- 2eme cas :  $x_{cg} = x_{ac_{wf}}$  (combinaison aile-fuselage neutre) conduit à :  $L_h < 0$  La charge vers le bas.
- 3eme cas :  $x_{cg} < x_{ac_{wf}}$  (combinaison aile-fuselage stable) conduit à :  $L_h < 0$  La charge vers le bas.

La charge d'empennage pour l'équilibre (Trim) sera généralement vers le bas, sauf si l'aile-fuselage lui-même est instable et en même temps satisfait :

$$|M_{ac_{wf}}| < L_{wf} (x_{cg} - x_{ac_{wf}})$$

#### 2.4.4.2 Le Trim de la configuration canard :

La figure 2-11 montre une combinaison aile-canard pour un avion canard. Le fuselage a été omis pour simplifier le calcul. L'effet de fuselage est exprimé en plaçant le vecteur de portance aile-fuselage dans le centre aérodynamique aile-fuselage. Ces hypothèses sont données :

$$C_{m_{ac_{wf}}} < 0 \text{ et } C_{m_{ac_c}} \approx 0 \tag{2.75}$$

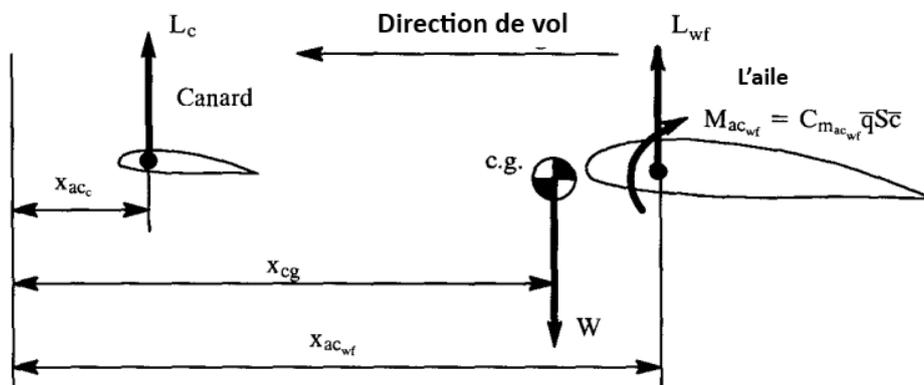


Figure 11: Configuration avion aile-canard

Pour le moment d'équilibre autour du centre de gravité, cette condition doit s'appliquer :

$$L_c(x_{cg} - x_{ac_c}) + M_{ac_{wf}} - L_{wf}(x_{ac_{wf}} - x_{cg}) = 0 \quad (2.76)$$

De cette équation, la charge de canard pour l'équilibre est :

$$L_c = \frac{L_{wf}(x_{ac_{wf}} - x_{cg}) - M_{ac_{wf}}}{(x_{cg} - x_{ac_c})} \quad (2.77)$$

On observe que pour un avion conventionnel ces inégalités sont valables :

$$(x_{cg} - x_{ac_c}) > 0 \quad M_{ac_{wf}} < 0 \quad L_{wf} > 0 \quad (2.78)$$

Par conséquent, les conclusions suivantes pour le « signe » de la portance de canard (la charge), peuvent être tirées, selon l'emplacement du centre de gravité :

- 1er cas :  $x_{cg} > x_{ac_{wf}}$  (combinaison aile-fuselage instable) conduit à :  
 $L_c > 0$  ou  $L_c < 0$  La charge vers le haut ou vers le bas, dépend de grandeur négative de  $M_{ac_{wf}}$ .
- 2eme cas :  $x_{cg} = x_{ac_{wf}}$  (combinaison aile-fuselage neutre) conduit à :  $L_c > 0$  La charge vers le haut.
- 3eme cas :  $x_{cg} < x_{ac_{wf}}$  (combinaison aile-fuselage stable) conduit à :  $L_c > 0$  La charge vers le haut.

La charge canard pour l'équilibre (Trim) sera généralement vers le haut, sauf si l'aile- fuselage lui-même est instable et satisfait :

$$|M_{ac_{wf}}| < L_{wf}(x_{cg} - x_{ac_{wf}})$$

#### 2.4.4.3 L'équilibre de configuration a trois surfaces :

La figure 2-12 montre une combinaison canard-aile-empennage pour un avion à trois surfaces. Le fuselage a été négligé pour la clarté. L'effet de fuselage est exprimé en plaçant le vecteur de portance aile-fuselage dans le centre aérodynamique aile-fuselage. Ces hypothèses sont données :

$$C_{m_{ac_{wf}}} < 0, C_{m_{ac_c}} \approx 0 \text{ et } C_{m_{ac_c}} \approx 0 \quad (2.79)$$

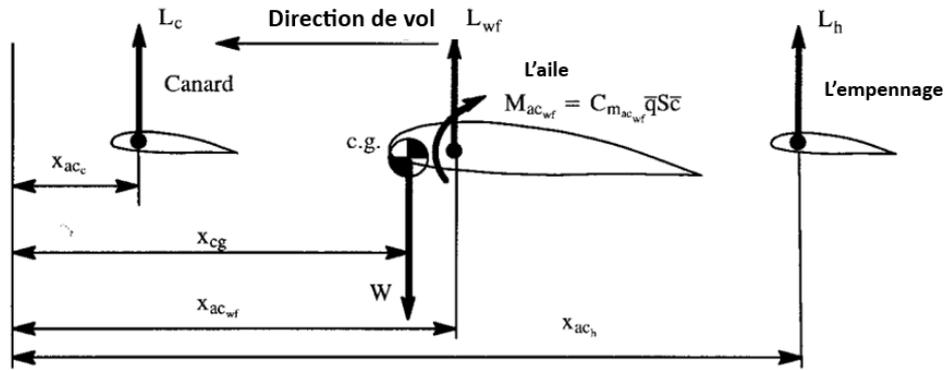


Figure 12: Configuration canard-aile-empennage pour un avion a trois surfaces

Pour le moment d'équilibre autour du centre de gravité, cette condition doit s'appliquer :

$$L_c(x_{cg} - x_{ac_c}) - L_{wf}(x_{ac_{wf}} - x_{cg}) + M_{ac_{wf}} - L_h(x_{ac_h} - x_{cg}) = 0 \quad (2.80)$$

Dans le cas d'avion à trois surfaces, ces inégalités sont satisfaites :

$$(x_{cg} - x_{ac_c}) > 0 \quad M_{ac_{wf}} < 0 \quad L_{wf} > 0 \quad (x_{ac_h} - x_{cg}) > 0 \quad (2.81)$$

En plus  $(x_{ac_{wf}} - x_{cg}) > 0$  est satisfaite dans le cas des avions à trois surfaces.

Nous avons deux charges d'équilibre, une des deux doit être sélectionnée. On resoude la charge d'équilibre de canard :

$$L_c = \frac{-M_{ac_{wf}} + L_{wf}(x_{ac_{wf}} - x_{cg}) + L_h(x_{ac_h} - x_{cg})}{(x_{cg} - x_{ac_c})} \quad (2.82)$$

D'après l'équation (2.82), on peut conclure que tant que  $L_h$  est positif (c.-à-d. vers le haut),  $L_c$  sera également positif (c.-à-d vers le haut).

### Conclusion :

La stabilité statique et les conditions de trim sont essentielles pour garantir un vol sûr et contrôlable. Une analyse des moments et des forces agissant sur l'aéronef dans les différentes conditions de son mouvement est nécessaire. Pour assurer la stabilité statique longitudinale, il faut contrôler la position du centre de gravité, le moment de l'empennage et les caractéristiques de l'aile. Pour la stabilité statique latérale-directionnelle, il faut prendre en

compte la surface de la dérive, le dièdre de l'aile et les commandes de vol. En respectant ces conditions, on garantit que l'avion peut maintenir son cap et son attitude sans intervention supplémentaire, assurant ainsi un vol stable et sécurisé.

**CHAPITRE 3**  
**STABILITE DYNAMIQUE POUR LES**  
**CONDITIONS DE TRIM**

## CHAPITRE 3 : Stabilité Dynamique Pour Les Conditions De Trim

### 3.1 Introduction :

Concernant la dynamique des aéronefs, la stabilité dynamique est un concept fondamental qui concerne la capacité d'un avion à revenir à un état d'équilibre après avoir été perturbé. L'analyse de la stabilité dynamique permet de comprendre comment un avion répond aux perturbations et comment ses mouvements se stabilisent ou divergent au cours du temps. Ce chapitre explore les principes de la stabilité dynamique longitudinale et latérale-directionnelle, ainsi que l'utilisation des fonctions de transfert pour modéliser la réponse de l'aéronef à diverses entrées. En utilisant la méthode de l'espace d'état, nous pouvons modéliser les systèmes complexes d'un avion en termes de ses variables d'état, facilitant ainsi la prédiction et l'optimisation de ses performances.

### 3.2 Définition de la stabilité dynamique :

La stabilité dynamique est définie comme la tendance des amplitudes du mouvement perturbé d'un avion à s'annuler ou à diminuer à des valeurs correspondant à un nouvel état stable à un certain moment après la disparition de la perturbation.

Par exemple, lorsqu'un avion est perturbé en tangage à partir d'une condition de vol en régime permanent et que le mouvement résultant est amorti après un certain temps, tandis que le nouvel état stable n'est pas significativement différent de l'état initial, l'avion est considéré comme étant dynamiquement stable.

On peut dire que la stabilité dynamique concerne le comportement du mouvement perturbé d'un avion par rapport à une trajectoire de vol en régime permanent.

### 3.3 La réponse d'un avion :

La réponse d'un avion est définie comme étant la variation au cours du temps des variables de mouvement par rapport à une condition de vol en régime permanent donnée, en raison d'une perturbation générée de manière externe ou interne.

#### 3.3.1 Fonctions de transfert de réponse de l'avion :

La fonction de transfert donne la relation entre la sortie et l'entrée d'un système. Dans le cas de la dynamique des aéronefs, elle spécifie la relation entre les variables de mouvement d'entrée et de sortie.

En utilisant la théorie de la transformée de Laplace, la fonction de transfert est définie comme le rapport de la transformée de Laplace de la sortie par rapport à l'entrée :

$$\left\{ T.F = \frac{\text{transformée de Laplace de la sortie}}{\text{transformée de Laplace de l'entrée}} \right\},$$

En prenant toutes les conditions initiales nulles (le système est supposé être initialement en équilibre). Ces relations sont indiquées dans la figure 3.1.

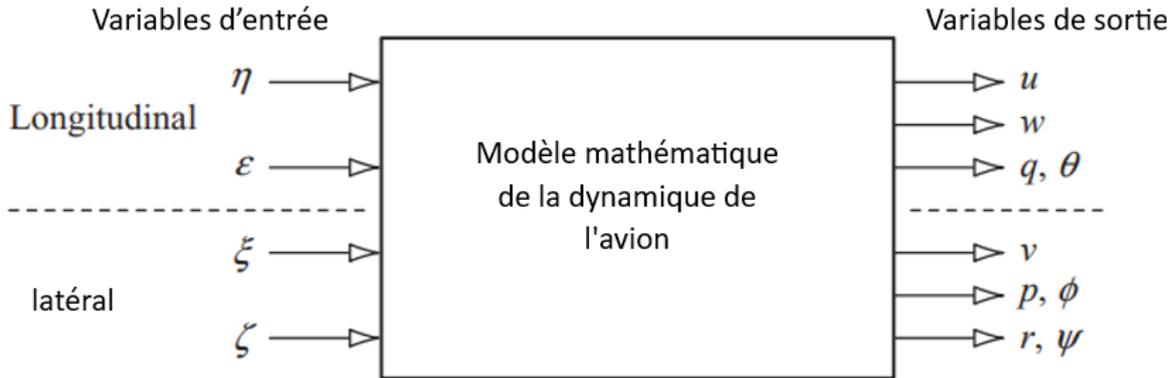


Figure 13: La fonction de transfert

### 3.4 Les fonctions de transfert de la stabilité dynamique

#### 3.4.1 Les équations longitudinales et les fonctions de transferts :

##### 3.4.1.1 Equation du mouvement simplifié dans les conditions du vol perturbé :

En utilisant la substitution des équations peuvent être exprimées en termes des variables (vitesse  $u$ , angle d'attaque  $\alpha$  et angle d'attitude en tangage  $\theta$ ). Et en utilisant les dérivées de stabilité dimensionnelles présentées dans le tableau (3.1), on peut simplifier et écrire les équations longitudinales comme suit :

$$\dot{u} = -g\theta \cos\theta_1 + X_u u + X_{T_u} u + X_\alpha \alpha + X_{\delta_e} \delta_e \quad (3.1)$$

$$U_1 \dot{\alpha} - U_1 \dot{\theta} = -g\theta \sin\theta_1 + Z_u u + Z_\alpha \alpha + Z_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + Z_q \dot{\theta} + Z_{\delta_e} \delta_e \quad (3.2)$$

$$\ddot{\theta} = M_u u + M_{T_u} u + M_\alpha \alpha + M_{T_\alpha} \alpha + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_q \dot{\theta} + M_{\delta_e} \delta_e \quad (3.3)$$

Avec :  $q = \dot{\theta}$  et  $w = U_1 \alpha$

Tableau 4: Dérivées de stabilité dimensionnelles longitudinales

$X_u = \frac{-\bar{q}_1 S (C_{D_u} + 2C_{D_1})}{mU_1}$	$\frac{\frac{ft}{sec^2}}{ft/sec}$	$M_u = \frac{\bar{q}_1 S \bar{c} (C_{m_u} + 2C_{m_1})}{I_{yy} U_1}$	$\frac{\frac{rad}{sec^2}}{ft/sec}$
$X_{T_u} = \frac{\bar{q}_1 S (C_{T_{x_u}} + 2C_{T_{x_1}})}{mU_1}$	$\frac{\frac{ft}{sec^2}}{ft/sec}$	$M_{T_u} = \frac{\bar{q}_1 S \bar{c} (C_{m_{T_u}} + 2C_{m_{T_1}})}{I_{yy} U_1}$	$\frac{\frac{rad}{sec^2}}{ft/sec}$
$X_\alpha = \frac{-\bar{q}_1 S (C_{D_\alpha} - C_{L_1})}{m}$	$\frac{\frac{ft}{sec^2}}{rad}$	$M_\alpha = \frac{\bar{q}_1 S \bar{c} C_{m_\alpha}}{I_{yy}}$	$\frac{\frac{rad}{sec^2}}{rad}$
$X_{\delta_e} = \frac{-\bar{q}_1 S C_{D_{\delta_e}}}{m}$	$\frac{\frac{ft}{sec^2}}{rad}$	$M_{T_\alpha} = \frac{\bar{q}_1 S \bar{c} C_{m_{T_\alpha}}}{I_{yy}}$	$\frac{\frac{rad}{sec^2}}{rad}$
$Z_u = \frac{-\bar{q}_1 S (C_{L_u} + 2C_{L_1})}{mU_1}$	$\frac{\frac{ft}{sec^2}}{ft/sec}$	$M_{\dot{\alpha}} = \frac{\bar{q}_1 S \bar{c}^2 C_{m_\alpha}}{2I_{yy} U_1}$	$\frac{\frac{rad}{sec^2}}{rad/sec}$
$Z_\alpha = \frac{-\bar{q}_1 S (C_{L_\alpha} + C_{D_1})}{m}$	$\frac{\frac{ft}{sec^2}}{rad}$	$M_q = \frac{\bar{q}_1 S \bar{c}^2 C_{m_q}}{2I_{yy} U_1}$	$\frac{\frac{rad}{sec^2}}{rad/sec}$
$Z_{\dot{\alpha}} = \frac{-\bar{q}_1 S \bar{c} C_{L_{\dot{\alpha}}}}{2mU_1}$	$\frac{\frac{ft}{sec^2}}{rad/sec}$	$M_{\delta_e} = \frac{\bar{q}_1 S \bar{c} C_{m_{\delta_e}}}{I_{yy}}$	$\frac{\frac{rad}{sec^2}}{rad}$
$Z_q = \frac{-\bar{q}_1 S \bar{c} C_{L_q}}{2mU_1}$	$\frac{\frac{ft}{sec^2}}{rad/sec}$		
$Z_{\delta_e} = \frac{-\bar{q}_1 S C_{L_{\delta_e}}}{m}$	$\frac{\frac{ft}{sec^2}}{rad}$		

### 3.4.1.2 Le transformé de Laplace pour des conditions initiales nulles :

Les équations de mouvement longitudinales avec le transformé de Laplace donne :

$$(s - X_u - X_{T_u})u(s) - X_\alpha \alpha(s) + g \cos\theta_1 \theta(s) = X_{\delta_e} \delta_e(s) \quad (3.4)$$

$$-Z_u u(s) + (s(U_1 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_{\alpha})\alpha(s) + (-(Z_q + U_1)s + g \sin \theta_1)\theta(s) = Z_{\delta_e} \delta_e(s) \quad (3.5)$$

$$-(M_u + M_{T_u})u(s) - (M_{\dot{\alpha}}s + M_{\alpha} + M_{T_{\alpha}})\alpha(s) + (s^2 - M_q s)\theta(s) = M_{\delta_e} \delta_e(s) \quad (3.6)$$

### 3.4.1.3 La forme matricielle et fonction de transfert :

$$\begin{bmatrix} (s - X_u - X_{T_u}) & -X_{\alpha} & g \cos \theta_1 \\ -Z_u & (s(U_1 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_{\alpha}) & (-(Z_q + U_1)s + g \sin \theta_1) \\ -(M_u + M_{T_u}) & -(M_{\dot{\alpha}}s + M_{\alpha} + M_{T_{\alpha}}) & (s^2 - M_q s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{u(s)}{\delta_e(s)} \\ \frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} \\ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Les rapports des variables  $u(s)$ ,  $\alpha(s)$ ,  $\theta(s)$  par rapport à  $\delta_e(s)$ , qui représente le transformé de Laplace liant l'entrée qui est la gouverne de profondeur aux variables de sortie sont dits les fonctions de transfert longitudinales de l'avion.

$$\begin{Bmatrix} \frac{u(s)}{\delta_e(s)} \\ \frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} \\ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{Matrice de fonction de transfert.}$$

La fonction de transfert vitesse-gouverne de profondeur peut être écrite comme le polynôme suivant :

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_u}{D_1} = \frac{A_u s^3 + B_u s^2 + C_u s + D_u}{A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1} \quad (3.8)$$

La fonction de transfert angle d'attaque-gouverne de profondeur peut être exprimée comme

suit :

$$\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_{\alpha}}{D_1} = \frac{A_{\alpha} s^3 + B_{\alpha} s^2 + C_{\alpha} s + D_{\alpha}}{A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1} \quad (3.9)$$

La fonction de transfert angle d'attitude-gouverne de profondeur peut être écrite comme suit :

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_{\theta}}{D_1} = \frac{A_{\theta} s^2 + B_{\theta} s + C_{\theta}}{A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1} \quad (3.10)$$

### 3.4.1.4 Fonctions de transfert longitudinales de l'avion :

L'application de la règle de Cramer pour les fonctions de transfert précédentes peut donner les solutions suivantes :

La fonction de transfert vitesse-gouverne de profondeur :

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\begin{vmatrix} X_{\delta_e} & -X_\alpha & g \cos \theta_1 \\ Z_{\delta_e} & (s(U_1 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_\alpha) & -(Z_q + U_1)s + g \sin \theta_1 \\ M_{\delta_e} & -(M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha + M_{T_\alpha}) & (s^2 - M_q s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s - X_u - X_{T_u}) & -X_\alpha & g \cos \theta_1 \\ -Z_u & (s(U_1 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_\alpha) & -(Z_q + U_1)s + g \sin \theta_1 \\ -(M_u + M_{T_u}) & -(M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha + M_{T_\alpha}) & (s^2 - M_q s) \end{vmatrix}} = \frac{N_u}{\bar{D}_1} \quad (3.11)$$

La fonction de transfert angle d'attaque-gouverne de profondeur :

$$\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\begin{vmatrix} (s - X_u - X_{T_u}) & X_{\delta_e} & g \cos \theta_1 \\ -Z_u & Z_{\delta_e} & -(Z_q + U_1)s + g \sin \theta_1 \\ -(M_u + M_{T_u}) & M_{\delta_e} & (s^2 - M_q s) \end{vmatrix}}{\bar{D}_1} = \frac{N_\alpha}{\bar{D}_1} \quad (3.12)$$

La fonction de transfert angle d'attitude-gouverne de profondeur :

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\begin{vmatrix} (s - X_u - X_{T_u}) & -X_\alpha & X_{\delta_e} \\ -Z_u & (s(U_1 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_\alpha) & Z_{\delta_e} \\ -(M_u + M_{T_u}) & -(M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha + M_{T_\alpha}) & M_{\delta_e} \end{vmatrix}}{\bar{D}_1} = \frac{N_\theta}{\bar{D}_1} \quad (3.13)$$

Toutes les fonctions de transfert ont un dénominateur commun, qui est appelé l'équation caractéristique longitudinale écrite  $\bar{D}_1(s)$  qui est donnée par :

$$\bar{D}_1(s) = A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1 \quad (3.14)$$

Avec :

$$A_1 = (U_1 - Z_{\dot{\alpha}})$$

$$B_1 = -(U_1 - Z_{\dot{\alpha}})(X_u + X_{T_u} + M_q) - Z_\alpha - M_{\dot{\alpha}}(Z_q + U_1)$$

$$C_1 = (X_u + X_{T_u})[M_q(U_1 - Z_{\dot{\alpha}}) + Z_\alpha + M_{\dot{\alpha}}(U_1 + Z_q)] + M_q Z_\alpha - Z_u X_\alpha + M_{\dot{\alpha}} g \sin \theta_1 - (M_\alpha + M_{T_\alpha})(U_1 + Z_q)$$

$$D_1 = g \sin\theta_1 [(M_\alpha + M_{T_\alpha}) - M_{\dot{\alpha}}(X_u + X_{T_u})] + g \cos\theta_1 [M_{\dot{\alpha}}Z_u + (M_u + M_{T_u})(U_1 - Z_{\dot{\alpha}})] - X_\alpha(M_u + M_{T_u})(Z_q + U_1) + Z_u X_\alpha M_q + (X_u + X_{T_u})[(M_\alpha + M_{T_\alpha})(Z_q + U_1) - M_q Z_\alpha]$$

$$E_1 = g \cos\theta_1 [Z_u(M_\alpha + M_{T_\alpha}) - Z_\alpha(M_u + M_{T_u})] + g \sin\theta_1 [(M_u + M_{T_u})X_\alpha - (X_u + X_{T_u})(M_\alpha + M_{T_\alpha})]$$

Pour évaluer la stabilité dynamique, on applique les critères de stabilité de Routh-Hurwitz.

### 3.4.1.5 Critère de Routh :

Les racines de l'équation caractéristique nous indiquent si le système est dynamiquement stable ou instable. Si toutes les racines de l'équation caractéristique sont négatives, ou bien, ont des parties réelles négatives, le système sera dynamiquement stable. Par contre, si une racine de l'équation caractéristique est positive, ou bien, a une partie réelle positive, le système sera instable. Le système est considéré comme marginalement stable si une ou plusieurs racines sont des nombres imaginaires purs. Le système marginalement stable représente la frontière entre un système dynamiquement stable et un système instable.

Grâce au critère de stabilité de Routh, on peut déterminer la stabilité absolue d'un système. Cette méthode permet de déterminer si l'une des racines de l'équation caractéristique a des parties réelles positives, sans la résolution du système d'équation. L'analyse de Routh-Hurwitz de la stabilité longitudinale :

- les racines de l'équation caractéristique (un polynôme de quatrième ordre) sont stables si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\bullet \quad A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 > 0 \quad (3.15.a)$$

$$\bullet \quad \Delta_1 = D_1(B_1 C_1 - A_1 D_1) - B_1^2 E_1 > 0 \quad (\text{Le discriminant de Routh}) \quad (3.15.b)$$

L'instabilité dynamique est généralement causée par :

$$\Delta_1 = D_1(B_1 C_1 - A_1 D_1) - B_1^2 E_1 < 0 \quad (3.16)$$

$$E_1 > 0 \quad (3.17)$$

Si  $E_1$  change de signe (de positif à négatif), une racine réelle change de signe de négatif à positif. La réponse dans le domaine temporelle donc correspond à une divergence.

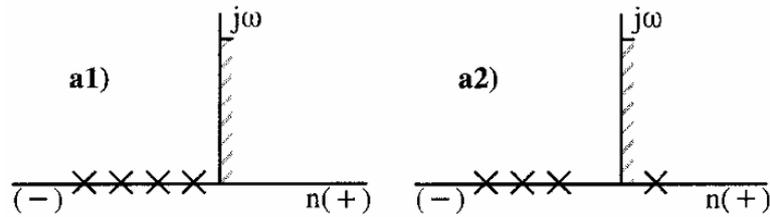


Figure 14: exemple de changement de racine

Si le discriminant de Routh change de signe de positif au négatif, la partie réelle d'une racine complexe passe de négative à positive. La réponse dans le domaine temporel sera donc une divergence oscillatoire.

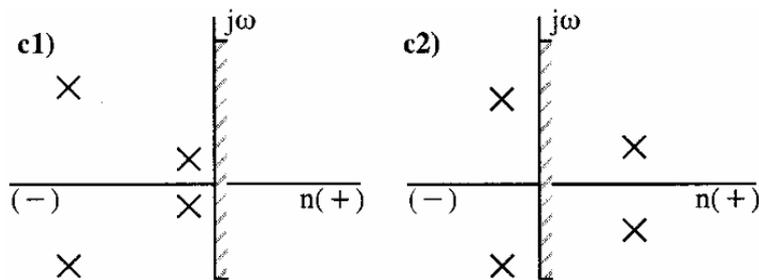


Figure 15: exemple de changement de partie réelle d'une racine

### 3.4.1.6 La relation entre la stabilité longitudinale dynamique et statique :

Selon le critère de stabilité, une racine réelle dans l'équation caractéristique longitudinale change de l'état stable à l'instable quand le coefficient  $E_1$  change de signe. Puisque l'assiette longitudinale de l'état de vol stabilisé est suffisamment petite pour négliger le sinus de cet angle ( $\sin\theta_1$ ), on peut approximer la condition de la stabilité comme suivant :

$$(M_\alpha + M_{T_\alpha})Z_u - Z_\alpha(M_u + M_{T_u}) > 0 \tag{3.18}$$

En négligeant la contribution de la poussé :

$$M_\alpha Z_u - Z_\alpha M_u > 0 \tag{3.19}$$

Divisée par  $Z_\alpha Z_u$  :

$$\frac{M_\alpha}{Z_\alpha} > \frac{M_u}{Z_u} \tag{3.20}$$

A l'aide des dérivées de stabilité dimensionnelles, on peut écrire :

$$\frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} + C_{D1}} > \frac{C_{m_u}}{C_{L_u} + 2C_{L1}} \quad (3.21)$$

On peut observer que les grandeurs typiques de la pente du coefficient de portance ( $C_{L\alpha}$ ), varient de 3 à 6 par radian, quand les grandeurs typiques du coefficient de trainée ( $C_{D1}$ ) de l'état de vol stabilisé varient de 0.0150 et 0.0500. Par conséquent, on peut réécrire l'inégalité comme suit :

$$\frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}} = (\bar{X}_{cg} - \bar{X}_{acA}) > \frac{C_{m_u}}{C_{L_u} + 2C_{L1}} \quad (3.22)$$

Dans le cas de nombre de Mach subsonique faible, la dérivée ( $C_{m_u}$ ) est négligeable, dans ce cas l'avion n'aura pas une racine réelle instable tant que :

$$\bar{X}_{cg} < \bar{X}_{acA} \quad (3.23.a)$$

Cette condition est appelée condition de stabilité statique de l'avion

Dans le cas de nombre de Mach subsonique élevé, la dérivée ( $C_{m_u}$ ) ne peut pas être négligeable à cause de déplacement du centre aérodynamique, dans ce cas cette condition sera :

$$\bar{X}_{cg} < \bar{X}_{acA} - 0.10 \quad (3.23.b)$$

### 3.4.2 Les modes de la stabilité longitudinale :

Pour un avion dynamiquement stable l'équation caractéristique à deux paires de racines complexes associer à des modes dynamiques spécifiques. Ces modes dynamiques sont : le mode courte période et le mode phugoïde.

On peut exprimer l'équation caractéristique comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{D}_1 &= A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1 \\ &= (s^2 + 2\zeta_{SP}\omega_{n_{SP}}s + \omega_{n_{SP}}^2)(s^2 + 2\zeta_{PH}\omega_{n_{PH}}s + \omega_{n_{PH}}^2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Avec :

$$\zeta_{SP} \gg \zeta_{PH} \quad \omega_{n_{SP}} \gg \omega_{n_{PH}}$$

### 3.4.2.1 Mode courte période :

Pour un avion stable, il est souvent acceptable d'assumer que le mode courte période a lieu à une vitesse approximativement constante. Dans ce cas la relation (3.7) peut être écrite comme :

$$\begin{bmatrix} \{s(U_1 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_{\alpha}\} & \{-(Z_q + U_1)s + g \sin \theta_1\} \\ -\{M_{\dot{\alpha}}s + M_{\alpha} + M_{T_{\alpha}}\} & (s^2 - M_q s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} \\ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

On peut réécrire cette relation en introduisant les approximations suivantes :

$Z_{\dot{\alpha}} \ll U_1, Z_q \ll U_1, \theta_1 \approx 0$  et  $M_{\alpha} \mapsto M_{\alpha} + M_{T_{\alpha}}$ . Pour cela l'équation (3.24) sera :

$$\begin{bmatrix} (sU_1 - Z_{\alpha}) & -U_1 s \\ -\{M_{\dot{\alpha}}s + M_{\alpha}\} & (s^2 - M_q s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} \\ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

La résolution des fonctions de transfert approximée est :

$$\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\{Z_{\delta_e}s + (M_{\delta_e}U_1 - M_q Z_{\delta_e})\}}{U_1 \{s^2 - (M_q + \frac{Z_{\alpha}}{U_1} + M_{\alpha})s + (\frac{Z_{\alpha}M_q}{U_1} - M_{\alpha})\}} \quad (3.27)$$

Et

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\{(U_1 M_{\delta_e} + Z_{\delta_e} M_{\dot{\alpha}})s + (M_{\alpha} Z_{\delta_e} - Z_{\alpha} M_{\delta_e})\}}{s U_1 \{s^2 - (M_q + \frac{Z_{\alpha}}{U_1} + M_{\alpha})s + (\frac{Z_{\alpha}M_q}{U_1} - M_{\alpha})\}} \quad (3.28)$$

Le dénominateur des équation (3.26) et (3.27) est en vrai l'approximation du polynôme de deuxième degré du mode courte période :

$$s^2 - \left(M_q + \frac{Z_{\alpha}}{U_1} + M_{\dot{\alpha}}\right)s + \left(\frac{Z_{\alpha}M_q}{U_1} - M_{\alpha}\right) = s^2 + 2\zeta_{SP}\omega_{n_{SP}}s + \omega_{n_{SP}}^2 = 0$$

Alors, on peut conclure que :

La fréquence naturelle non amortie

$$\omega_{n_{SP}} \approx \sqrt{\frac{Z_{\alpha}M_q}{U_1} - M_{\alpha}} \quad (3.29)$$

Le taux d'amortissement

$$\zeta_{SP} \approx \frac{-(M_q + \frac{Z_\alpha}{U_1} + M_\alpha)}{2\omega_{n_{SP}}} \quad (3.30)$$

On observe que :

$$\frac{Z_\alpha M_q}{U_1} \ll -M_\alpha$$

Alors :

$$\omega_{n_{SP}} \approx \sqrt{-M_\alpha} \cong \sqrt{-\frac{\bar{q}_1 S \bar{c} C_{m_\alpha}}{I_{yy}}} \quad (3.31)$$

### 3.4.2.2 Mode Phugoïde :

Dans la section précédente, on a vu la précision de l'approximation du mode courte période dans la résolution des caractéristiques dynamique de ce mode. Une approche similaire peut être introduite pour l'analyse du mode phugoïde.

Pour un avion stable, il est souvent acceptable d'assumer que le mode phugoïde a lieu à une angle d'attaque ( $\alpha$ ) approximativement constante. Dans ce cas l'équation (3.7) sera écrite :

$$\begin{bmatrix} s - X_u - X_{T_u} & g \cos \theta_1 \\ -Z_u & \{-(Z_q + U_1)s + g \sin \theta_1\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{u(s)}{\delta_e(s)} \\ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

En générale, il est acceptable d'introduire les approximations suivantes :

$$Z_q \ll U_1, \theta_1 \approx 0$$

De plus, en considérant la contribution de la poussée à la drivée dimensionnelle de la vitesse d'amortissement " $X_u$ " fait partie de l'effet de la vitesse d'amortissement totale de l'avion, et par la substitution  $X_u \mapsto X_u + X_{T_u}$ , il est possible d'écrire l'équation (3.30) comme :

$$\begin{bmatrix} s - X_u & g \\ -Z_u & -U_1 s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{u(s)}{\delta_e(s)} \\ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

La résolution des fonctions de transfert approximées est :

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{(X_{\delta_e} U_1 s + g Z_{\delta_e})}{U_1 (s^2 - X_u s - \frac{g Z_u}{U_1})} \quad (3.34)$$

Et

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{(Z_{\delta_e}s - X_u Z_{\delta_e} + g X_{\delta_e} Z_u)}{U_1(s^2 - X_u s - \frac{g Z_u}{U_1})} \quad (3.35)$$

Le dénominateur des équations (3.32) et (3.33) est en vrai l'approximation du polynôme de deuxième degré du mode phugoïde :

$$U_1 \left( s^2 - X_u s - \frac{g Z_u}{U_1} \right) = U_1 (s^2 + 2\zeta_{PH} \omega_{n_{PH}} s + \omega_{n_{PH}}^2)$$

Par conséquent :

$$\omega_{n_{PH}} = \sqrt{\frac{-g Z_u}{U_1}} \quad (3.36)$$

et

$$\zeta_{PH} = \frac{-X_u}{2\omega_{n_{PH}}} \quad (3.37)$$

En remplaçant  $Z_u$  avec sa définition du tableau (3.1) et en appliquant les conditions pour des vitesses subsonique faible, on peut simplifier l'équation (3.34).

Sachant que :

$$Z_u = \frac{-\bar{q}_1 s (C_{L_u} + 2C_{L_1})}{m U_1}$$

Et pour les vitesses subsoniques faibles, on a :

$$C_{L_u} \approx 0, C_{L_u} \ll 2C_{L_1} \text{ avec } C_{L_1} = \frac{mg}{\bar{q}_1 s}$$

On aura :

$$\omega_{n_{PH}} = \sqrt{\frac{g \frac{\bar{q}_1 s (C_{L_u} + 2C_{L_1})}{m U_1}}{U_1}} = \sqrt{\frac{g \bar{q}_1 s \left( \frac{2mg}{\bar{q}_1 s} \right)}{m U_1^2}} = \frac{g}{U_1} \sqrt{2}$$

Alors :

$$\omega_{n_{PH}} = \frac{g}{U_1} \sqrt{2} \quad (3.38)$$

L'équation (3.35) implique que la fréquence naturelle non amortie du mode phugoïde est indépendante de la conception de l'avion, elle dépend seulement de la vitesse du vol stabilisé " $U_1$ ".

D'après la substitution  $X_u + X_{T_u} \mapsto X_u$  et la définition de  $X_u$  et  $X_{T_u}$  du tableau (1), l'équation du taux d'amortissement (3.35) peut être écrite comme suit :

$$\zeta_{PH} = \frac{-(X_u + X_{T_u})}{2\omega_{n_{PH}}} \approx \frac{\sqrt{2}(C_{D_u} - C_{T_{x_u}})}{4C_{L_1}} \quad (3.39)$$

Pour le cas d'un avion propulsé par un réacteur à vitesse subsonique faible, l'équation (3.39) peut être simplifiée comme :

$$\zeta_{PH} \approx \frac{\sqrt{2}}{2(C_{L_1}/C_{D_1})} \quad (3.40)$$

Ce résultat indique que le taux d'amortissement du mode phugoïde est inversement proportionnel à la finesse de l'avion. Par conséquent, les avions avec une finesse importante peuvent avoir un faible amortissement dans le mode phugoïde, cela rend le control de la vitesse difficile. Cependant à une basse vitesse, avec le train d'atterrissage sorti et les volets déployés, la finesse diminue et par conséquent le taux d'amortissement est amélioré.

### 3.4.3 Les fonctions de transfert standards du mode longitudinal :

Pour  $s=0$ , toutes les composantes de fonction de transfert qui dépend de la variable de Laplace « s » prennent la valeur « 1 ». Chaque fonction de transfert à  $s=0$  prend la valeur donnée par le rapport du coefficient libre du numérateur sur le coefficient libre du dénominateur. Ces valeurs sont les gains à fréquence nulle de la fonction de transfert. Dans les fonctions de transfert du mode longitudinal ces gains sont trouvés comme :

$$K_{u_{\delta_e}} = \frac{D_u}{E_1} \quad K_{\alpha_{\delta_e}} = \frac{D_\alpha}{E_1} \quad K_{\theta_{\delta_e}} = \frac{D_\theta}{E_1} \quad (3.41)$$

#### 3.4.3.1 La forme standard générale des fonctions de transfert :

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{K_{u_{\delta_e}}(T_{u_1}s+1)(T_{u_2}s+1)}{\left(\frac{s^2}{\omega_{n_{SP}}^2} + \frac{2\zeta_{SP}s}{\omega_{n_{SP}}} + 1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_{n_{PH}}^2} + \frac{2\zeta_{PH}s}{\omega_{n_{SP}}} + 1\right)} \quad (3.42)$$

$$\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{K_{\alpha_{\delta_e}}(T_{\alpha_1}s+1)\left(\frac{s^2}{\omega_{n_\alpha}^2} + \frac{2\zeta_\alpha}{\omega_{n_\alpha}} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_{n_{SP}}^2} + \frac{2\zeta_{SP}s}{\omega_{n_{SP}}} + 1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_{n_{PH}}^2} + \frac{2\zeta_{PH}s}{\omega_{n_{SP}}} + 1\right)} \quad (3.43)$$

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{K_{\theta\delta_e}(T_{\theta_1}s+1)(T_{\theta_2}s+1)}{\left(\frac{s^2}{\omega_{n_{SP}}^2} + \frac{2\zeta_{SP}s}{\omega_{n_{SP}}} + 1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_{n_{PH}}^2} + \frac{2\zeta_{PH}s}{\omega_{n_{SP}}} + 1\right)} \quad (3.44)$$

### 3.4.3.2 Les formes du mode longitudinal :

Pour une valeur d'entrée de braquage de gouverne, la réponse de l'avion peut être constitué des variables suivantes : vitesse  $u(t)$ , angle d'attaque (d'incidence)  $\alpha(t)$  et l'assiette  $\theta(t)$ . La forme du mode longitudinal est décrite par deux quantités : la grandeur relative de l'amplitude de  $u$ ,  $\alpha$  et  $\theta$ , et le déphasage des angles de ces variables. L'analyse suivante montre comment la forme du mode peut être déterminée et comment peut être utilisée pour décider si l'approximation est acceptable ou pas.

On considère les équations de mouvement perturbé et on assume le terme de gouverne comme nul. Donc, ces équations expriment la dynamique du système non perturbé. Ces équations sont :

$$\begin{aligned} (s - X_u)u(s) & \quad -X_\alpha\alpha(s) & \quad + g\cos\theta_1\theta(s) & \quad = 0 \\ -Z_uu(s) & \quad + \{s(U_1 - Z_\dot{\alpha}) - Z_\alpha\}\alpha(s) & \quad + \{-(Z_q + U_1)s + g\sin\theta_1\}\theta(s) & \quad = 0 \\ -(M_u)u(s) & \quad - \{M_\dot{\alpha}s + M_\alpha\}\alpha(s) & \quad + (s^2 - M_qs)\theta(s) & \quad = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Une des variables des équations (3.45) est choisie comme référence par rapport à laquelle les autres variables sont comparées. On a choisi l'assiette « $\theta(s)$ » dans ce cas pour ce rôle. Les équations (3.45) sont maintenant écrites en termes des formes du mode  $\frac{u(s)}{\theta(s)}$  et  $\frac{\alpha(s)}{\theta(s)}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (s - X_u)\frac{u(s)}{\theta(s)} & \quad -X_\alpha\frac{\alpha(s)}{\theta(s)} & & \quad = -g\cos\theta_1 \\ -Z_u\frac{u(s)}{\theta(s)} & \quad \{s(U_1 - Z_\dot{\alpha}) - Z_\alpha\}\frac{\alpha(s)}{\theta(s)} & \quad = -\{-(Z_q + U_1)s + g\sin\theta_1\} & \quad (3.46) \\ -(M_u)\frac{u(s)}{\theta(s)} & \quad - \{M_\dot{\alpha}s + M_\alpha\}\frac{\alpha(s)}{\theta(s)} & & \quad = -(s^2 - M_qs) \end{aligned}$$

Pour résoudre les formes du mode deux des trois équations (3.46) peut être utilisé. On utilise la première et la troisième équation pour les résultats suivantes :

$$\frac{u(s)}{\theta(s)} = \frac{\begin{vmatrix} -g\cos\theta_1 & -X_\alpha \\ -(s^2 - M_q s) & -\{M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha\} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s - X_u) & -X_\alpha \\ -(M_u) & -\{M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha\} \end{vmatrix}} = \frac{a_1 s^2 + b_1 s + c_1}{a s^2 + b s + c} \quad (3.47)$$

$$\frac{\alpha(s)}{\theta(s)} = \frac{\begin{vmatrix} (s - X_u) & -g\cos\theta_1 \\ -(M_u) & -(s^2 - M_q s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s - X_u) & -X_\alpha \\ -(M_u) & -\{M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha\} \end{vmatrix}} = \frac{a_2 s^3 + b_2 s^2 + c_2 s + d_2}{a s^2 + b s + c} \quad (3.48)$$

Les coefficients polynomiaux dans les équations (3.47) et (3.48) sont :

$$\begin{aligned} a &= -M_{\dot{\alpha}} & b &= -M_\alpha + X_u M_{\dot{\alpha}} & c &= X_u M_\alpha - X_\alpha M_u \\ a_1 &= -X_\alpha & b_1 &= M_{\dot{\alpha}} g \cos\theta_1 + X_\alpha M_q & c_1 &= M_\alpha g \cos\theta_1 \\ a_2 &= -1 & b_2 &= M_q + X_u & c_2 &= -M_u M_q & d_2 &= -M_u g \cos\theta_1 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Les solutions des formes du mode sont des rapports polynomiaux. La variable « s » est généralement considéré comme un nombre complexe. Par conséquent chaque forme du mode est représentée par un rapport de deux nombres complexes qui donne un nombre complexe.

$$\frac{u(s)}{\theta(s)} \text{ ou } \frac{\alpha(s)}{\theta(s)} = \frac{n_{num} + j\omega_{num}}{n_{den} + j\omega_{den}} \quad (3.50)$$

L'amplitude de ce nombre complexe est donnée par :

$$amplitude = \sqrt{\frac{n_{num}^2 + \omega_{num}^2}{n_{den}^2 + \omega_{den}^2}} \quad (3.51)$$

L'angle de déphasage est :

$$\phi = \arctan \frac{\omega_{num}}{n_{num}} - \arctan \frac{\omega_{den}}{n_{den}} \quad (3.52)$$

D'après les équations (3.47) et (3.48) on peut trouver l'amplitude et la phase du mode courte période en remplaçant les valeurs de « s » par les racines de l'équation caractéristique du mode courte période. La même chose pour le mode phugoïde les formes du mode sont trouvées en remplaçant les valeurs de « s » par les racines de l'équation caractéristique de ce mode.

### 3.4.4 Les équations latérale-directionnelle et les fonctions de transfert :

Les équations de mouvement de la stabilité dynamique latérale-directionnelle sont :

$$m(\dot{v} + U_1 r) = mg\phi \cos\theta_1 + \bar{q}_1 S \left\{ C_{y_\beta} \beta + C_{y_p} \frac{pb}{2U_1} + C_{y_r} \frac{rb}{2U_1} + C_{y_{\delta_a}} \delta_a + C_{y_{\delta_r}} \delta_r \right\} \quad (3.53)$$

$$I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} = \bar{q}_1 S b \left\{ C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \frac{pb}{2U_1} + C_{l_r} \frac{rb}{2U_1} + C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \delta_r \right\} \quad (3.54)$$

$$I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} = \bar{q}_1 S b \left\{ C_{n_\beta} \beta + C_{n_{T_\beta}} \beta + C_{n_p} \frac{pb}{2U_1} + C_{n_r} \frac{rb}{2U_1} + C_{n_{\delta_a}} \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \delta_r \right\} \quad (3.55)$$

Avec les substitutions suivantes :  $p = \dot{\phi}$ ,  $r = \dot{\psi}$  et  $v = U_1 \beta$ , on peut écrire les équations de mouvement en fonction de : l'angle de dérapage «  $\beta$  », l'angle d'inclinaison «  $\phi$  » et l'angle de cap «  $\psi$  ».

L'équation (3.56) représente une transformation pour exprimer ( $I_{xx}$ ,  $I_{zz}$ ,  $I_{xz}$ ) dans le système des axes de stabilité.

$$\begin{pmatrix} I_{xx_s} \\ I_{zz_s} \\ I_{xz_s} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \sin^2 \alpha_1 & -\sin 2\alpha_1 \\ \sin^2 \alpha_1 & \cos^2 \alpha_1 & \sin 2\alpha_1 \\ \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 & \cos 2\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx_B} \\ I_{zz_B} \\ I_{xz_B} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Par rapport aux axes de stabilité, on écrit :

$$\begin{pmatrix} I_{xx_s} \\ I_{zz_s} \\ I_{xz_s} \end{pmatrix}$$

**Tableau 5: Dérivées dimensionnelles de la stabilité latérale-directionnelle**

$Y_\beta = \frac{\bar{q}_1 S C_{y_\beta}}{m}$	$\frac{ft/sec^2}{rad}$	$L_{\delta_r} = \frac{\bar{q}_1 S b C_{l_{\delta_r}}}{I_{xx}}$	$\frac{rad/sec^2}{rad}$
$Y_p = \frac{\bar{q}_1 S b C_{y_p}}{2mU_1}$	$\frac{ft/sec^2}{rad/sec}$	$N_\beta = \frac{\bar{q}_1 S b C_{n_\beta}}{I_{zz}}$	$\frac{rad/sec^2}{rad}$
$Y_r = \frac{\bar{q}_1 S b C_{y_r}}{2mU_1}$	$\frac{ft/sec^2}{rad/sec}$	$N_{T_\beta} = \frac{\bar{q}_1 S b C_{n_{T_\beta}}}{I_{zz}}$	$\frac{rad/sec^2}{rad}$
$Y_{\delta_a} = \frac{\bar{q}_1 S C_{y_{\delta_a}}}{m}$	$\frac{ft/sec^2}{rad}$	$N_p = \frac{\bar{q}_1 S b^2 C_{n_p}}{2I_{zz} U_1}$	$\frac{rad/sec^2}{rad/sec}$

$Y_{\delta_r} = \frac{\bar{q}_1 S C_{y_{\delta_r}}}{m}$	$\frac{ft/sec^2}{rad}$	$N_r = \frac{\bar{q}_1 S b^2 C_{n_r}}{2 I_{zz} U_1}$	$\frac{rad/sec^2}{rad/sec}$
$L_\beta = \frac{\bar{q}_1 S b C_{l_\beta}}{I_{xx}}$	$\frac{rad/sec^2}{rad}$	$N_{\delta_a} = \frac{\bar{q}_1 S b C_{n_{\delta_a}}}{I_{zz}}$	$\frac{rad/sec^2}{rad}$
$L_p = \frac{\bar{q}_1 S b^2 C_{l_p}}{2 I_{xx} U_1}$	$\frac{rad/sec^2}{rad/sec}$	$N_{\delta_r} = \frac{\bar{q}_1 S b C_{n_{\delta_r}}}{I_{zz}}$	$\frac{rad/sec^2}{rad}$
$L_r = \frac{\bar{q}_1 S b^2 C_{l_r}}{2 I_{xx} U_1}$	$\frac{rad/sec^2}{rad/sec}$		
$L_{\delta_a} = \frac{\bar{q}_1 S b C_{l_{\delta_a}}}{I_{xx}}$	$\frac{rad/sec^2}{rad}$		

### 3.4.4.1 Le développement des équations de mouvement du mode latérale directionnel en cas de perturbation avec les dérivés dimensionnelles de stabilité :

$$U_1 \beta + U_1 \psi = g \phi \cos \theta_1 + Y_\beta \beta + Y_p \dot{\phi} + Y_r \dot{\psi} + Y_{\delta_a} \delta_a + Y_{\delta_r} \delta_r \quad (3.57.a)$$

$$\ddot{\phi} - \bar{A}_1 \ddot{\psi} = L_\beta \beta + L_p \dot{\phi} + L_r \dot{\psi} + L_{\delta_a} \delta_a + L_{\delta_r} \delta_r \quad (3.57.b)$$

$$\ddot{\psi} - \bar{B}_1 \ddot{\phi} = N_\beta \beta + N_{T_\beta} \dot{\beta} + N_p \dot{\phi} + N_r \dot{\psi} + N_{\delta_a} \delta_a + N_{\delta_r} \delta_r \quad (3.57.c)$$

On note :  $\bar{A}_1 = \frac{I_{xz}}{I_{xx}}$  et  $\bar{B}_1 = \frac{I_{xz}}{I_{zz}}$ .

### 3.4.4.2 La transformée de Laplace et la fonction de transfert :

La transformée de Laplace des équations (3.57) :

$$(sU_1 - Y_\beta)\beta(s) - (sY_p + g \cos \theta_1)\phi(s) + s(U_1 - Y_r)\psi(s) = Y_\delta \delta(s) \quad (3.58.a)$$

$$-L_\beta \beta(s) + s(s - L_p)\phi(s) - s(s\bar{A}_1 + L_r)\psi(s) = L_\delta \delta(s) \quad (3.58.b)$$

$$-(N_\beta + N_{T_\beta})\beta(s) - s(s\bar{B}_1 + N_p)\phi(s) + s(s - N_r)\psi(s) = N_\delta \delta(s) \quad (3.58.c)$$

La forme matricielle et la fonction de transfert du système d'équation (3.58) :

$$\begin{bmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & -(sY_p + g \cos \theta_1) & s(U_1 - Y_r) \\ -L_\beta & s(s - L_p) & -s(s\bar{A}_1 + L_r) \\ -N_\beta - N_{T\beta} & -s(s\bar{B}_1 + N_p) & s(s - N_r) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta(s)}{\delta(s)} \\ \frac{\phi(s)}{\delta(s)} \\ \frac{\psi(s)}{\delta(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_\delta \\ L_\delta \\ N_\delta \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

### 3.4.4.3 Les fonctions de transfert du mode Latéral directionnel :

Fonction de transfert de l'angle de dérapage par rapport aux ailerons :

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)} = \frac{\begin{vmatrix} Y_\delta & -(sY_p + g \cos \theta_1) & s(U_1 - Y_r) \\ L_\delta & s(s - L_p) & -s(s\bar{A}_1 + L_r) \\ N_\delta & -s(s\bar{B}_1 + N_p) & s(s - N_r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & -(sY_p + g \cos \theta_1) & s(U_1 - Y_r) \\ -L_\beta & s(s - L_p) & -s(s\bar{A}_1 + L_r) \\ -N_\beta - N_{T\beta} & -s(s\bar{B}_1 + N_p) & s(s - N_r) \end{vmatrix}} = \frac{Num_{\beta}(s)}{\bar{D}_2(s)} \quad (3.60)$$

Fonction de transfert de l'angle d'inclinaison par rapport aux ailerons :

$$\frac{\phi(s)}{\delta(s)} = \frac{\begin{vmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & Y_\delta & s(U_1 - Y_r) \\ -L_\beta & L_\delta & -s(s\bar{A}_1 + L_r) \\ -(N_\beta + N_{T\beta}) & N_\delta & s(s - N_r) \end{vmatrix}}{\bar{D}_2(s)} = \frac{Num_{\phi}(s)}{\bar{D}_2(s)} \quad (3.61)$$

Fonction de transfert du cap par rapport aux ailerons :

$$\frac{\psi(s)}{\delta(s)} = \frac{\begin{vmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & -(sY_p + g \cos \theta_1) & Y_\delta \\ -L_\beta & s(s - L_p) & L_\delta \\ -(N_\beta + N_{T\beta}) & -s(s\bar{B}_1 + N_p) & N_\delta \end{vmatrix}}{\bar{D}_2(s)} = \frac{Num_{\psi}(s)}{\bar{D}_2(s)} \quad (3.62)$$

$\bar{D}_2(s)$  est l'équation caractéristique exprimée par :

$$\bar{D}_2(s) = s(A_2s^4 + B_2s^3 + C_2s^2 + D_2s + E_2) \quad (3.63)$$

La figure (3.3) si dessus est un schéma bloc qui montre la relation entre l'entrée, la fonction de transfert et la sortie d'un système. Cette figure montre comment la fonction de transfert en boucle ouverte est utilisé pour déterminer la réponse d'un aéronef a une commande.

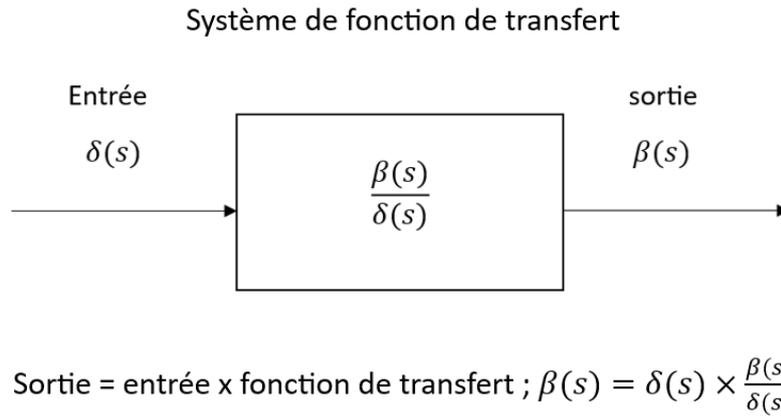


Figure 16: Relation entre l'entrée, fonction de transfert et la sortie d'un système

#### 3.4.4.4 Les racines de l'équation caractéristique latérale-directionnelle et leur relation avec la stabilité dynamique :

L'étude de la stabilité dynamique dépend entièrement des racines de l'équation caractéristique latérale directionnelle (3.63). Cette équation caractéristique à quatre racines, elles peuvent

être :

1. Toutes les racines sont réelles
2. Deux racines sont réelles et deux sont des conjuguées complexes
3. Toutes les racines sont complexes

Il est possible de déterminer le comportement de la stabilité de l'avion sans calculer les racines de l'équation caractéristique par l'utilisation du critère de stabilité de Routh.

Selon Routh Hurwitz les racines d'un polynôme de quatrième ordre sont stables si seulement si :

$$A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 > 0 \quad (3.64.a)$$

Le discriminant de ROUTH est :

$$D_2(B_2C_2 - A_2D_2) - B_2^2E_2 > 0 \quad (3.64.b)$$

Si  $E_2$  change de  $>0$  au  $<0$ , une racine réelle change de signe de négatif à positif. La réponse dans le domaine temporelle donc correspond à une divergence.

Si le discriminant de Routh change de signe de positif au négatif, la partie réelle d'une racine complexe passe de négative à positive. La réponse dans le domaine temporel sera une divergence oscillatoire.

### 3.4.5 Les modes dynamiques latéraux-directionnels :

En général, les racines de l'équation caractéristique dans le cas latéral-directionnel sont composées de deux racines réelles et deux racines complexes. La réponse de l'aéronef peut être caractérisée par les mouvements suivants :

- Un mouvement lentement convergent ou divergent : mode spiral
- Un mouvement fortement convergent : mode de roulis
- Un mouvement oscillatoire faiblement amorti : mode de roulis hollandais

#### 3.4.5.1 Approximation du mode spiral :

Le mode spiral est l'évolution dans le temps de l'angle de roulis de l'avion après que les commandes (ailerons) soient retournées à la position neutre, on désire que la stabilité du mode spiral soit neutre ou légèrement stable. Cependant, une spirale légèrement instable est possible sur les avions de hautes performances.

Le mode spiral est caractérisé par les changements dans les angles «  $\phi$  » et «  $\psi$  ». L'angle de dérapage «  $\beta$  » est généralement très petit, mais il ne peut pas être négligé car les moments aérodynamiques dépendent de cet angle, le taux de lacet «  $\dot{\psi}$  » et le taux de roulis «  $\dot{\phi}$  ».

Les moments aérodynamiques causés par  $\beta$  et  $\dot{\psi}$  sont généralement les plus importants. Donc pour obtenir l'approximation spirale, on néglige l'équation de la force latérale et les termes du taux de roulis dans les équations de moment de roulis et lacet.

$$\begin{bmatrix} -L_\beta & -s(s\bar{A}_1 + L_r) \\ -N_\beta & (s^2 - sN_r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\beta(s)}{\delta(s)} \\ \frac{\psi(s)}{\delta(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_\delta \\ N_\delta \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

L'approximation des fonctions de transfert sont écrites comme suivant :

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)} = \frac{s\{s(L_\delta - N_\delta \bar{A}_1) - (L_\delta N_r - N_\delta L_r)\}}{s\{-s(L_\beta + N_\beta \bar{A}_1) + (L_\beta N_r - N_\beta L_r)\}} \quad (3.66)$$

et

$$\frac{\psi(s)}{\delta(s)} = \frac{(-L_\beta N_\delta + L_\delta N_\beta)}{s\{-s(L_\beta + N_\beta \bar{A}_1) + (L_\beta N_r - N_\beta L_r)\}} \quad (3.67)$$

Les termes de « s » dans la fonction de transfert de dérapage s'annulent entre eux. La racine  $s=0$  dans la fonction de transfert de cap indique la stabilité neutre.

La racine spirale approximative peut être déterminée comme :

$$s_3 = s_{spiral} = \frac{(L_\beta N_r - N_\beta L_r)}{(L_\beta + N_\beta \bar{A}_1)} \quad (3.68)$$

Pour la plupart des avions, on suppose que le rapport d'inertie  $\bar{A}_1$  est très petit, alors c'est négliger. Ce qui donne :

$$s_{spiral} = \frac{(L_\beta N_r - N_\beta L_r)}{L_\beta} \quad (3.69)$$

Lorsque  $L_\beta$  est inférieur à zéro, cette racine négative (stable) puisque :

$$L_\beta N_r - N_\beta L_r > 0 \quad (3.70)$$

### 3.4.5.2 Approximation du mode de roulis :

Le mouvement de roulis est caractérisé seulement par l'angle  $\phi$  négligeant tous les autres variables. Le mode de roulis suite au braquage asymétrique des ailerons ; l'équation de mouvement devient :

$$\frac{\phi(s)}{\delta_a(s)} = \frac{L\delta_a}{(s^2 - sL_p)} \quad (3.71)$$

L'équation caractéristique de l'approximation de roulis présente deux racines :

$$s_3 = 0 \quad \text{et} \quad s_4 = s_{roll} \approx L_p$$

Donc :

$$T_r = -1/L_p, \quad T_r \text{ est la constante de temps de roulis.}$$

La première racine indique qu'il existe une instabilité selon l'angle de roulis, alors que la deuxième racine est toujours négative puisque  $L_p < 0$ .

L'équation qui dérive la réponse de l'avion en fonction du temps est obtenue en utilisant la transformée inverse de Laplace ce qui donne :

$$\phi(t) = - \left\{ \frac{L\delta_a \delta_a}{L_p} \right\} t + \left\{ \frac{L\delta_a \delta_a}{L_p^2} \right\} (e^{L_p t} - 1) \quad (3.72)$$

Le taux de roulis est obtenu en dérivant l'équation (3.72) :

$$\dot{\phi}(t) = - \left\{ \frac{L\delta_a \delta_a}{L_p} \right\} (1 - e^{L_p t}) \quad (3.73)$$

De cette équation (3.73) on trouve que le taux de roulis maximum en régime permanent (Steady State) est donné par :

$$\{\phi\}_{ss} = - \left\{ \frac{L\delta_a \delta_a}{L_p} \right\} \quad (3.74)$$

En remplaçant dans l'équation (3.73),  $t = T_r = \frac{-1}{L_p}$

on trouve :

$$\dot{\phi} \left( t = \frac{-1}{L_p} \right) = - \left\{ \frac{L\delta_a \delta_a}{L_p} \right\} (1 - e^{-1}) = \dot{\phi}_{ss} \left( 1 - \frac{1}{e} \right) = 0.63 \dot{\phi}_{ss} \quad (3.75)$$

Lorsque le temps tend vers l'infini :

$$\dot{\phi}(t = \infty) = - \left\{ \frac{L\delta_a \delta_a}{L_p} \right\} \quad (3.76)$$

Ce qui représente le taux de roulis en état de vol stabilisé.

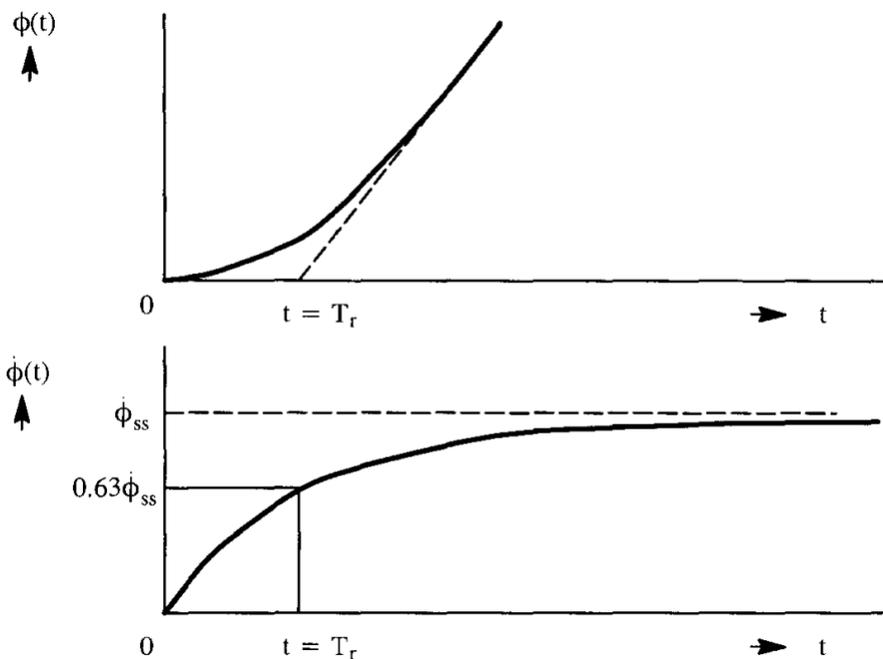


Figure 17: Evolution du mode de roulis en fonction de temps

### 3.4.5.3 Approximation du mode de roulis hollandais :

Le roulis hollandais est un mouvement transversal oscillatoire faiblement amortie avec une courte période à basse vitesse affectant un couplage lacet-roulis et le dérapage. Pour des avions avec un effet dièdre faible, le mode consiste principalement en dérapage et en lacet. En éliminant les mouvements de roulis les équations de mouvement simplifiées sont données par :

$$\begin{bmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & s(U_1 - Y_r) \\ -N_\beta & (s^2 - sN_r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\beta(s)}{\delta(s)} \\ \frac{\psi(s)}{\delta(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_\delta \\ N_\delta \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

L'approximation des fonctions de transfert de dérapage et de cap sont écrites comme :

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)} = \frac{\{Y_\delta s + (N_\delta Y_r - N_\delta U_1 - Y_\delta N_r)\}}{\left[ s^2 - s \left( N_r + \frac{Y_\beta}{U_1} \right) + \left\{ N_\beta + \frac{1}{U_1} (Y_\beta N_r - N_\beta Y_r) \right\} \right]} \quad (3.78)$$

et

$$\frac{\psi(s)}{\delta(s)} = \frac{\{N_\delta (sU_1 - Y_\beta) + N_\beta Y_\delta\}}{s \left[ s^2 - s \left( N_r + \frac{Y_\beta}{U_1} \right) + \left\{ N_\beta + \frac{1}{U_1} (Y_\beta N_r - N_\beta Y_r) \right\} \right]} \quad (3.79)$$

La racine  $s=0$  du dénominateur de la fonction de transfert de l'angle de cap indique que l'avion a une stabilité neutre en cap. L'équation quadratique du dénominateur est une approximation de la forme :

$$\bar{D}_2 = s(A_2 s^4 + B_2 s^3 + C_2 s^2 + D_2 s + E_2) = s(s^2 + 2\zeta_{DR} \omega_{n_{DR}} s + \omega_{n_{DR}}^2)(s + \lambda_R)(s + \lambda_S) \quad (3.80)$$

Il est possible d'écrire l'approximation suivante pour la fréquence naturelle non amortie et le coefficient d'amortissement du mode roulis hollandais :

$$\omega_{n_d} \approx \sqrt{\left\{ N_\beta + \frac{1}{U_1} (Y_\beta N_r - N_\beta Y_r) \right\}} \quad (3.81)$$

$$\zeta_d \approx \frac{-(N_r + \frac{Y_\beta}{U_1})}{2\omega_{n_d}} \quad (3.82)$$

La plupart des avions de transport modernes présentant des ailes en flèche ont des valeurs très grandes concernant la dérivée du coefficient de moment de roulis  $C_{l_\beta}$  ainsi que le moment d'inertie  $I_{xz}$ . Ces restrictions rendent l'approximation de roulis hollandais très loin de la réalité.

### 3.5 La méthode d'espace d'état :

Dans l'ingénierie de contrôle, l'espace d'état représente un modèle mathématique d'un système physique sous forme d'un ensemble de variables d'entrées, de sorties et des variables d'état reliées par des équations différentiels de premier ordre. L'espace d'état est l'espace dont ces axes sont des variables d'état. L'analyse en espace d'état d'un système de contrôle est basée sur la théorie moderne qui est appliqué sur tout type de système de contrôle : le système SISO (single input single output), le système MIMO (multiple inputs multiple outputs), les systèmes linéaires et non-linéaire, ainsi que les systèmes à temps variable et à temps invariant.

#### 3.5.1 La matrice de la fonction de transfert

En général les équations d'état d'un système dynamique linéaire sont écrits :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.83)$$

$x(t)$  : le vecteur d'état.

$u(t)$  : le vecteur d'entrée.

$A$  : la matrice d'état ( $n \times n$ ).

$B$  : la matrice d'entrée ( $n \times m$ ).

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.84)$$

$y(t)$  : le vecteur de sortie.

$C$  : la matrice de sortie ( $r \times n$ ).

$D$  : la matrice direct ( $r \times m$ ).

Puisque  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices à coefficients constants, la transformée de Laplace des équations (3.83) et (3.84) avec des conditions initiales nulles est :

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \quad (3.85.a)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s) \quad (3.85.b)$$

L'équation d'état peut être écrite comme :

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \quad (3.86)$$

«  $I$  » : est la matrice d'identité.

En éliminant le vecteur d'état  $x(s)$ , en combinant l'équation de sortie est l'équation d'état (3.86), le vecteur de sortie  $y(s)$  est donné par :

$$y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s) = G(s)u(s) \quad (3.87)$$

$G(s)$  : la matrice de la fonction de transfert.

$$G(s) = \frac{1}{\Delta(s)} N(s) \quad (3.88)$$

$N(s)$  : matrice polynomiale dont ses éléments sont tous les numérateurs de la fonction de transfert de la réponse.

$\Delta(s)$  : polynôme caractéristique.

Ainsi l'application de la méthode d'espace d'état à la solution des équations de mouvement d'un aéronef permet d'obtenir toutes les fonctions de transfert de réponse en un calcul.

Pour la résolution des équations de mouvement, il est nécessaire que  $y(s) = x(s)$ , dans ce cas l'équation (3.87) peut être simplifier car  $C=I$  et  $D=0$ .

$$G(s) = (sI - A)^{-1}B = \frac{Adj(sI-A)B}{|sI-A|} \quad (3.89)$$

### 3.5.1.1 La matrice de la fonction de transfert longitudinale :

La matrice de la fonction de transfert longitudinale est donnée par :

$$G(s) = \begin{bmatrix} s - x_u & -x_w & -x_q & -x_\theta \\ -z_u & s - z_w & -z_q & -z_\theta \\ -m_u & -m_w & s - m_q & -m_\theta \\ 0 & 0 & -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_\eta & x_\tau \\ z_\eta & z_\tau \\ m_\eta & m_\tau \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$G(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} N_\eta^u(s) & N_\tau^u(s) \\ N_\eta^w(s) & N_\tau^w(s) \\ N_\eta^q(s) & N_\tau^q(s) \\ N_\eta^\theta(s) & N_\tau^\theta(s) \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Dans ce cas, le numérateur et le dénominateur sont écrits en termes de dérivées concises.

### 3.5.1.2 La matrice de la fonction de transfert latérale-directionnelle :

La matrice de la fonction de transfert est :

$$G(s) = \begin{bmatrix} s-y_v & -y_p & -y_r & -y_\phi & -y_\psi \\ -l_v & s-l_p & -l_r & -l_\phi & -l_\psi \\ -n_v & -n_p & s-n_r & -n_\phi & -n_\psi \\ 0 & -1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_\xi & y_\zeta \\ l_\xi & l_\zeta \\ n_\xi & n_\zeta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

$$G(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} N_\xi^v(s) & N_\zeta^v(s) \\ N_\xi^p(s) & N_\zeta^p(s) \\ N_\xi^r(s) & N_\zeta^r(s) \\ N_\xi^\phi(s) & N_\zeta^\phi(s) \\ N_\xi^\psi(s) & N_\zeta^\psi(s) \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

### 3.5.2 Réponse en termes de description d'état :

La transformée de Laplace des équations d'état (3.85.a) et (3.85.b) est généralement écrite comme suit (sans conditions initiales nulles) :

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s) \quad (3.94)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s) \quad (3.95)$$

D'où l'équation d'état peut être écrite comme :

$$x(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s) \quad (3.96)$$

Ou

$$x(s) = \Phi(s)x(0) + \phi(s)Bu(s) \quad (3.97)$$

$\Phi(s)$  appelé le résolvant de la matrice A. L'expression générale du vecteur d'état  $x(t)$  est déterminé en trouvant l'inverse de la transformée de Laplace de l'équation (3.97) :

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (3.98)$$

La matrice de transition  $\Phi(t - t_0)$  est définie par :

$$\Phi(t - t_0) = L^{-1}\{[sI - A]^{-1}\} = e^{A(t-t_0)} \quad (3.99)$$

Cette matrice permet la transition de la réponse d'état  $x(t)$  de  $t_0$  à  $t$ .

La matrice de transition a les propriétés suivantes :

$$\Phi(0) = e_{t=0}^{At} = I \quad (3.100.a)$$

$$\Phi(\infty) = e_{t=\infty}^{At} = 0 \quad (3.100.b)$$

$$\Phi(t + \tau) = \Phi(t)\Phi(\tau) = e^{At}e^{A\tau} \quad (3.100.c)$$

$$\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)} \quad (3.100.d)$$

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) = e^{-At} \quad (3.100.e)$$

Pour les applications aéronautiques on mesure le temps de  $t_0 = 0$ , donc l'équation (3.98) sera écrite :

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (3.101)$$

Le vecteur de sortie de la réponse  $y(t)$  est déterminé par :

$$\begin{aligned} y(s) &= Cx(s) + Du(s) \\ &= Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{aligned} \quad (3.102)$$

### 3.5.2.1 Les valeurs propres et les vecteurs propres :

L'équation caractéristique est donnée par l'égalité du polynôme caractéristique à zéro :

$$\Delta(s) = |sI - A| = 0 \quad (3.103)$$

Les racines «  $\lambda_i$  », sont les valeurs propres de la matrice d'état  $A$ . la relation entre la valeur propre et le vecteur propre «  $v_i$  » est :

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad (3.104)$$

Ainsi

$$[\lambda_i I - A]v_i = 0 \quad (3.105)$$

Puisque  $v_i \neq 0$  alors  $[\lambda_i I - A]$  est singulier. Les vecteurs propres sont toujours linéairement indépendants à condition que les valeurs propres soient distinctes. Quand une valeur propre est complexe son vecteur propre correspondant est complexe et le conjugué complexe  $\lambda_i^*$  correspond au conjugué complexe  $v_i^*$ .

La matrice des vecteurs propres est définie par :

$$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m] \quad (3.106)$$

De l'équation (3.104), on trouve :

$$AV = V \begin{bmatrix} & & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_m \end{bmatrix} \equiv V\Lambda \quad (3.107)$$

$\Lambda$  : la matrice diagonale des valeurs propres.

$$V^{-1}AV = \Lambda \quad (3.108)$$

Les vecteurs propres peuvent être déterminés comme :

$$[\lambda_i I - A]^{-1} = \frac{Adj[\lambda_i I - A]}{|\lambda_i I - A|} \quad (3.109)$$

Et puisque pour toute valeur propre  $\lambda_i$ ,  $|\lambda_i I - A| = 0$ , l'équation (3.109) peut être réécrite comme suit :

$$[\lambda_i I - A]Adj[\lambda_i I - A] = |\lambda_i I - A|I = 0 \quad (3.110)$$

Le vecteur propre correspondant est :

$$v_i = Adj[\lambda_i I - A] \quad (3.111)$$

### Conclusion :

L'étude de la stabilité dynamique, à travers des équations linéarisées et l'analyse des fonctions de transfert, permet une compréhension approfondie du comportement d'un aéronef face aux perturbations. Les modes dynamiques comme le mode courte période et le mode phugoïde jouent un rôle crucial dans cette analyse. Grâce à la modélisation par l'espace d'état, il est possible de représenter la dynamique d'un avion de manière compacte et de simplifier l'analyse de la stabilité à long terme. En appliquant ces concepts, les ingénieurs peuvent concevoir des systèmes de contrôle robustes qui garantissent la stabilité et la sécurité des aéronefs dans diverses conditions de vol.

# **CHAPITRE 4**

## **RESULTATS ET INTERPRETATIO**

### 3.5.3 CHAPITRE 4 : Résultats Et Interprétations

#### 4.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous analysons la stabilité statique et dynamique de l'avion SIAI Marchetti S211 sous les conditions d'équilibres. Tout d'abord, on exécute les programmes réalisés sous le logiciel MATLAB. Ensuite, les résultats obtenus sont tracés sous forme de courbes pour déterminer les caractéristiques statique (les critères de la stabilité statique, marge de stabilité statique) et dynamique (les modes courte période et phugoïde) dans le cas de la stabilité longitudinale et (les modes spiral, roulis, roulis hollandais) dans le cas de la stabilité latéral-directionnel de l'avion choisi.

#### 4.2 Marchetti S211 :

Le SIAI-Marchetti S211 est un avion d'entraînement militaire conçu par SIAI-Marchetti en Italie. Il a effectué son premier vol en avril 1981 et est entré en production en 1984.

Cet avion est propulsé par un moteur turbofan Pratt & Whitney JT15D-4D de 2 500 lbs de poussée, le Marchetti S211 atteint une vitesse maximale de 414 N et un taux de montée de 4,199 fps. Il est équipé d'un train d'atterrissage rétractable, de freins aérodynamiques, d'ailerons assistés et d'un système électrique alimenté par un générateur entraîné par le moteur.

#### Les paramètres géométriques :

La surface de l'aile « S »	136 ft <sup>2</sup>
La corde moyenne « $\bar{c}$ »	5.4 ft
L'envergure « b »	26.3 ft

#### Les conditions de vol :

Altitude « h »	35000 ft
Nombre de Mach	0.60
Vitesse « $V_{p1}$ »	584 ft/sec
Pression dynamique « $\bar{q}$ »	125.7 lbs/ft <sup>2</sup>
Location du CG « $\bar{x}_{CG}$ »	0.25 %MAC

---

Angle d'attaque « $\alpha$ »	0.9
------------------------------	-----

---

**Mass et moments d'inertie :**

---

Masse	4000 lbs
$I_{xx}$	800 slug ft <sup>2</sup>
$I_{yy}$	4800 slug ft <sup>2</sup>
$I_{zz}$	5200 slug ft <sup>2</sup>
$I_{xz}$	200 slug ft <sup>2</sup>

---

**4.3 Stabilité statique :**

Un avion est dit statiquement stable s'il satisfait les critères de la stabilité statique, la vérification de ces critères est faite dans le tableau (4-1) ci-dessous :

**Tableau 6:les critères de stabilité de l'avion de Marchetti S211**

Critère de stabilité	SIAI Marchetti S211	
CSS 1: $(c_{T_{Xu}} - c_{D_u}) < 0$	$c_{T_{Xu}} - c_{D_u} = -0.055 - 0.05 = -0.105 < 0$	Stable
CSS 2: $c_{y_\beta} < 0$	$c_{y_\beta} = -1 < 0$	Stable
CSS 3: $c_{L_\alpha} > 0$	$c_{L_\alpha} = 5.5 > 0$	Stable
CSS 4: $c_{m_\alpha} < 0$	$c_{m_\alpha} = -0.24 < 0$	Stable
CSS 5: $c_{n_\beta} > 0$	$c_{n_\beta} = 0.17 > 0$	Stable
CSS 6: $C_{l_p} < 0$	$C_{l_p} = -0.39 < 0$	Stable
CSS 7: $c_{m_q} < 0$	$c_{m_q} = -17.7 < 0$	Stable
CSS 8: $c_{n_r} < 0$	$c_{n_r} = -0.26 < 0$	Stable
CSS 9: $c_{l_\beta} < 0$	$c_{l_\beta} = -0.11 < 0$	Stable
CSS 10: $c_{m_u} > 0$	$c_{m_u} = 0$	Stable

D'après le tableau 4-1 on déduit que l'avion Marchetti S211 vérifie les dix critères de la stabilité statique par conséquent cet avion est statiquement stable.

### 4.3.1 Le cas longitudinal :

#### 4.3.1.1 Les paramètres aérodynamiques pour l'analyse de la stabilité statique longitudinale :

La masse volumique « $\rho$ »	0.000737
Location du centre aérodynamique « $\bar{x}_{ac}$ »	0.294

#### Les coefficients aérodynamiques longitudinales :

$C_{m_0}$	-0.080
$C_{L_0}$	0.149
$C_{m_\alpha}$	-0.240
$C_{L_\alpha}$	5.5
$C_{m_{i_h}}$	-2.3
$C_{L_{i_h}}$	0.99
$C_{m_{\delta_e}}$	-0.82
$C_{L_{\delta_e}}$	0.35
$C_{L_1}$	0.234

#### 4.3.1.2 Les points d'équilibre (Trim) :

Pour trouver les conditions de trim :  $\alpha_1$ ,  $\delta_{e_1}$  et  $i_{h_1}$  :

- Pour un avion équipé de stabilisateurs utilisés pour les réglages de trim :

On sélectionne  $\delta_{e_1} = 0$  :

$$\begin{bmatrix} C_{L\alpha} & C_{L i_h} \\ C_{m\alpha} & C_{m i_h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ i_{h_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{L_1} - C_{L_0} - C_{L_{\delta_e}} \delta_{e_1} \\ -C_{m_0} - C_{m_{\delta_e}} \delta_{e_1} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Avec les paramètres précédents, on calcule les matrices A et B.

La matrice A longitudinale :

$$\begin{bmatrix} 5.5 & 0.99 \\ -0.24 & -2.3 \end{bmatrix}$$

La matrice B longitudinale :

$$\begin{bmatrix} 0.085 \\ 0.08 \end{bmatrix}$$

On obtient les valeurs :

$$\alpha_1 = 0.0221 \quad , \quad i_{h_1} = -0.0371$$

On calcule les gradients  $\frac{\partial \alpha_1}{\partial C_L}$ ,  $\frac{\partial i_{h_1}}{\partial C_L}$  et  $\frac{\partial i_{h_1}}{\partial V_{p_1}}$  :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial C_L} = 0.1853$$

$$\frac{\partial i_{h_1}}{\partial C_L} = -0.0193$$

$$\frac{\partial i_{h_1}}{\partial V_{p_1}} = 1.5496 \times 10^{-5}$$

Les graphes gradients  $\frac{\partial \alpha_1}{\partial C_L}$ ,  $\frac{\partial i_{h_1}}{\partial C_L}$  et  $\frac{\partial i_{h_1}}{\partial V_{p_1}}$  en fonction de  $\bar{x}_{CG}$  :

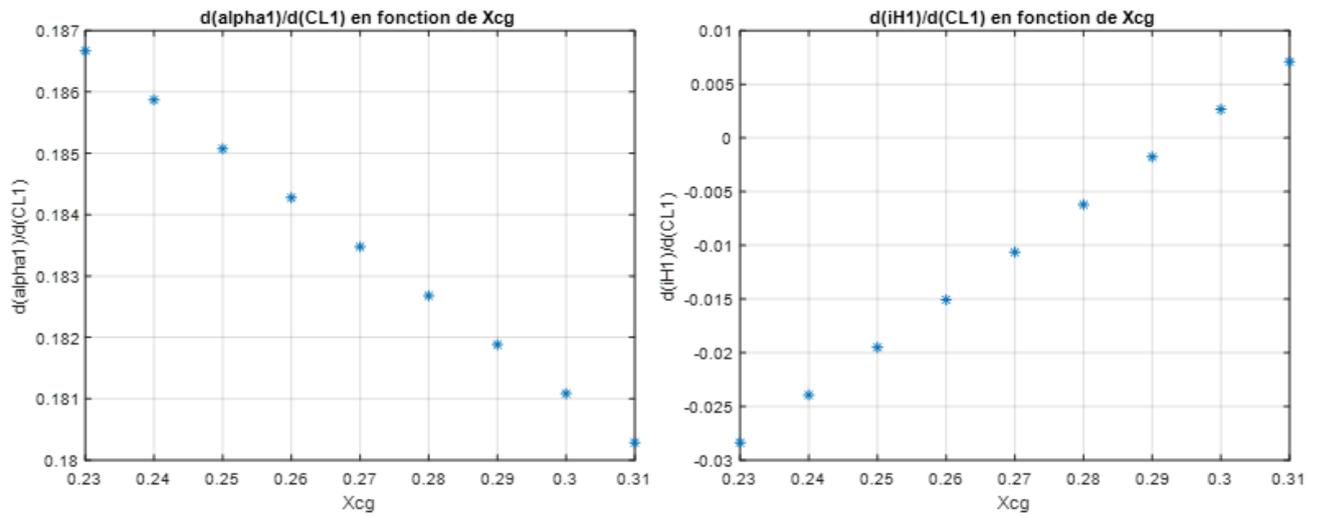


Figure 18: Les gradients  $\frac{\partial \alpha_1}{\partial C_L}$ ,  $\frac{\partial i_{h_1}}{\partial C_L}$  en fonction de  $\bar{x}_{CG}$  de l'avion SIAI Marchetti

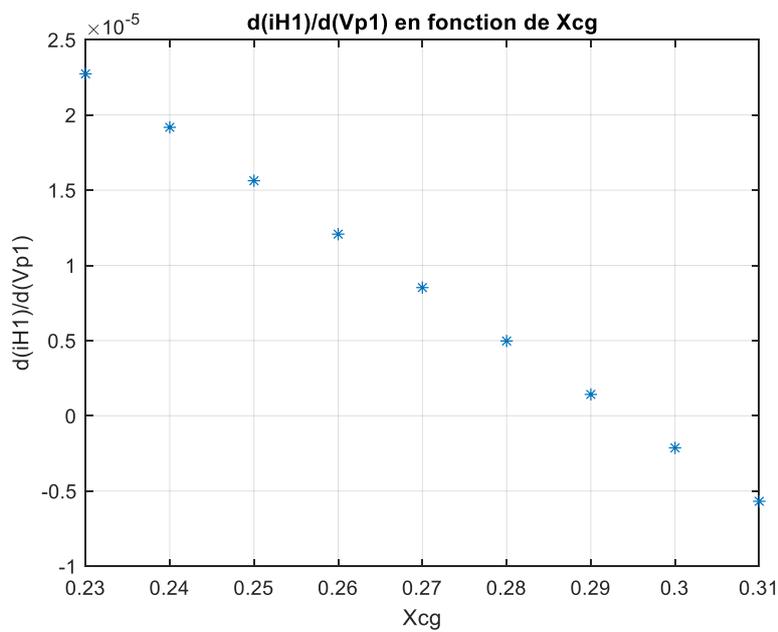


Figure 19: Le gradient  $\frac{\partial i_{h_1}}{\partial V_{p_1}}$  en fonction de  $\bar{x}_{CG}$  de l'avion SIAI Marchetti

– Pour le cas où l'avion n'est pas équipé de stabilisateurs :

On a  $i_{h_1} = 0$  :

$$\begin{bmatrix} C_{L\alpha} & C_{L\delta_e} \\ C_{m\alpha} & C_{m\delta_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \delta_{e_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{L_1} - C_{L_0} \\ -C_{m_0} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

La matrice A2 longitudinale :

$$\begin{bmatrix} 5.5 & 0.35 \\ -0.24 & -0.82 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La matrice B2 longitudinale :

$$\begin{bmatrix} 0.085 \\ 0.08 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

On obtient les valeurs :

$$\alpha_1 = 0.0221 \quad , \quad \delta_{e_1} = -0.1040$$

On calcule les gradients  $\frac{\partial \delta_{e_1}}{\partial C_L}$  et  $\frac{\partial \delta_{e_1}}{\partial V_{p_1}}$  :

$$\frac{\partial \delta_{e_1}}{\partial C_L} = -0.054225$$

$$\frac{\partial \delta_{e_1}}{\partial V_{p_1}} = 4.3459 \times 10^{-5}$$

Les courbes des gradients  $\frac{\partial \delta_{e_1}}{\partial C_L}$  et  $\frac{\partial \delta_{e_1}}{\partial V_{p_1}}$  en fonction de  $\bar{x}_{CG}$  :

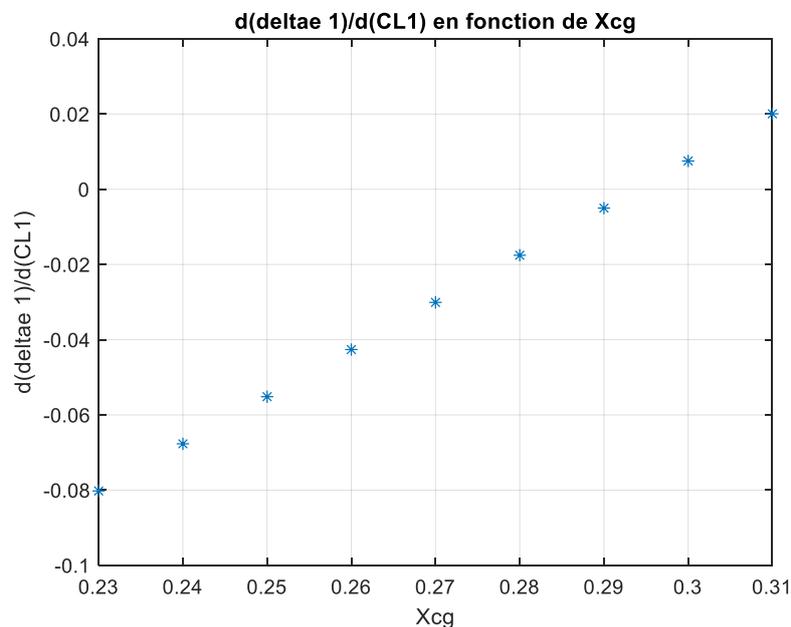


Figure 20: Le gradient  $\frac{\partial \delta_{e_1}}{\partial C_L}$  en fonction de  $\bar{x}_{CG}$  de l'avion SIAI Marchetti

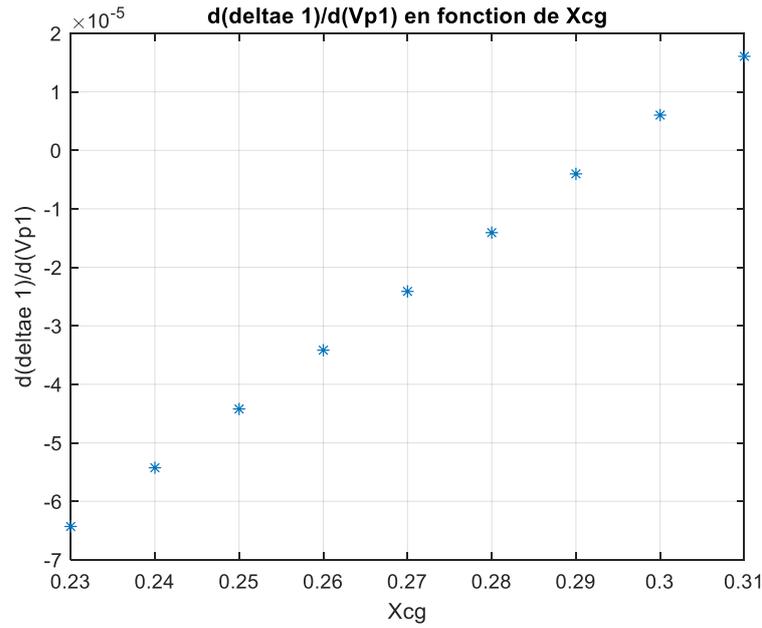


Figure 21 : Le gradient  $\frac{\partial \delta_{e_1}}{\partial V_{p_1}}$  en fonction de  $\bar{x}_{CG}$  de l'avion SIAI Marchetti

### 4.3.2 Le cas latéral-directionnel :

#### 4.3.2.1 Les conditions de trim du cas latéral-directionnel :

Le calcul à partir des équations de vol en équilibre et en supposant que :

$$\phi_1 = 0, \gamma_1 = 0, F_{y_{T_1}} = 0, L_{T_1} = 0$$

Alors, le système d'équation de vol en équilibre dans le cas latéral-directionnel sous la forme matricielle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_a} & C_{y\delta_r} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_a} & C_{l\delta_r} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_a} & C_{n\delta_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \delta_{A1} \\ \delta_{R1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-mgsin\phi_1 cos\gamma_1 + F_{y_{T_1}}}{\bar{q}_1 S} \\ \frac{-L_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} \\ \frac{-N_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Les solutions obtenues sont :

$$\beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-mgsin\phi_1 cos\gamma_1 + F_{y_{T_1}}}{\bar{q}_1 S} & C_{y\delta_a} & C_{y\delta_r} \\ \frac{-L_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} & C_{l\delta_a} & C_{l\delta_r} \\ \frac{-N_{T_1} - \Delta N_{D1}}{\bar{q}_1 S b} & C_{n\delta_a} & C_{n\delta_r} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (4.4)$$

$$\delta_{a_1} = \frac{\begin{vmatrix} C_{y\beta} & \frac{-mgsin\phi_1 cos\gamma_1 + F_{yT_1}}{\bar{q}_1 S} & C_{y\delta_r} \\ C_{l\beta} & \frac{-L_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} & C_{l\delta_r} \\ C_{n\beta} & \frac{-N_{T_1} - \Delta N_{D_1}}{\bar{q}_1 S b} & C_{n\delta_r} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (4.5)$$

$$\delta_{r_1} = \frac{\begin{vmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_a} & \frac{-mgsin\phi_1 cos\gamma_1 + F_{yT_1}}{\bar{q}_1 S} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_a} & \frac{-L_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_a} & \frac{-N_{T_1} - \Delta N_{D_1}}{\bar{q}_1 S b} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (4.6)$$

Les matrices A et B :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.028 \\ -0.11 & 0.1 & 0.05 \\ 0.17 & -0.005 & -0.12 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0004085 \end{bmatrix}$$

On trouve numériquement les valeurs de  $\beta_1, \delta_{A1}, \delta_{R1}$  qui sont :

$$\beta_1 = 1.0132 \times 10^{-4}$$

$$\delta_{A1} = -0.0017$$

$$\delta_{R1} = 0.0036$$

$\beta_1, \delta_{A1}, \delta_{R1}$  représentent les valeurs initiales pour lesquels l'avion peut être en équilibre.

**Pour la dynamique latérale-directionnelle suite à une condition de panne moteur :**

$$\beta_{1EO} = -\frac{N_{T_1}}{C_{n\beta} \bar{q} S b} \quad (4.7)$$

$$\delta_{A1EO} = \frac{\left( \frac{C_{l\beta} N_{T_1}}{C_{n\beta} \bar{q} S b} - \frac{L_{T_1}}{\bar{q}_1 S b} \right)}{C_{l\delta_A}} \quad (4.8)$$

$$\delta_{R1EO} = \frac{-(C_{n\beta} \beta_{1EO} + C_{n\delta_A} \delta_{A1EO} + \frac{N_{T_1}}{\bar{q} S b})}{C_{n\delta_R}} \quad (4.9)$$

Après le calcul, on obtient les valeurs suivantes :

$$\beta_{1EO} = -0.0138$$

$$\delta_{A1EO} = -0.0152$$

$$\delta_{R1EO} = 6.3189 \times 10^{-4}$$

Cette fois-ci,  $\beta_1, \delta_{A1}, \delta_{R1}$  représentent les valeurs initiales pour lesquels l'avion peut être en équilibre.

### 4.3.3 Le diagramme de trim :

Le diagramme de trim est une présentation graphique de CL en fonction de Cm qui contient toutes les valeurs possibles de  $\alpha_1$  et  $i_{h_1}$  pour laquelle il est possible d'équilibrer un avion a chaque condition de vol possible.

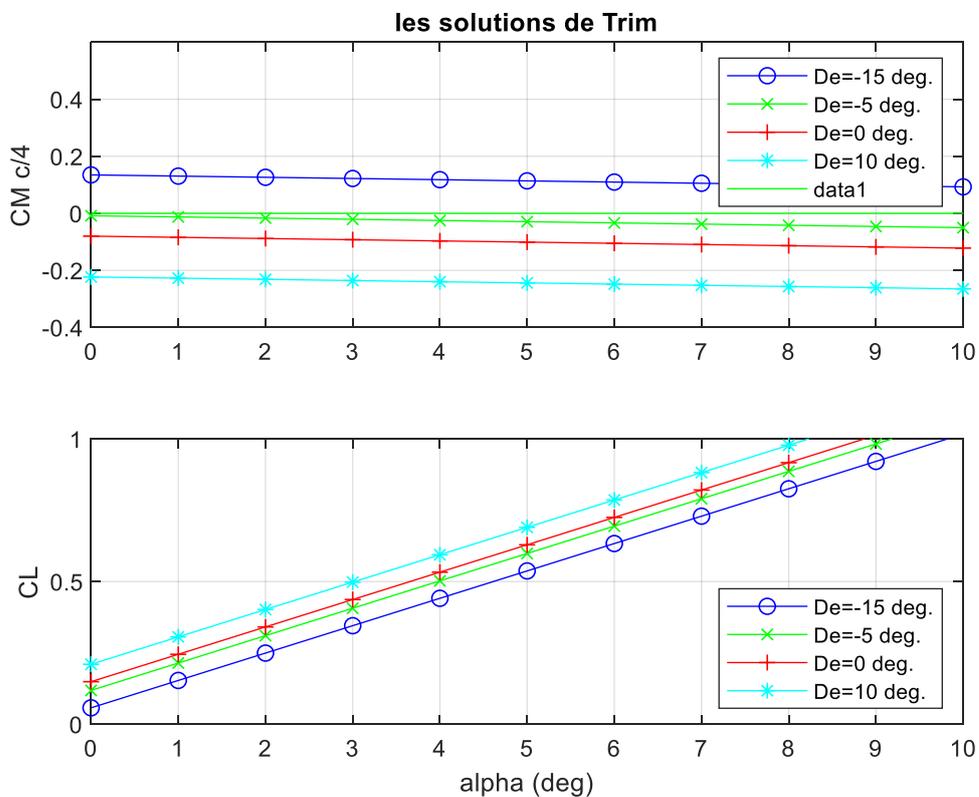


Figure 22: Courbes Cm et CL en fonction de alpha dans le cas de Trim

les courbes en haut représente la solution de l'équation (4.1) où le débattement de la gouverne est limité entre -15 et 10 degrés

La figure contient deux parties : partie supérieure de Cm en fonction de  $\alpha$ , et la partie inférieure est CL en fonction de  $\alpha$ .

Dans la partie supérieure, l'intersection des lignes des courbes avec la ligne ( $C_m=0$  c-à-d l'équilibre) nous donne des points, la projection de ces points sur la deuxième partie (en bas) nous donne les points d'équilibre.

Ces points forment une ligne, c'est la ligne de courbe de coefficient de portance équilibré en fonction de l'angle d'attaque.

La projection du point d'intersection de ligne  $De=-5$  avec  $C_m=0$  dans le graph en bas est le point où  $CL=0.11$ , cette valeur est la valeur de  $CL$  équilibré.

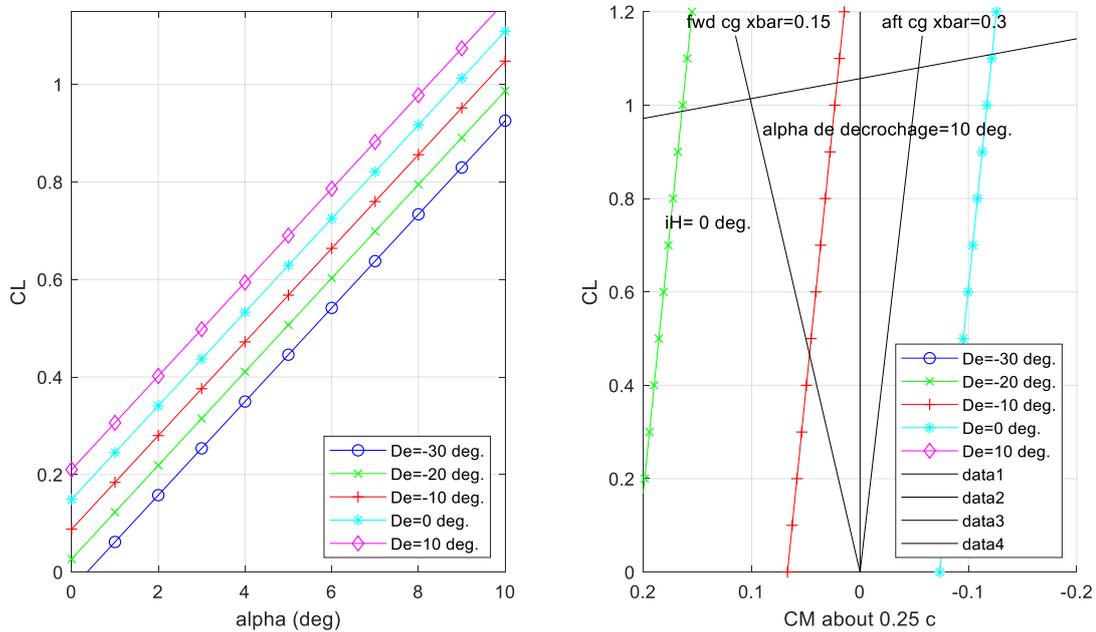


Figure 23: Diagramme d'équilibre de l'avion Marchetti S211

Dans cette figure on trouve deux graphs :

1. Le coefficient de portance en fonction de  $\alpha$
2. Le coefficient de portance en fonction du coefficient de moment de tangage

Cette figure aide à trouver les points d'équilibre à n'importe quelle position de centre de gravité. Pour ce cas on a étudié les points d'équilibre pour  $\bar{x}_{CG}=0.15$  et  $\bar{x}_{CG}=0.3$ .

Dans ce cas pour  $\bar{x}_{CG}=0.15$  et  $\delta_e = -10$  deg :  $CL=0.47$  est la valeur de  $CL$  équilibré.

Le triangle formé par les lignes de  $\bar{x}_{CG}$  avant et arrière et la ligne de l'angle d'attaque de décrochage est le triangle d'équilibre (Trim) ; Un avion doit être équilibré et volé en toute sécurité à l'intérieur de ce triangle.

#### 4.4 La stabilité dynamique :

**Tableau 7: les coefficients de stabilité en état de vol stabilisé**

Coefficients de stabilité en état de vol stabilisé				
$C_{L_1}$	$C_{D_1}$	$C_{T_{X_1}}$	$C_{m_1}$	$C_{m_{T_1}}$
1.414	0.21	0.21	0	0

**Tableau 8: coefficient de stabilité longitudinal**

Coefficients de stabilité longitudinale							
$C_{m_u}$	$C_{m_\alpha}$	$C_{m_{\dot{\alpha}}}$	$C_{m_q}$	$C_{m_{T_u}}$	$C_{m_{T_\alpha}}$	$C_{L_u}$	$C_{L_\alpha}$
0	-0.6	-7.0	-15.7	0	0	0.071	5
$C_{L_{\dot{\alpha}}}$	$C_{L_q}$	$C_{D_\alpha}$	$C_{D_u}$	$C_{T_{X_u}}$	$C_{L_{\delta_e}}$	$C_{D_{\delta_e}}$	$C_{m_{\delta_e}}$
0	9	1.14	0	-0.45	0.35	0	-0.82

**Tableau 9: coefficients de stabilité latéral-directionnelle**

Coefficients de stabilité latérale-directionnelles							
$C_{l_\beta}$	$C_{l_p}$	$C_{l_r}$	$C_{l_{\delta_A}}$	$C_{l_{\delta_R}}$	$C_{n_\beta}$	$C_{n_p}$	$C_{n_r}$
-0.140	-0.350	0.560	0.110	0.030	0.160	-0.030	-0.310

$C_{n_{\delta_A}}$	$C_{n_{\delta_R}}$	$C_{y_{\beta}}$	$C_{y_p}$	$C_{y_r}$	$C_{y_{\delta_A}}$	$C_{y_{\delta_R}}$
-0.030	-0.110	-0.94	-0.010	0.590	0	0.260

#### 4.4.1 Le cas longitudinal :

Avec les paramètres précédents on va calculer les matrices A et B du système longitudinal :

La matrice A :

$$A_{long} = \begin{bmatrix} -0.0774 & 0.0503 & 0 & -32.2 \\ -0.534 & -0.9568 & 124 & 0 \\ 0.0019 & -0.0106 & -1.4401 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice B=

$$B_{long} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8.9077 & 0 \\ -2.5933 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le calcul des matrices A et B permet de trouver les valeurs propres, le calcul de ces dernier nous permet d'obtenir une paire de solutions complexes conjugués avec les parties réelles négatives, ce qui signifie que le mouvement longitudinal est dynamiquement stable.

**Tableau 10: la comparaison des valeurs propres trouver par Matlab et donné dans le livre de Napolitano**

Les modes	Les valeurs propres par MATLAB		Les valeurs propres sur « Napolitano »
	Exact	Approximé	
Période longue	$-0.0149 \pm 0.2962i$	$-0.0387 \pm 0.3704i$	$-0.0056 \pm 0.293i$
Période courte	$-1.2222 \pm 1.1204 i$	$-1.1984 \pm 1.1231i$	$-1.23 \pm 1.102i$

**Tableau 11:: caractéristique dynamique longitudinal en méthode approximative et exact**

Période			t1/2 (s)			Nombre de cycle N1/2		
Approximé	Exact	ER	Approximé	Exact	ER	Approximé	Exact	ER
16.9649	21.2145	20%	17.8295	46.2484	61%	1.0527	2.1837	51%
5.5947	5.6082	0.2%	0.5758	0.5645	2%	0.1031	0.1008	2.28%

**Tableau 12: paramètres du mouvement longitudinal de l'avion Marchetti S211**

Fréquence $\omega_n$		Facteur d'amortissement	
MATLAB	Napolitano	MATLAB	Napolitano
0.3724	0.293	0.1039	0.019
1.6453	1.645	-0.7298	-0.742

Le mode de période courte est une oscillation fortement amortie sur une période. Il y'a une variation de l'angle d'attaque et de l'angle de tangage. Le mouvement est assez rapide pour que la vitesse et l'altitude n'aient pas le temps de changer, ainsi elles demeurent presque constantes. L'amortissement est très faible, la période est lente, la fréquence rapide et le temps t1/2 et le nombre de cycle N1/2 sont petits.

Le mode Phugoïde est celui dans lequel il y'a une variation de l'amplitude de la vitesse, d'altitude et de l'angle de tangage. Alors que l'angle d'attaque demeure presque constant. Ce mode a une période lente et une fréquence courte avec un facteur d'amortissement faible. Le temps de doubler ou réduire au moitié t1/2 est grand et le nombre de cycle N1/2 est petit.

D'après le tableau 4-4 qui contient les résultats des méthodes exact et approximée, on trouve que la solution du mode courte période approximée est très proche de la solution exacte avec

une erreur relative de (1.5%). Par contre l'approximation du mode Phugoïde atteint une erreur relative de (44%).

En conséquence, le mode de la période courte approximée est plus précis ce qui le rend plus recommandé dans les calculs.

#### 4.4.2 Le cas latéral-directionnel :

C'est l'étude du mouvement transitoire dans le plan latéral directionnel suite à l'action du pilote sur la commande latérale du manche en roulis et directionnelle sur le palonnier ou bien suite à une rafale latérale ou directionnelle. Dans ce cas, on va calculer et analysé les caractéristiques dynamiques du mouvement latéral-directionnel et comparer les résultats par les méthodes approximée et exacte obtenu par le programme.

En utilisant les coefficients et les dérivées latéral-directionnelles, le calcul des matrices A et B du système latéral-directionnel donne :

La matrice A :

$$A_{lat} = \begin{bmatrix} -0.1731 & -0.0002 & -0.9885 & 0.2597 \\ -11.7711 & -3.1211 & 4.9938 & 0 \\ 2.1025 & -0.0418 & -0.4320 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice B :

$$B_{lat} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0479 \\ 9.2487 & 2.5224 \\ -0.3942 & -1.4455 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solution de l'équation caractéristique du vol latéral-directionnel aboutit aux valeurs propres et les caractéristiques dynamiques présentés dans les tableaux (4-8) ci-dessus :

**Tableau 13:les valeurs propres trouvé par Matlab et donné par Napolitano**

Type de mouvement	Les valeurs propres par MATLAB		Les valeurs propres « Napolitano »
	Exact	Approximé	
Roulis	-3.4030	-3.1211	-3.626

Roulis hollandais	$-0.2261 \pm 1.7763i$	$-0.3026 \pm 1.4358i$	$-0.381 \pm 1.757i$
Spirale	0.1289	0.4600	0.1236

**Tableau 14: Caractéristiques dynamiques du mouvement latéral-directionnel approximatés et exacts**

Période			t1/2 (s)			Nombre de cycle N1/2		
Approximé	Exact	ER	Approximé	Exact	ER	Approximé	Exact	ER
0	0	-	0.2211	0.2028	9%	0	0	-
4.3761	3.537	23.7%	2.2805	3.0524	25.3%	0.5220	0.8644	39.6%
0	0	-	1.5001	5.3550	71.9%	0	0	-

**Tableau 15:: Paramètres dynamiques du mode roulis hollandais**

Type de mouvement	Fréquence $\omega_n$		Facteur d'amortissement	
	MATLAB	Napolitano	MATLAB	Napolitano
Roulis hollandais	1.4673	1.798	-0.2062	-0.212

#### La constante de temps du mode de roulis et spiral :

Les résultats de MATLAB :  $T_r=0.3204$ ,  $T_s=-2.1741$

Les résultats de Napolitano :  $T_r=0.276$ ,  $T_s=-8.09$

Dans le cas latéral-directionnel, le mode de roulis hollandais a une période lente et une fréquence rapide avec un facteur d'amortissement très faible.

Le mode de roulis à un t1/2 court et la constante de temps  $T_r$  est très faible.

Le mode spiral a une t1/2 et un  $T_s$  très court, cela signifie une instabilité

D'après les résultats obtenus par les méthodes approximée et exacte, on trouve que le  $t_{1/2}$  approximé du mode de roulis est proches à la valeur exacte avec une erreur relative de (9%) comparant au mode spiral qui a une erreur relative (71.9) est roulis hollandais (29.5).

Les valeurs de la fréquence et du facteur d'amortissement du mode roulis hollandais calculé par le programme Matlab sont proches aux valeurs du calcul théorique donné par la référence [9] du livre de Napolitano.

Les résultats obtenus pour la constante du temps du mode de roulis du programme Matlab et par la référence [9] du livre de Napolitano sont proches mais le contraire de ce qui se passe pour la constante du temps de mode spiral.

## CONCLUSION GENERALE

L'objectif de ce mémoire est de déterminer les conditions d'équilibre (Trim) et d'analyser la stabilité statique et dynamique.

En vérifiant les critères de stabilité statique pour notre avion SIAI Marchetti S211, on peut dire que cet avion vérifie tous les critères donc elle est stable.

A la fin de cette thèse, on peut citer l'importance de l'équilibre (Trim) dans la stabilité de l'avion :

- Le trim permet de stabiliser l'avion dans une position d'équilibre statique.
- En ajustant les surfaces de contrôle (gouverne, ailerons, profondeur), le trim compense les forces aérodynamiques générées par l'avion. Cela permet au pilote de réduire la pression exercée sur les commandes.
- Adaptation aux différentes phases de vol : l'avion nécessite des ajustements de trim pour compenser les changements d'attitude, de vitesse et de charge pendant des différentes phases de vol.
- Le trim contribue à la stabilité dynamique en aidant l'avion à retrouver un état d'équilibre après des perturbations extérieures.

L'importance de diagramme d'équilibre à préciser les paramètres aérodynamiques (l'angle d'attaque, l'incidence horizontal de stabilisateur) où l'avion peut être équilibré pour chaque condition de vol possible et à chaque position possible du centre de gravité de cet avion.

D'après les résultats trouvés dans l'analyse de la stabilité dynamique :

Pour le mode de période courte, ce mode correspond à des oscillations rapides de l'angle d'attaque et de la vitesse verticale après une perturbation avec une fréquence rapide et une période lente, Par contre l'amortissement est très faible.

Le mode Phugoïde décrit une oscillation à long terme entre la vitesse et l'altitude. Ce mode a une grande période et une fréquence faible avec un facteur d'amortissement faible.

Dans le cas latéral-directionnel, le mode de roulis hollandais a une période lente et une fréquence rapide avec un facteur d'amortissement très faible.

Le mode de roulis à une  $t_{1/2}$  court c.-à-d. l'avion revient rapidement à son équilibre après une perturbation et la constante de temps  $T_r$  est très faible car l'amortissement, cela signifie une stabilité forte.

Le mode spiral a une  $t_{1/2}$  et un  $T_s$  très court, cela signifie une instabilité.

Nous aurions voulu faire l'application de nos programmes sur un modèle d'UAV, mais cela n'a pas pu être le cas à cause de manque important des données caractéristique des drone.

## REFERENCES

- [1] Article: Ugur O et Mehmet S.K. Linear and Nonlinear Simulation of Aircraft Dynamics Using Body Axis System. Faculty of aeronautics and astronautics, Istanbul, Turkey, Emerald Insight.
- [2] Ugur O et Mehmet S.K. Simulation and Control of Fixed Wing Aircraft After a Major Component Loss. Istanbul Technical University, Istanbul, 34469, Turkey, AIAA 2010-490.
- [3] Thèse: M.Sc. Thesis by Ugur O. Flight Simulation and Control of Fixed Wing Aircraft. Istanbul Technical University, Institute of Science and Technology.
- [4] Roskam J. Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls, part 1, DAR corporation, 2001.
- [5] Roskam J, William A, An Easy Way to Analyze Longitudinal and Lateral-Directional Trim Problems with AEO or OEI, SAE international
- [6] Dr. Robert C. Nelson. Flight stability and automatic control, McGraw Hill 2nd Edition 1998.
- [7] Thèse : Etude De Stabilité Statique Et Dynamique D'un Drone Application Pour YAK-54, par Mr. ABD Errahmane B, Rassim M, Département d'Aéronautique, Blida.
- [8] M.V. Cook. Flight Dynamics Principles, A Linear Approach to Aircraft Stability and Control, second edition, ELSEVIER Butterworth-Heinmann.
- [9] Marcello R. Napolitano. Aircraft Dynamics from Modeling to Simulation, John Wiley & Sons.
- [10] Roskam J. Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls, part 1, published by author 1979.