



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOGRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DE BLIDA 1  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

---

## Restauration d'images à l'aide des équations différentielles fractionnaires

---

Présenté par

**ZEHRAOUI Asmaa**

Soutenue publiquement, le 20/ 07 / 2023 devant le jury composé de :

M. LAMAMRI Abdelkader	MCB	Université de Blida1	Président
M. HACHAMA Mohammed	professeur	Université de Blida1	Promoteur
Mme. BOUTAOUS Fatiha	MCA	Université de Blida1	Co-Promotrice
M. TALBI Mohamed El Amine	MCA	Université de Blida1	Examineur

2022-2023

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iv</b>
<b>Dédicace</b>	<b>v</b>
<b>Notations</b>	<b>vi</b>
<b>Résumé</b>	<b>x</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels et définitions</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 L'image et ses caractéristiques . . . . .	4
1.2.1 Définition d'une image . . . . .	4
1.2.2 Les caractéristiques de l'image . . . . .	5
1.2.3 Les types de l'image . . . . .	5
1.3 La restauration d'image . . . . .	6
1.3.1 Définition de la restauration d'image . . . . .	6
1.3.2 Le but de la restauration . . . . .	7
1.4 La fusion d'image . . . . .	7
1.4.1 Définition de la fusion . . . . .	7
1.4.2 Les méthodes de fusion . . . . .	8
1.5 Le modèle FSG . . . . .	9
1.6 Le modèle WTV . . . . .	9

1.7	Le bruitage d'image . . . . .	10
1.7.1	Définition de bruit . . . . .	10
1.7.2	Les types de bruit . . . . .	10
1.8	Le débruitage d'image . . . . .	11
1.8.1	Définition de débruitage . . . . .	11
1.8.2	Méthode de débruitage . . . . .	11
1.9	Les équations différentielles fractionnaires . . . . .	11
1.9.1	Définition des équations différentielles fractionnaires . . . . .	11
1.9.2	L'intégrale fractionnaire . . . . .	11
1.9.3	La dérivée fractionnaire . . . . .	12
1.10	Espace complet . . . . .	12
1.11	Espace de Banach . . . . .	12
1.12	L'espace $BV^\gamma(\Omega)$ . . . . .	13
1.13	La norme de Frobenius . . . . .	13
1.14	Multiplicateur et Fonction de Lagrange . . . . .	13
1.14.1	Définition du multiplicateur de Lagrange . . . . .	13
1.14.2	Définition du fonction de Lagrange . . . . .	13
1.15	La méthode de gradient conjugué . . . . .	14
1.16	La topologie faible . . . . .	14
1.17	La plus faible semi-continuité . . . . .	14
1.18	La mesure de Radon . . . . .	15
1.19	La fonction convexe . . . . .	15
1.20	La fonction strictement convexe . . . . .	15
1.21	Le lemme de Fatou . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Etude théorique du problème de fusion d'image</b>	<b>16</b>
2.1	Introduction . . . . .	16
2.2	La méthode ADMM . . . . .	17
2.2.1	Généralisation de la méthode ADMM . . . . .	17
2.2.2	Une description de la méthode ADMM . . . . .	18
2.2.3	L'algorithme de la méthode ADMM . . . . .	18
2.3	Les modèles variationnels . . . . .	19
2.3.1	Le modèle TVL1 (la variation totale en norme une) . . . . .	19

2.3.2	Le modèle TVL2 (la variation totale en norme deux) . . . . .	22
2.4	Théorème de l'existence et de l'unicité . . . . .	26
2.5	Conclusion . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Etude numérique du problème de fusion d'images</b>	<b>30</b>
3.1	Introduction . . . . .	30
3.2	expériences numériques . . . . .	30
3.3	Conclusion . . . . .	34
	<b>Conclusion générale</b>	<b>35</b>

# Remerciements

Dans le cadre de ce travail, j'adresse ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à Monsieur **HACHAMA Mohammed**, pour m'avoir proposé ce thème de recherche et pour avoir patiemment dirigé mon travail. Sa disponibilité, son précieux aide scientifique, ses encouragements et son soutien moral, sans réserve, ont énormément contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à remercier aussi ma Co-Promotrice, Madame **BOUTAOUS Fatiha** pour ces efforts, sa disponibilité et son soutien moral.

Je remercie infiniment le professeur **LAMAMRI Abdelkader** d'avoir bien voulu présider ce jury de thèse et de s'être intéressé à ce travail.

Je remercie aussi le Professeur : **TALBI Mohamed El Amine** pour s'être intéressé à ce travail et pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie de mon Jury de soutenance.

# Dédicace

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

A l'homme, mon précieux offre du Dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect **mon cher père**.

A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non âmes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse **mon adorable mère**.

A **mes frères** et **mon mari** qui n'ont pas cessé de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que Dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.

A **ma grande-mère**, que Dieu la donne une longue et joyeuse vie.

A tous **mes oncles**, **mes tantes**, **ma belle mère**, **mes beaux frères**, **mes cousines** et **mes amies**.

merci pour leur amour et leur encouragement.

# Notations

$L^2(\Omega)$  : l'ensemble des fonctions de carrée intégrable sur  $\Omega$ .

$C_0^\infty$  : l'espace des fonctions continue infiniment dérivable a support compact.

$\|u\|_\infty$  : la norme infinie de  $u$ .

$D^\gamma u$  : la dérivée d'ordre fractionnaire de  $u$ .

$BV^\gamma(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) / \int_\Omega |D^\gamma u| < +\infty\}$ .

$\|u\|_{BV^\gamma} = \|u\|_{L^1} + \int_\Omega |D^\gamma u|$ .

ADMM : Alternating Direction Method of Multiplier (la méthode des multiplicateurs à direction alternée).

TV : Total variation (la variation totale).

TVL1 : The Total variation in norm 1 (la variation totale en norme une).

TVL2 : The Total variation in norm 2 (la variation totale en norme deux).

FSG : The first-and second-ordre gradient (le gradient de premier et de second ordre).

WTV : Wang total variation (la variation totale de Wang).

$\Gamma$  : la fonction gamma qui est définie comme :  $\Gamma(1 - \gamma) = \int_0^\infty t^{-\gamma} e^{-t} dt$ .

Div  $\psi$  : la divergence de  $\psi$ , tel que :  $div\psi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_{xi}}{\partial x_i}$ .

Sup : la valeur supérieure.

$Q_{MI}$  : la quantité d'information mutuelle.

$Q_P$  : la quantité de congruence de phase.



## Listes des figures

<b>La figure 1-1</b>	page 4	Une représentation visuelle d'une scène.
<b>La figure 1-2</b>	page 4	La représentation d'une image en mathématique.
<b>La figure 1-3</b>	page 5	Une image binaire.
<b>La figure 1-4</b>	page 6	Une image monochrome.
<b>La figure 1-5</b>	page 6	Une image polychrome.
<b>La figure 1-6</b>	page 6	Un exemple de la restauration.
<b>La figure 1-7</b>	page 7	Premier exemple sur la fusion d'image.
<b>La figure 1-8</b>	page 7	Deuxième exemple sur la fusion d'image.
<b>La figure 1-9</b>	page 10	Les différents type de bruit.
<b>La figure 3-1</b>	page 32	Comparaison des différent modèles de fusion.
<b>La figure 3-2</b>	page 33	Carte de bord des images fusionnées.

## Listes des algorithmes

<b>L'algorithme 2-1</b>	page 19	L'algorithme <b>ADMM</b> pour la résolution du modèle <b>TVL1</b> .
<b>L'algorithme 2-2</b>	page 23	L'algorithme <b>ADMM</b> pour la résolution du modèle <b>TVL2</b> .
<b>L'algorithme 2-3</b>	page 25	Principe de l'algorithme <b>ADMM</b> .

## Listes des tableaux

<b>Tableau 3-1</b>	page 31	Les valeurs de <b>QMI</b> et <b>QP</b> de l'image <b>cameraman</b> .
--------------------	---------	--

## ملخص

في مشروع الأطروحة هذا، نهتم دمج الصور وتقليل التشويش، حيث أن هاتان التقنيتان مهمتان في مجال معالجة الصور. الهدف من هذا العمل هو دمج صور مختلفة للحصول على صورة مدمجة أكثر دقة وإفادة، مع التخلص من الضوضاء الغير مرغوب فيها. لقد درسنا نموذجين متغيرين، حيث يعتمد كل واحد منهما على تنظيم التباين الكلي الذي يحافظ على خصائص الصور ويقلل من التشويش، و المعادلة التفاضلية الكسرية لتحسين جودة الصورة المدمجة. لحل هذه النماذج، نستخدم خوارزمية طريقة مضاعف الاتجاه البديل، والتي تقسم المشكلة إلى مشاكل فرعية أبسط وتحلها. بعد ذلك نعطي أمثلة، حيث تظهر النتائج أن النماذج المدروسة تعطي نتائج اندماج جيدة.

# Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux problèmes de fusion d'images et de débruitage, qui sont deux techniques importantes dans le domaine du traitement d'images. L'objectif de ce travail est de combiner de différentes images pour obtenir une image fusionnée plus précise et informative, tout en éliminant le bruit indésirable.

Nous avons étudié deux modèles variationnels **TVL1** et **TVL2**, qui se basent sur la régularisation de la variation totale **TV** qui permet de préserver les caractéristiques des images sources et minimiser le bruit et la dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\gamma u$  pour améliorer la qualité de l'image fusionnée.

Pour résoudre ces modèles, nous utilisons l'algorithme de la méthode des multiplicateurs à direction alternée **ADMM**, qui permet de décomposer le problème en sous-problèmes plus simples et de les résoudre de manière itérative.

Après nous donnons des exemples sur des expériences telles que les résultats montrent que les modèles étudiés donnent de bons résultats de fusion.

# Abstract

In this dissertation project, we are interested in the problems of image fusion and denoising, which are two important techniques in the field of image processing. The objective of this work is to combine different images to obtain a more accurate and informative merged image, while eliminating unwanted noise.

We have studied two variational models **TVL1** and **TVL2**, both models are based on the regularization of the total variation **TV** which preserve the characteristics of the source images and minimize the noise, and the fractional order derivative  $D^\gamma u$  to improve the quality of the merged image.

To solve these models, we use the (ADMM) Alternating Direction Multipli Method algorithm, which decomposes the problem into simpler sub-problems and solves them iteratively.

After, we give examples experiments, such as the results show that the studied models give good fusion results.

# Introduction générale

Le traitement d'image est un domaine très vaste. Il est une discipline de l'informatique et des mathématiques appliquées qui étudie les images numériques et leurs transformations dans le but d'améliorer leur qualité ou d'en extraire de l'information.

Parmi les processus de traitement d'image on a la restauration d'image. La restauration d'image est une étape très importante, elle englobe les différents traitements que peut subir une image, suite aux divers dégradations qui peuvent altérer une image pendant son capture et conduisent aux manques d'informations utiles qu'elle contenait et qui sont d'une grande importance.

La fusion est devenue un problème actif dans le traitement d'image et la vision par ordinateur en raison de la disponibilité des données multicateurs dans de nombreux domaines, c'est une technique qui consiste à produire une nouvelle image qui conserve une partie de l'information contenue dans chacune des images originales, à un objectif de créer une synergie, c'est-à-dire d'obtenir une image fusionnée géométriquement et/ou sémantiquement plus riche qu'une image initiale. Parmi les méthodes de fusion, on a la méthode de fusion par domaine spatial et la méthode de fusion par domaine transformé.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

- **Le premier chapitre** concerne une description de l'image, et quelques opérations de son traitement.

- **le deuxième chapitre** aborde deux modèles variationnels **TVL1** et **TVL2** qui se basent sur la variation totale et la dérivée fractionnaire de leurs algorithmes et la méthode **ADMM**.
- **Le troisième chapitre** est consacré aux expériences numériques et à la comparaison des résultats obtenus des valeurs **QMI** et **QP** par les modèles **TVL1**, **TVL2**, **FSG** et **WTV** sur une image test, afin de montrer l'efficacité des modèles **TVL1** et **TVL2**.

# Chapitre 1

## Rappels et définitions

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux définitions et résultats de base liés aux thèmes du traitement et restauration d'image.

Nous aborderons une description de l'image et ces caractéristiques. Nous parlerons sur les techniques de traitement d'image.

Puis nous allons entamer les équations différentielles d'ordre fractionnaire (EDF).

## 1.2 L'image et ses caractéristiques

### 1.2.1 Définition d'une image

Une image est une représentation visuelle d'un ensemble d'objets qui se trouvent dans le champ de vision [1].

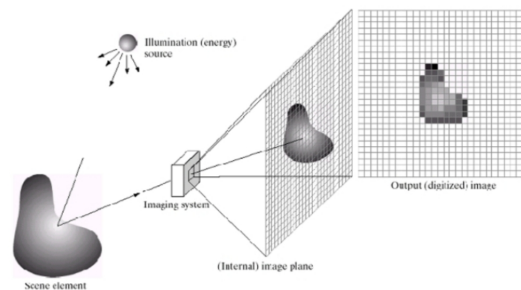


FIGURE 1.1 – La représentation visuelle d'une scène.

Entre-temps, en terme mathématique, une image est aussi définie comme une matrice d'intensités [1].

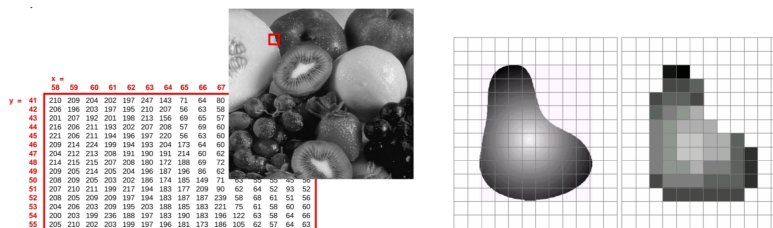


FIGURE 1.2 – La représentation d'une image en terme mathématique.



## 1.2.2 Les caractéristiques de l'image

Toutes les images ont des caractéristiques qui peuvent être utilisées dans leur traitement. Parmi ces caractéristiques on a :

Le pixel, la résolution, la dimension, la texture, le bruit, la luminance, les contours, l'histogramme et le contraste [2].

## 1.2.3 Les types de l'image

Il existe plusieurs types d'image comme l'**image binaire** qui est définie à partir de deux couleurs noir et blanc où chaque pixel est stocké sous la forme d'un seul bit 0 ou 1, l'**image au niveau de gris (monochrome)** qui se présente avec une luminosité allant de noir au blanc et l'**image en couleurs RGB (polychrome)** définie à partir de trois couleurs rouge (Red), vert (Green) et bleu (blue)[2].



FIGURE 1.3 – Exemple d'image binaire.



FIGURE 1.4 – Exemple d'image au niveau de gris (monochrome).



FIGURE 1.5 – Exemple d'images en couleurs (polychrome).

## 1.3 La restauration d'image

### 1.3.1 Définition de la restauration d'image

La restauration d'image est une technique d'imagerie numérique qui permet de rendre à une image numérisée l'apparence de son état d'origine à l'aide d'un logiciel de retouche d'image.

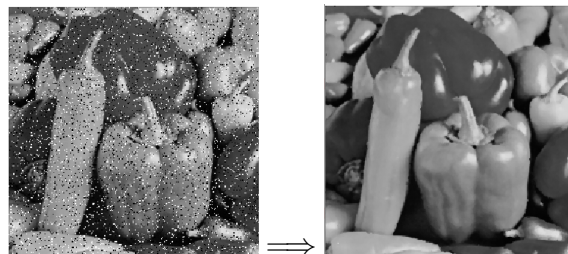


FIGURE 1.6 – Exemple de la restauration

### 1.3.2 Le but de la restauration

Le but principal de la restauration d'image est d'améliorer la qualité visuelle d'une image et de la rendre plus nette, plus claire et plus fidèle aux détails et aux informations.

## 1.4 La fusion d'image

### 1.4.1 Définition de la fusion

La fusion d'image est un problème actif dans le traitement d'images et la vision par ordinateur en raison de la disponibilité des données multicateurs dans de nombreux domaines. L'objectif principal de la fusion d'images est d'intégrer plusieurs images sources de la même scène en une seule image hautement informative qui convient mieux à la vision humaine ou par ordinateur [3].



FIGURE 1.7 – Exemple 1 sur la fusion d'image

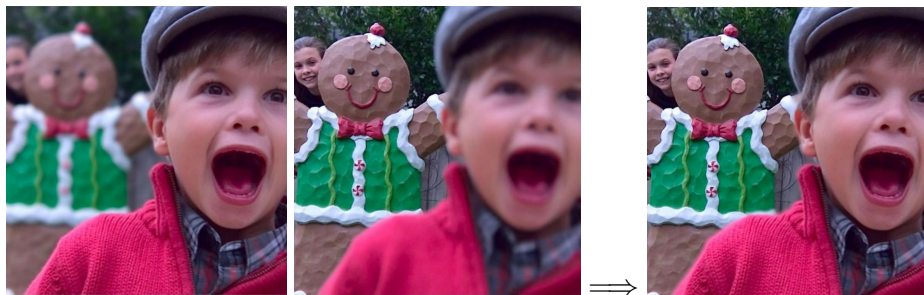


FIGURE 1.8 – Exemple 2 sur la fusion d'image

## 1.4.2 Les méthodes de fusion

Pour avoir une image fusionnée, on a plusieurs méthodes telles que :

### La méthode de fusion par domaine spatial

Elle consiste à sélectionner les pixels à partir de plusieurs images d'entrée pour construire une nouvelle image fusionnée [4].

Les algorithmes de fusion d'images basée sur le domaine spatial opèrent directement sur les pixels de l'image pour obtenir une image entièrement focalisée.

Ces approches sont divisées en trois catégories :

- Fusion basée sur les pixels.
- Fusion basée sur les fonctionnalités.
- Fusion basée sur les décisions.

### La méthode de fusion par domaine transformé

Elle consiste à transformer les images d'entrée dans un espace de représentation différent, comme **la transformée de Fourier**, pour ensuite fusionner les coefficients de transformations [4]. La fusion d'image basée sur le domaine de transformation implique la conversion des images sources en coefficient de transformations et après l'application de la procédure de fusion, l'image est reconvertie dans son propre espace.

Les techniques de fusion d'images basée sur la transformation sont globalement classées en trois groupes :

- Fusion basée sur les ondelettes.
- Fusion basée sur les courbes.
- Fusion basée sur la DCT (la transformée en cosinus discrète).

## 1.5 Le modèle FSG

C'est un modèle variationnel basé sur la fusion des informations de gradient en premier et en second ordre [5], connu sous l'équation suivante :

$$\min_u \int_{\Omega} (|\nabla u - sv| + \alpha |\nabla^2 u - sw|) dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx.$$

Avec :

- $\alpha \geq 0, \beta > 0$  et  $s \geq 1$ .
- $u_0$  une image prédéfinie.
- $v$  et  $w$  désignent les gradients cibles qui ont intégré les informations de gradient de premier et de second ordre à partir des images sources.

Si  $s = 1$  le modèle **FSG** est juste pour la fusion d'images, et si  $s > 1$  le modèle **FSG** est pour la fusion et l'amélioration simultanées d'images.

## 1.6 Le modèle WTV

C'est un modèle variationnel pondéré basé sur la régularisation de la variation totale **TV** [5], il est connu sous l'équation :

$$\min_u \int_{\Omega} (\alpha_1(x)(u - f_1)^2 + \alpha_2(x)(u - f_2)^2) dx + 2\beta \int_{\Omega} |Du| dx,$$

telle que :

- $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux fonctions de poids non négatives, qui réalisent  $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$ .
- $\beta > 0$  le paramètre de régularisation qui permet de faire un compromis entre l'ajustement aux images sources bruitées et le lissage de la variation total **TV**.

## 1.7 Le bruitage d'image

### 1.7.1 Définition de bruit

Le bruit numérique est une notion générale à tout type d'images numériques.

On appelle bruit numérique toute fluctuation parasite ou dégradation qui subit l'image de l'instant de son acquisition jusqu'à son enregistrement.

### 1.7.2 Les types de bruit

Il existe plusieurs types de bruits qui peuvent être appliqués à une image comme le bruit additif gaussien, le bruit additif uniforme, le bruit non linéaire poivre et sel, le bruit multiplicatif et le bruit périodique [1].

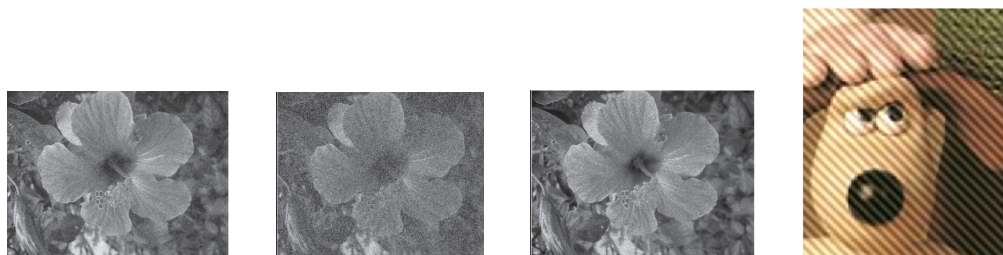


FIGURE 1.9 – Exemple sur les différents type de bruit.

La **Figure 1-9** représente des images bruitées, tel que la première est bruitée avec un bruit blanc gaussien, la deuxième avec un bruit poivre et sel, la troisième bruit multiplicatif et la quatrième un bruit périodique.

## 1.8 Le débruitage d'image

### 1.8.1 Définition de débruitage

Le débruitage est une technique qui consiste à supprimer les éléments indésirables (**bruit**) afin de rendre l'image nette.

### 1.8.2 Méthode de débruitage

Pour avoir une image débruitée, on peut appliquer plusieurs méthodes comme les filtres classiques (le filtre moyen linéaire, et le filtre médian non linéaire), le filtre bilatéral, le débruitage par seuillage (comme le seuillage doux, le seuillage dur et le seuillage non-négatif garrote) et la méthode ICA appelée en anglais Independent Component Analysis (l'analyse en composantes indépendantes) [6].

## 1.9 Les équations différentielles fractionnaires

Généralement, une équation différentielle est une equation où les inconnues sont des fonctions. Elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions et leurs dérivées successives.

### 1.9.1 Définition des équations différentielles fractionnaires

Une équation différentielle fractionnaire est une équation différentielle dans laquelle ces dérivées sont des dérivées d'ordre fractionnaire. Elle peut être une intégrale ou une dérivée.

### 1.9.2 L'intégrale fractionnaire

#### Définition

L'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $f$ , notée  $I_a^\alpha$ , est définie par :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

### 1.9.3 La dérivée fractionnaire

La dérivée fractionnaire est notée  $D_a^\alpha$ . Il existe plusieurs définitions des dérivées fractionnaires :

#### La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

${}^{RL}D_a^\alpha$  : la dérivée fractionnaire de  $f$  au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$ . Elle est définie par :

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n-\alpha} f(x),$$

où :  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$n$  un entier naturel supérieure strictement à  $\alpha$ .

#### La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

${}^C D_a^\alpha$  : la dérivée fractionnaire de  $f$  au sens de Caputo d'ordre  $\alpha$ . Elle est définie par :

$${}^C D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(t) dt = I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x).$$

## 1.10 Espace complet

On dit qu'un espace métrique  $(X, d)$  est complet, si toute suite de Cauchy de  $X$  est convergente dans  $X$ .

## 1.11 Espace de Banach

L'espace de Banach  $(X, \|\cdot\|, d)$  est un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.



## 1.12 L'espace $BV^\gamma(\Omega)$

C'est un espace de Banach. Appelé en anglais (Bounded Variation space) qui est un espace des fonctions bornée sur  $\Omega$ , telles que :

$$BV^\gamma(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) / \int_{\Omega} |D^\gamma u| < +\infty\}$$

et

$$\|u\|_{BV^\gamma} = \|u\|_{L^1} + \int_{\Omega} |D^\gamma u|.$$

## 1.13 La norme de Frobenius

La norme de Frobenius est une norme matricielle, qui est définie comme la racine carrée de la somme des carrés de tous les éléments de la matrice.

Soit  $U$  une matrice et soient les  $a_{ij}$  les éléments de cette matrice tels que  $i = \{1, \dots, n\}$  et  $j = \{1, \dots, m\}$  on a  $\|U\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2}$ .

## 1.14 Multiplicateur et Fonction de Lagrange

### 1.14.1 Définition du multiplicateur de Lagrange

C'est une méthode qui permet de trouver les points stationnaires (maximum, minimum) d'une fonction dérivable d'une ou plusieurs variables, sous contraintes. Ils sont introduit pour former la fonction de Lagrange.

### 1.14.2 Définition du fonction de Lagrange

La fonction de Lagrange est une fonction qui permet d'étudier les problèmes d'optimisation avec contraintes, elle est construite à partir des multiplicateurs de Lagrange.

Exemple :

$$\mathcal{L}(x, \gamma) = f(x) + \sum_i \gamma_i * g_i(x) + \sum_j \tau_j * h_j(x)$$

Tel que :

- .  $\gamma_i$  et  $\tau_j$  les multiplicateurs de Lagrange.
- .  $\mathcal{L}(x, \gamma)$  la fonction de Lagrange.
- .  $g_i(x)$  les contraintes d'égalité.
- .  $h_j(x)$  les contraintes d'inégalité.
- .  $f(x)$  la fonction objectif ( à maximiser ou minimiser).

## 1.15 La méthode de gradient conjugué

Le gradient conjugué est un algorithme pour résoudre des systèmes d'équations linéaires, qui est une méthode itérative pour résoudre une équation  $Ax = b$  avec la matrice  $A$  est symétrique définie positive, ou de façon équivalente trouver le minimum de la fonction  $f$  telle que :  $f(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$ .

## 1.16 La topologie faible

Connue sous le nom de topologie *faible\** et notée  $\sigma(E, E')$  telle que  $E$  un espace vectoriel topologique et  $E'$  sont dual topologique.

### Définition

La topologie faible sur  $E$  est définie comme la plus petite topologie telle que toutes les formes linéaires continues de  $E'$  soient continues lorsque  $E$  est muni de cette topologie.

## 1.17 La plus faible semi-continuité

### Définition

Connue sous le nom - semi-continuité inférieure - on dit qu'une fonction est faiblement semi-continue en un point  $x_0$ , lorsque nous approchons de  $x_0$  les valeurs de la fonction soient supérieur,ie si  $\forall \epsilon > 0, \exists v(x_0)$  tel que  $\forall x \in v(x_0)$  on a  $f(x) \geq f(x_0) - \epsilon$ .

## 1.18 La mesure de Radon

La mesure de Radon est une mesure borélienne sur un espace séparé qui est intérieurement régulière et localement finie.

## 1.19 La fonction convexe

Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est **convexe** si

$$\forall (x, y) \in I^2, x \neq y, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

## 1.20 La fonction strictement convexe

Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est **strictement convexe** si

$$\forall (x, y) \in I^2, x \neq y, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y).$$

## 1.21 Le lemme de Fatou

Le lemme de Fatou compare l'intégrale de la limite inférieure de la fonction mesurable positive avec la limite inférieure de son intégrale.

**Théorème 1.1** Soit  $(E, A, \mu)$  un espace mesuré, pour toute suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonction mesurable sur  $E$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$  la limite inférieure de la suite est mesurable et l'on a :

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu.$$

# Chapitre 2

## Etude théorique du problème de fusion d'image

### 2.1 Introduction

La fusion et le débruitage d'images sont deux techniques importantes dans le domaine du traitement d'image, en raison de la disponibilité du multi-capteur et de présence du bruit.

La fusion d'images est un processus qui intègre des types similaires d'images collectées à partir de sources hétérogènes en une seule image dans laquelle l'information est plus précise et certaine. Par conséquent, l'image résultante est anticipée comme plus explicative et éclairante à la fois pour la perception humaine et la perception de la machine. Généralement, une image fusionnée dans laquelle chaque pixel est déterminé à partir d'un ensemble des pixels dans chaque image source.

Afin d'effectuer la fusion, il existe de différents algorithmes, mais la technique de fusion qui doit produire des résultats efficaces doivent satisfaire aux conditions suivantes :

- Les informations pertinentes des images sources doivent rester préservées.
- Il ne devrait y avoir aucune incohérence dans l'image fusionnée.
- Le bruit et les informations non pertinentes doivent être supprimés, ou minimisés autant que possible.

Néanmoins, les images sources observées sont fatalement corrompues par le bruit lors du processus de collecte, d'acquisition, de transmission et de stockage des images. Dans le but d'obtenir une image de bonne et de haute qualité, il est primordial de débruiter et fusionner conjointement les images source.

## 2.2 La méthode ADMM

### 2.2.1 Généralisation de la méthode ADMM

La méthode ADMM est une méthode de résolution numérique d'un problème d'optimisation convexe, qui consiste à décomposer un problème de grande taille en sous-problèmes plus petits et plus facile. Cette méthode consiste à introduire des variables supplémentaire pour obtenir une formulation équivalente du problème initiale et le résoudre de manière itérative en alternant la minimisation des deux parties, en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Cette méthode est populaire en raison de sa simplicité et de sa robustesse et de sa rapidité de convergence, et en particulier pour les problèmes de grande taille. Il est souvent utilisé pour résoudre des problèmes de fusion d'images qui impliquent des termes de régularisation, tels que la régularisation TV.

L'utilisation de l'ADMM pour la fusion d'image peut améliorer les performances de la méthode de fusion par domaine spatial ou la méthode de fusion par domaine transformée, en utilisant l'impact du bruit et en préservant les bords nets de l'image. L'ADMM peut également être utilisée pour résoudre des problème de fusion d'image plus complexes.

## 2.2.2 Une description de la méthode ADMM

La méthode ADMM suit les étapes suivantes :

1. Donner une formulation du problème.
2. Introduire des variables auxiliaires.
3. La décomposition du problème en sous problèmes.
4. Le calcul des itérations.
5. La mise à jour des multiplicateurs de Lagrange.
6. Le critère d'arrêt.

## 2.2.3 L'algorithme de la méthode ADMM

**Algorithme 2.1 :**

1. *Initialisation de  $u^0$ ,  $z^0$  et  $p_i^0$ , la définition de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ .  
-Définir les multiplicateurs de Lagrangiens  $p_i$ .*
2. *Calcule des  $u^{k+1}$ ,  $z^{k+1}$ ,  $p_i^{k+1}$ .*
3. *Critère d'arrêt.  
-Vérification de la convergence.*
4. *Le renvoi de la solution optimale.*

## 2.3 Les modèles variationnels

Dans l'intention de réduire l'influence de bruit des images sources, nous intégrons la régularisation TV qui est définie comme l'intégrale de la valeur absolue du gradient comme :  $\int_{\Omega} |Du| dx$ . La régularisation TV est formulée sur la base de l'observation des signaux d'image non fiables.

Pour mesurer l'exigence, on propose deux modèles variationnels et on utilise deux normes différentes pour calculer la différence entre  $D^{\gamma}u$  et la caractéristique cible  $v$ .

### 2.3.1 Le modèle TVL1 (la variation totale en norme une)

#### Principe

C'est un algorithme utilisé dans le traitement d'images pour la restauration des images bruitées. Il est basé sur la régularisation TV et la minimisation de la norme  $L^1$ .

Il est utilisé dans le but de réduire le bruit tout en préservant les contours et les détails importants dans l'image. Ce modèle prend en considération la fusion et le débruitage des images en même temps. Il est représenté par l'équation suivante :

$$\min_{u \in BV^{\gamma}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| + \alpha \int_{\Omega} |D^{\gamma}u - v| dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx \quad (2.1)$$

tel que :

- $\alpha, \beta$  : des paramètres de régularisation positifs qui contrôlent l'équilibre entre les trois termes du modèle.
- $v$  : la caractéristique de gradient d'ordre fractionnaire cible.
- $u$  : une image prédéfinie, ( $u$  est considéré comme une fonction).
- $\int_{\Omega} |Du|$  : la régularisation TV telle que :

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \zeta dx / \zeta \in (C_0^{\infty}(\Omega))^2, \|\zeta\|_{\infty} \leq 1 \right\}$$

## L'algorithme du problème de minimisation TVL1

Pour résoudre le modèle **TVL1**, on applique l'algorithme **ADMM** et on donne la formule discrète suivante :

$$\min_{u \in \mathfrak{R}^{n \times n}} \|Du\|_1 + \alpha \|D^\gamma u - v\|_1 + \frac{\beta}{2} \|u - u_0\|_F^2 \quad (2.2)$$

Nous introduisons deux variables auxiliaires  $h \in \mathfrak{R}^{2n \times n}$  et  $t \in \mathfrak{R}^{2n \times n}$  telles que  $h = Du$  et  $t = D^\gamma u - v$  et nous réécrivons la formule précédente **(2.2)** comme :

$$\min_{u, h, t} \|h\|_1 + \alpha \|t\|_1 + \frac{\beta}{2} \|u - u_0\|_F^2 \quad (2.3)$$

Alors, la fonction Lagrangienne augmentée correspondante à la formule **(2.3)** est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, h, t, p_1, p_2) = & \|h\|_1 + \alpha \|t\|_1 + \frac{\beta}{2} \|u - u_0\|_F^2 + \langle p_1, Du - h \rangle + \frac{\delta}{2} \|Du - h\|_F^2 \\ & + \langle p_2, D^\gamma u - v - t \rangle + \frac{\delta}{2} \|D^\gamma u - v - t\|_F^2 \end{aligned}$$

où :

- $p_1 \in \mathfrak{R}^{2n \times n}$  et  $p_2 \in \mathfrak{R}^{2n \times n}$  : désignent les multiplicateurs de Lagrange.
- $\delta$  : est le paramètre de pénalité positif.
- $\|\cdot\|_F$  : est la norme de Frobenius.
- $u$  : est définie comme matrice.



**Algorithme 2.2** *L'algorithme ADMM pour la résolution (2.2)*

— Initialisez  $u^0, h^0, t^0, p_1^0$  et  $p_2^0$ , définir les paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

— Calculez  $u^{k+1}, h^{k+1}, t^{k+1}, p_1^{k+1}$  et  $p_2^{k+1}$  alternativement.

1. Calculez  $h^{k+1}$  et  $t^{k+1}$  en appliquant l'opérateur de retrait doux :

$$h^{k+1} = \text{shrink}(Du^k + \frac{p_1^k}{\delta}, \frac{1}{\delta})$$

$$t^{k+1} = \text{shrink}(D^\gamma u^k - v + \frac{p_2^k}{\delta}, \frac{\alpha}{\delta})$$

2. Calculez  $u^{k+1}$  en appliquant la méthode CG pour résoudre l'équation linéaire suivant :

$$(\delta(D^\gamma)^\top D^\gamma + \delta D^\top D + \beta I)u = \delta(D^\gamma)^\top (v + t^{k+1} - p_2^k) + D^\top (\delta h^{k+1} - p_1^k) + \beta u_0$$

3. Mettez à jour les multiplicateurs lagrangiens :

$$p_1^{k+1} = p_1^k + \tau \delta (Du^{k+1} - h^{k+1})$$

$$p_2^{k+1} = p_2^k + \tau \delta (D^\gamma u^{k+1} - v - t^{k+1})$$

— Arrêtez ou réglez  $k = k + 1$  et revenez à l'étape 2.

### 2.3.2 Le modèle TVL2 (la variation totale en norme deux)

#### Principe

C'est un modèle de régularisation utilisé dans le traitement d'images, visant à minimiser la variation totale de l'image en utilisant la norme  $L^2$ . Il est défini comme :

$$\min_{u \in BV^\gamma(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(u) = \int_{\Omega} |Du| dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |D^\gamma u - v|^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx \quad (2.4)$$

tel que :

- $\alpha, \beta$  : des paramètres de régularisation positifs qui contrôlent l'équilibre entre les trois termes du modèle.
- $v$  : la caractéristique de gradient d'ordre fractionnaire cible.
- $u$  : une image prédéfinie, ( $u$  est considéré comme une fonction).
- $\int_{\Omega} |Du|$  : la régularisation TV.

#### L'algorithme du problème de minimisation TVL2

Pour le modèle TVL2, on se basons sur la forme discrète suivante :

$$\min_{u \in \mathbb{R}^{n \times n}} \|Du\|_1 + \frac{\alpha}{2} \|D^\gamma u - v\|_F^2 + \frac{\beta}{2} \|u - u_0\|_F^2 \quad (2.5)$$

tel que :

- $u \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  une image en niveaux de gris ( $u$  est considéré comme une matrice).
- $\|\cdot\|_F$  est la norme de Frobenius.

- $Du = \begin{pmatrix} Nu \\ uN^\top \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n \times n}$  ou  $N = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$

D'où, on a  $\|Du\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{(Nu)_{i,j}^2 + (uN^\top)_{i,j}^2}$

Dans le but d'appliquer l'algorithme **ADMM**, nous introduisons une variable auxiliaire  $z \in \mathfrak{R}^{2n \times n}$  tel que  $z = Du$ , et on aura

$$\min_{u \in \mathfrak{R}^{n \times n}, z \in \mathfrak{R}^{2n \times n}} \|z\|_1 + \frac{\alpha}{2} \|D^\gamma u - v\|_F^2 + \frac{\beta}{2} \|u - u_0\|_F^2 \quad (2.6)$$

Soit  $p \in \mathfrak{R}^{2n \times n}$  le multiplicateur de Lagrange pour la contrainte linéaire  $z = Du$ , et  $\mathcal{L}(u, z, p)$  la fonction de Lagrange augmentée correspondante telle que :

$$\mathcal{L}(u, z, p) = \|z\|_1 + \frac{\alpha}{2} \|D^\gamma u - v\|_F^2 + \frac{\beta}{2} \|u - u_0\|_F^2 + \langle p, Du - z \rangle + \frac{\delta}{2} \|Du - z\|_F^2$$

ou  $\delta > 0$  est la paramètre de pénalité.

Les sous problèmes par rapport à  $u$  et  $z$  sont résolus alternativement dans le cadre de l'algorithme **ADMM**, la solution du sous-problème  $z$  a une solution de forme fermée, qui peut être obtenue après l'application de l'opérateur de retrait doux.

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= \arg_z \min \|z\|_1 + \frac{\delta}{2} \|Du^k - z + \frac{p^k}{\delta}\|_F^2 \\ &= \mathit{shrink}(Du^k + \frac{p^k}{\delta}, \frac{1}{\delta}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

où  $shrink(x, p) = \max(\|x\|_F - p, 0) \frac{x}{\|x\|_F}$ , tel que  $0 \frac{0}{0} = 0$ .

Le problème de minimisation pour le sous-problème  $u$  est :

$$u^{k+1} = \arg_u \min \frac{\alpha}{2} \|D^\gamma u - v\|_F^2 + \frac{\beta}{2} \|u - u_0\|_F^2 + \langle p^k, Du - z^{k+1} \rangle + \frac{\delta}{2} \|Du - z^{k+1}\|_F^2.$$

Sur la base de la condition d'optimalité du premier ordre, la solution doit satisfaire l'équation linéaire suivante :

$$(\alpha(D^\gamma)^\top D^\gamma + \delta D^\top D + \beta I)u = \alpha(D^\gamma)^\top v + D^\top(\delta z^{k+1} - p^k) + \beta u_0.$$

Selon les définitions des opérateurs  $D$  et  $D^\gamma$ , on obtient l'équation linéaire qui peut être résolue par la méthode du gradient conjugué suivante :

$$(\alpha M^2 + \delta N^\top N + \beta I)u + u(\alpha M^2 + \delta N^\top N) = \alpha(D^\gamma)^\top v + D^\top(\delta z^{k+1} - p^k) + \beta u_0. \quad (2.8)$$

D'où l'algorithme **ADMM** converge pour le modèle **TVL2** pour le paramètre  $\delta > 0$  et  $\tau \in (0, \frac{\sqrt{5} + 1}{2})$ , avec  $\tau$  est le paramètre qui contrôle la vitesse de convergence.

**Algorithme 2.3** *L'algorithme ADMM pour la résolution (2.5)*

— Initialisez  $u^0, z^0$  et  $p^0$ , définir les paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

— Calculez  $u^{k+1}, z^{k+1}$  et  $p^{k+1}$  alternativement.

1. Calculez  $z^{k+1}$  en appliquant l'opérateur de retrait doux comme dans (2.7)

2. Calculez  $u^{k+1}$  en appliquant la méthode CG pour résoudre l'équation linéaire (2.8).

3. Mettez à jour les multiplicateurs lagrangiens :

$$p^{k+1} = p^k + \tau\delta(Du^{k+1} - z^{k+1})$$

— Arrêtez ou réglez  $k = k + 1$  et revenez à l'étape 2.

Les seconds termes dans les deux modèles sont exploités pour combiner des caractéristiques saillantes à partir des images sources en fonction des dérivées d'ordre fractionnaire, et le terme d'ajustement  $\int_{\Omega} \|u - u_0\|^2 dx$  dépend d'une image prédéfinie telle que la qualité de  $u_0$  à un effet direct sur la capacité des méthodes de fusion des images.

## 2.4 Théorème de l'existence et de l'unicité

**Théorème 2.4** *supposons que  $u_0 \in BV^\gamma(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  et  $v$  a une mesure de Radon à valeur vectorielle finie, alors le problème de minimisation dans (TVL2) admet un unique minimiseur  $u^* \in BV^\gamma(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .*

**Démonstration.** Afin de prouver l'existence et l'unicité d'une solution, on pose d'abord  $\{u^k\} \subset BV^\gamma(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  comme suite minimisante de (TVL2).

On a  $E(0)$  est finie, car pour  $u = 0$ ,  
on aura :

$$\int_{\Omega} |Du| = 0.$$

Et  $\int_{\Omega} |D^\gamma u - v| dx = \int_{\Omega} |v| dx$  est finie (mesure de Radon).

Et  $\int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx = \int_{\Omega} |u_0|^2 dx$  est finie.

Et on a  $E(u)$  est positif, car :  $\alpha$  et  $\beta$  sont positifs.  
alors

$$|D^\gamma u - v|^2 \geq 0.$$

d'ou

$$\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |D^\gamma u - v|^2 dx \geq 0$$

et

$$|u - u_0|^2 \geq 0.$$

D'ou

$$\frac{\beta}{2} \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx \geq 0.$$

Et  $\int_{\Omega} |Du|$  finie.

D'où le minimum de la fonction énergétique  $E(u)$  est également fini.

Autrement dit, il existe une constante positive  $C$ . Telle que :

$$E(u^k) = \int_{\Omega} |Du^k| + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |D^\gamma u^k - v|^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} |u^k - u_0|^2 dx \leq C$$

Puisque  $v$  la mesure de Radon à valeur vectorielle finie, alors :

$$\int_{\Omega} |v| = \sup\left\{ \int_{\Omega} v\psi dx / \psi \in k \right\} < +\infty,$$

telle que

$$k = \{\psi \in (C_0^\infty(\Omega))^2, \|\psi\|_\infty \leq 1\}.$$

On a

$$\int_{\Omega} |D^\gamma u^k - v| dx \leq \int_{\Omega} (|D^\gamma u^k| + |v|) dx.$$

Alors

$$\int_{\Omega} |D^\gamma u^k - v| dx \leq \int_{\Omega} |D^\gamma u^k| dx + \int_{\Omega} |v| dx.$$

Comme

$$\int_{\Omega} |D^\gamma u^k| dx = \sup\left\{ \int_{\Omega} -u^k \operatorname{div}^\gamma \psi dx / \psi \in k \right\}$$

et

$$\int_{\Omega} |v| dx = \sup\left\{ \int_{\Omega} v\psi dx / \psi \in k \right\},$$

donc

$$\int_{\Omega} |D^\gamma u^k - v| dx \leq \sup\left\{ \int_{\Omega} -u^k \operatorname{div}^\gamma \psi dx / \psi \in k \right\} + \sup\left\{ \int_{\Omega} v\psi dx / \psi \in k \right\}$$

$$\int_{\Omega} |D^\gamma u^k - v| dx \leq \sup\left\{ \int_{\Omega} -u^k \operatorname{div}^\gamma \psi dx + \int_{\Omega} v\psi dx / \psi \in k \right\}$$

$$\int_{\Omega} |D^\gamma u^k - v| dx \leq \sup\left\{ \int_{\Omega} (-u^k \operatorname{div}^\gamma \psi + v\psi) dx / \psi \in k \right\}.$$

Du fait que

$$\int_{\Omega} |D^\gamma u^k - v| dx = \sup\left\{ \int_{\Omega} (-u^k \operatorname{div}^\gamma \psi + v\psi) dx / \psi \in k \right\}.$$

Alors  $\int_{\Omega} |D^{\gamma}u^k - v|dx$  est fini.

Il  $\exists C1 > 0$

tel que

$$\int_{\Omega} |D^{\gamma}u^k - v|dx \leq C1.$$

Et on a

$$\int_{\Omega} |D^{\gamma}u^k| = \int_{\Omega} |D^{\gamma}u^k - v + v|$$

$$\int_{\Omega} |D^{\gamma}u^k| \leq \int_{\Omega} (|D^{\gamma}u^k - v| + |v|)$$

$$\int_{\Omega} |D^{\gamma}u^k| \leq \int_{\Omega} |D^{\gamma}u^k - v|dx + \int_{\Omega} |v|.$$

$v$  est la mesure de Radon. Donc  $\exists C2 > 0$  telle que :

$$\int_{\Omega} |v| \leq C2.$$

Soit  $C = C1 + C2$  alors on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega} |D^{\gamma}u^k| \leq \int_{\Omega} |D^{\gamma}u^k - v|dx + \int_{\Omega} |v| \leq C1 + C2.$$

Alors

$$\int_{\Omega} |D^{\gamma}u^k| \leq \int_{\Omega} |D^{\gamma}u^k - v|dx + \int_{\Omega} |v| \leq C \tag{2.9}$$

Puisque  $E(u^k) \leq C$ , on'a

$$\int_{\Omega} |u^k - u_0|^2 dx \leq C.$$

De plus, selon  $u_0 \in L^2$ , et  $L^2 \subset L^1$  on en déduit que :

$$\int_{\Omega} |u^k|^2 dx \leq C \implies \int_{\Omega} |u^k| dx \leq C. \tag{2.10}$$

En fusionnant **(2.9)** et **(2.10)**, on aura  $\{u^k\}$  borné dans  $BV^{\gamma}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .



Basé sur la topologie faible de  $BV^\gamma(\Omega)$  et la réflexivité de  $L^2(\Omega)$ , il existe une sous-suite qui converge vers :  $u^* \in BV^\gamma(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  telle que :

$$u^k \xrightarrow{BV^\gamma - v^*} u^* \quad \text{et} \quad u^k \xrightarrow{L^2(\Omega)} u^*.$$

En raison de la plus faible semi-continuité de **TV** et de la variation totale d'ordre fractionnaire, nous avons

$$\int_{\Omega} |Du^*| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du^k|$$

$$\int_{\Omega} |D^\gamma u^* - v|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D^\gamma u^k - v|^2.$$

Par conséquent, d'après le lemme de Fatou, on peut conclure que

$$E(u^*) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E(u^k)$$

et  $u^*$  est un minimiser de **TVL2**.

De plus, puisque la fonction énergétique  $E(u)$  est évidemment strictement convexe, le minimiser  $u^*$  est unique. □

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons constaté l'importance de la fusion d'images dans le domaine du traitement d'images, nous avons étudié la méthode ADMM et les deux modèles variationnels TVL1 et TVL2. De plus, nous avons abordé le théorème d'existence et d'unicité.

# Chapitre 3

## Etude numérique du problème de fusion d'images

### 3.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous présentons les résultats de l'application des algorithmes des modèles **TVL1** et **TVL2** sur une image test et leurs efficacités et performances tout en utilisant la méthode **ADMM**, et nous comparons ces modèles avec d'autres modèles **WTV** et **FSG** en étudiant les valeurs de **QMI** et **QP** de l'image.

### 3.2 expériences numériques

Réellement, en considérant de l'absence de la véritable image originale, il est pénible de mesurer quantitativement la qualité des résultats d'images fusionnées. Dans l'intention de les évaluer nous considérons deux métriques objectives de fusion, la métrique d'information mutuelle **QMI** et la métrique de congruence de phase **QP**, telles que :

$$Q_{MI} = MI(u^*, f_1) + MI(u^*, f_2) \quad \text{et} \quad Q_P = P_P \cdot P_M \cdot P_m$$

ou :

$$MI(x, y) = H(x) + H(y) - H(x, y).$$

$$H(x) = -\sum_x p(x) \log_2 p(x) \quad \text{et} \quad H(x, y) = -\sum_{x,y} p(x, y) \log_2 p(x, y).$$

$$P_P = \max\{C_{f_1, u^*}^P, C_{f_2, u^*}^P, C_{s, u^*}^P\}, \quad P_M = \max\{C_{f_1, u^*}^M, C_{f_2, u^*}^M, C_{s, u^*}^M\} \quad \text{et} \quad P_m = \max\{C_{f_1, u^*}^m, C_{f_2, u^*}^m, C_{s, u^*}^m\}.$$

$$C_{x,y}^k = \frac{\sigma_{xy}^k + C}{\sigma_x^k \sigma_y^k + C}.$$

Dans le but de montrer la potentialité des modèles **TVL1** et **TVL2**, nous examinons les valeurs **QMI** et **QP** pour l'image **cameraman** qui est floue et bruitée avec un écart type égale à 2 et un niveau de bruit  $\sigma = \{15, 20, 25, 30\}$ . Nous comparons les résultats des quatre méthodes et nous les listons dans le tableau suivant.

TABLE 3.1 – Les valeurs de **QMI** et **QP** de l'image **Cameraman**

	QMI	QMI	QMI	QMI	QP	QP	QP	QP
bruit	FSG	WTV	TVL1	TVL2	FSG	WTV	TVL1	TVL2
15	5.8297	5.8548	6.0030	6.0384	0.5053	0.4955	0.5232	0.5225
20	5.5549	5.6269	5.7807	5.8035	0.4297	0.4353	0.4463	0.4519
25	5.2479	5.4410	5.6076	5.6160	0.3702	0.3935	0.4012	0.4050
30	4.9419	5.2760	5.4735	5.4823	0.3194	0.3583	0.3660	0.3647

D'après le **tableau 1**, les valeurs de **QMI** et **QP** de le modèle **TVL1** et le modèle **TVL2** surpasse les valeurs des deux autres modèles **FSG** et **WTV**.

A propos de le modèle **TVL2** est légèrement meilleur que le modèle **TVL1**, car les valeurs de **QMI** et **QP** de le modèle **TVL2** sont supérieure au valeurs de le modèle **TVL1**.

Dans la suite, Nous présentons les résultats obtenus de la fusion d'image **Cameraman** sous un niveau de bruit  $\sigma = 30$  avec les quatre méthodes différentes.



FIGURE 3.1 – Comparaison des différents modèles de fusion des images source bruitées.

La première image représente l'image originale, la deuxième et la troisième expriment deux images sources bruitée. La deuxième est bruitée à gauche et la troisième est bruitée à droite avec un niveau de bruit  $\sigma = 30$ , la quatrième correspond au modèle **FSG**, la cinquième est traitée avec le modèle **WTV**, et les deux dernières images sixième et septième sont abordées avec les modèles **TVL1** et **TVL2** respectivement .

D'après la FIGURE 3.1 en conclut que le modèle **TVL1** et le modèle **TVL2** produisent de meilleurs résultats que les modèles **FSG** et **WTV**, car les images obtenues ont une qualité plus net et plus claire que les autres modèles.

Pour plus de précisions, on utilise le détecteur de bord astucieux, a fin de confirmer la comparaison, et comme résultat en obtiens la figure suivante.

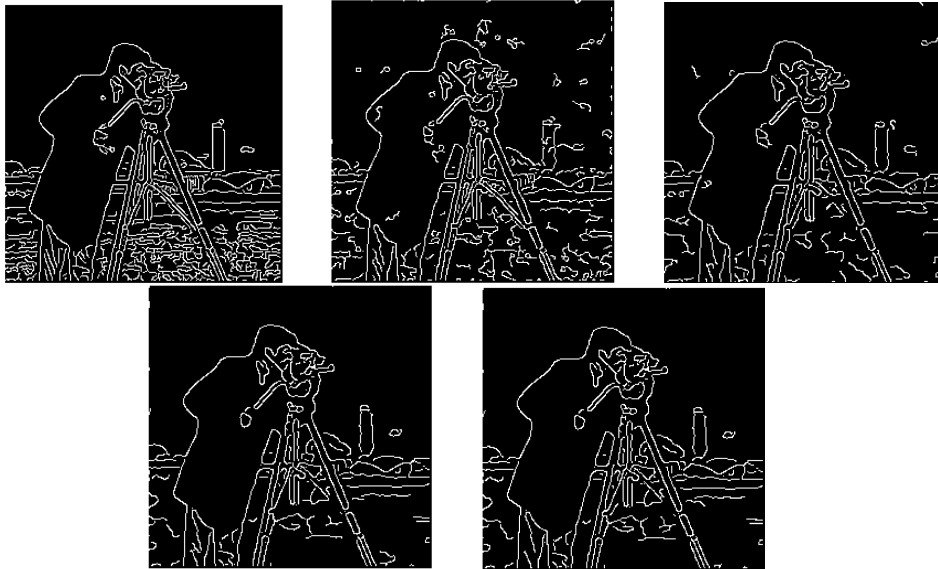


FIGURE 3.2 – Carte de bord des images fusionnées de la FIGURE 3.1 en utilisant le détecteur de bord astucieux.

D'après les cartes de bord, les modèles TVL1 et TVL2 sont efficaces pour fusionner des images bruitées. Plus précisément, le modèle TVL2 surpasse les trois autres modèles, car elle n'a pas de mauvais bords dans la région du ciel et du manteau noir.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les résultats numériques de l'étude théorique du chapitre précédent et nous avons fait une comparaison entre les modèles **TVL1** et **TVL2** avec les modèles **FSG** et **WTV**, tout en utilisant la méthode **ADMM**.

Les résultats montrent que le modèle **TVL2** est le meilleur pour la fusion, car la régularisation TV utilisée peut supprimer efficacement le bruit tout en préservant les arrêtes vives et la dérivée d'ordre fractionnaire représente efficacement les caractéristiques de l'image, dans le terme de fidélité de fusion, afin qu'elle puisse conserver le lissage dans des régions homogènes avec des caractéristiques d'image nettes.

# Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons abordé deux modèles variationnels utilisés pour résoudre le problème de fusion d'images avec débruitage : le modèle **TVL1** (La variation totale en norme une) et le modèle **TVL2** (La variation totale en norme deux).

Ces deux modèles intègrent à la fois la régularisation de la variation total **TV** et la minimisation des normes  $L^1$  et  $L^2$  pour obtenir une image fusionnée et débruitée de haute qualité.

Nous avons également exploiter la méthode **ADMM** (la méthode des multiplicateurs à direction alternée), qui est une technique de résolution numérique des problèmes d'optimisation convexes. L'**ADMM** est utilisé pour les modèles variationnels afin de résoudre les problèmes de fusion d'images en introduisant des variables auxiliaires, et en décomposant le problème en sous-problèmes plus simples.

A la fin de ce travail, on conclut que la fusion d'images et le débruitage sont des techniques très importantes pour la restauration d'image, car ils permette améliorer la qualité et l'utilité des images dans de nombreux domaines d'applications. Les modèles variationnels, associés à la méthode ADMM, constituent une approche efficace pour résoudre ces problèmes, en offrant des solutions de haute qualité tout en préservant les caractéristiques importantes des images sources.

# Bibliographie

- [1] HACHAMA Mohamed, cours : M1 -AMA- *Introduction Au Traitement D'image*.
- [2] Abdelhamid KAAZAOUI, Khald KAAZAOUI, *La fusion d'image multifocale.*, Université Ahmed Draria - Adrar, **62** (2018).
- [3] Fabrice MULLER et Stanislas DE BÉTHUNE, *LA FUSION D'IMAGES*. Téléchargé depuis : [www.bsglg.be](http://www.bsglg.be), **16** Bulletin de la Société Géographique de Liège, 38, 2000/1, 79-94.
- [4] Rabia Zafar, Muhammad Shahid Farid, Muhammad Hassan Khan, *Multi-Focus Image Fusion : Algorithms, Evaluation, and a Library.*, j. of Imaging, **21** (2020).
- [5] Jin-Jin Mei, Yiqiu Dong, Ting-Zhu Huang, *Simultaneous image fusion and denoising by using fractional-order gradient information.*, j. of Computational and Applied Mathematics, **24** (2018).
- [6] Wiem FOURATI et Mohamed Salim BOUHLEL, *Techniques de débruitage d'Images.*, L'Unité Sciences et Technologies de l'Image et des Télécommunications SETIT, ISBS Sfax-TUNISIE, **4**(2009).
- [7] Rick S, Blum and Zheng Liu, *Multi-Sensor Image Fusion and Its Applications.*, Taylor & Francis Group, **79**(2006).
- [8] Jianping Zhang and Ke Chen, *A Total Fractional-Order Variation Model for Image Restoration whith Non-homogeneous Boundary Conditions and its Numerical Solution.*, SIAM j. IMAGING SCIENCES, **26** Vol.8, No.4, pp.2487-2518, (2015).
- [9] Junfeng Yang, Wotao Yin, Yin Zhang, *A Fast Alternating direction Method for TVL1-L2 Signal Reconstruction From Partial Fourier Data.*, j. of Selected Topics in Signal Processing, **10** (2010).



- [10] Feng Shi, Jian Cheng, Li Wang, Pew-Thian Yap, and Dinggang Shen, *Low-Rank Total Variation for Image Super-Resolution.*, cite : dgshen@med.unc.edu , 8 MICCAI 2013, Part I, LNCS 8149,pp.155-162(2013).