

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ BLIDA 1



FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation Stochastique et Statistiques

*Thème :*

---

ÉTUDE DES FILES D'ATTENTE FLOUES  
PAR  
LA TECHNIQUE DE CLASSIFICATION ROBUSTE

---

*Présentée Par :*

BOURAHLA SOUMIA MANELLE et MEHNOUNE SIRINE

*Les Membres du jury :*

Présidente :	M <sup>me</sup> DAHMANE ZINEB	M.C.B	U.S.D.BLIDA1
Encadreur :	M <sup>me</sup> BOUSSAHA ZINA	M.A.A	A.M.D.P H.B CHERCHELL
Examinatrice :	M <sup>me</sup> BOUKOFTANE AMINA	M.A.A	U.S.D.BLIDA1

2023 / 2024

# REMERCIEMENTS

À l'achèvement de ce mémoire, nous voulons avant tout exprimer notre infinie reconnaissance à l'Éternel. Sa grâce omniprésente et les bienfaits qu'il nous a prodigués en nous accordant santé, sagesse et persévérance, ont été des soutiens inestimables tout au long de notre parcours de recherche. Sans sa bénédiction, ce travail n'aurait pu voir le jour.

Nous exprimons notre profonde gratitude à notre directrice de mémoire, Madame BOUSSAHA ZINA, pour son encadrement, son soutien, sa disponibilité et ses précieux conseils. Nous remercions également toutes les personnes ayant contribué à la réalisation de ce mémoire.

Nos sincères remerciements vont aux membres du jury, particulièrement Madame DAHMANE ZINEB et Madame BOUKOFTANE AMINA, pour leur temps, leurs remarques constructives et leur évaluation de notre projet.

Nous souhaitons exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à Madame OUKID NADIA. Sa guidance éclairée, sa disponibilité constante et son dévouement sans failles ont été des piliers essentiels tout au long de nos années de Master. Par son expertise et sa passion pour l'enseignement, elle a su non seulement enrichir nos connaissances mais aussi inspirer notre ambition. Son soutien indéfectible et ses conseils avisés ont été des éléments déterminants pour la réussite de notre formation. Nous lui devons une immense reconnaissance pour son engagement et sa contribution inestimable à notre développement académique et professionnel.

Nous exprimons notre gratitude à tous les enseignants et le personnel administratif de SAAD DAHLEB BLIDA 1 pour leur soutien tout au long de notre parcours académique, ainsi qu'à nos collègues et amis pour leur encouragement et leur aide.

Enfin, nous remercions du fond du cœur nos familles pour leur soutien constant, leur compréhension et leur patience. Leur amour et leur confiance en nous ont été une source de motivation permanente.

*À tous, merci infiniment.*

# Dédicace

À ma précieuse **maman**, source éternelle de réconfort et de soutien, celle qui a su être mon roc dans les moments difficiles et mon rayon de soleil dans les jours sombres. Ta bienveillance, ta douceur et ta compréhension ont toujours illuminé mon chemin et réchauffé mon cœur.

À mon cher **papa**, qui m'a appris que la patience est la clé du succès et de la victoire. Ta persévérance, tes encouragements constants, et ta foi inébranlable en mes capacités m'ont portée vers de nouveaux horizons. Merci pour tout ce que tu as fait et continues de faire pour moi.

À mes chères sœurs, Naima, Meriem et Mina. À **Naima**, ma sœur aînée, dont la force et le courage m'ont inspirée à chaque étape de ma vie, et qui m'a guidée avec bienveillance, me montrant l'importance du lien familial. À **Meriem**, ma seconde sœur, douce et attentionnée, qui a su réchauffer mon cœur de son amour inconditionnel et de ses gestes tendres, m'enveloppant toujours de sa chaleur et de son réconfort. À **Mina**, ma complice de rires et gardienne de mes secrets, qui a su égayer mes journées par sa présence joyeuse et pleine de vie. Merci pour votre amour, votre soutien et vos précieux conseils. Vous êtes mes piliers et mon inspiration.

À mes **nièces** adorées. Vous, mes petits monstres, qui ne me laissez jamais tranquille, apportez une lumière et une joie incroyables à mon quotidien. Votre innocence enfantine et votre vivacité sont des sources inépuisables de bonheur et de tendresse.

À mes **camarades de classe** et à ma **famille proche**, compagnons de mes joies et de mes peines, vous avez enrichi ma vie de tant de moments inoubliables et de rires partagés.

Que Dieu vous protège tous, vous accorde santé, prospérité et une longue vie. Vous êtes mes piliers, et je vous aime profondément.

# Dédicace

وَ آخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ

Le voyage n'a pas été court et il ne devait pas l'être. Le rêve n'était pas proche, ni le chemin parsemé de facilités, mais je l'ai fait. Louange à Dieu qui a facilité les débuts et nous a permis d'atteindre les fins.

Je dédie ce succès à moi-même d'abord, à moi-même ambitieuse, à moi-même grande et forte qui a surmonté tous les obstacles et a continué malgré les difficultés. J'ai commencé avec ambition et j'ai terminé avec succès. Ensuite, à tous ceux qui ont œuvré avec moi pour mener à bien mon parcours universitaire.

À celui dont je porte le nom avec fierté, à celui qui a préparé le chemin par son labeur et son sacrifice, et à la femme qui a fait de moi une jeune fille ambitieuse aimant les défis et les difficultés, mon premier modèle. À ceux qui nous ont entourés d'amour et ont supporté avec nous les difficultés du chemin, aux mains pures qui ont enlevé les épines de l'échec de mon chemin, à ceux qui m'ont soutenue avec amour dans mes moments de faiblesse, à ceux qui ont dessiné l'avenir avec des lignes de confiance et d'amour. À ceux à qui j'avais promis ce succès, me voici, j'ai tenu ma promesse et je vous le dédie, **maman** et **papa**.

À l'épaule qui ne se penche pas et à l'ombre sous laquelle je me protège, aux cœurs qui battent avec sincérité et émotion, aux piliers solides de la vie. À ceux qui ont cru en moi et en mes capacités, **mon frère MOHAMED** et **ma sœur NEDJLA**.

Aux amis des années et des épreuves, aux inspirateurs de mon succès, à ceux qui m'ont tendu la main quand j'en avais besoin.

MEHNOUNE

SIRINE

# Abstract

This thesis explores the application of robust classification techniques to the study of fuzzy queues. By examining the technique on a fuzzy priority queue, we have demonstrated that the use of a robust classification technique for the defuzzification of fuzzy queues is of considerable interest due to its ability to handle uncertainty, its flexibility in modeling, its potential to optimize performance, its ability to reduce decision errors, and its applicability in various fields.

Ultimately, this research aims to contribute to the advancement of knowledge in the field of fuzzy queue management, providing valuable insights for their understanding and practical application.

## **Keywords :**

fuzzy queue, fuzzy number, fuzzy logic, performance measures, alpha-cuts method,  $L - R$  method, Robust Ranking Technique.

# Résumé

Ce mémoire explore l'application de la technique de classification robuste à l'étude des files d'attente floues. En examinant la technique sur une file d'attente floue avec priorité, nous avons prouvé que l'utilisation de la technique de classification robuste pour la défuzzification des files d'attente floues présente un intérêt considérable en raison de sa capacité à gérer l'incertitude, sa flexibilité dans la modélisation, son potentiel d'optimisation des performances, sa capacité à réduire les erreurs de décision et son applicabilité dans divers domaines.

Enfin de compte, cette recherche vise à contribuer à l'avancement des connaissances dans le domaine de la gestion des files d'attente floues, en offrant des perspectives précieuses pour leur compréhension et leur utilisation dans des applications pratiques.

## Mots clés :

file d'attente floue, nombre flou, logique floue, mesures de performance, méthode alpha-cuts, méthode  $L - R$ , technique de classement robuste.

# Liste des abréviations et sigles

N°	Abréviation	Signification
1.	COG	: Center Of Gravity
2.	COM	: Center of Maximum
3.	k-NN	: référence à une version robuste de l'algorithme des k plus proches voisins
4.	L-R	: Left - Right (Gauche-Droite)
5.	MM	: Mean of Maxima
6.	PNLP	: Programmation non linéaire paramétrique
7.	PNLP(s)	: Programme(s) non linéaire(s) paramétrique(s)
8.	SVM	: Support Vector Machines
9.	CMC	: chaîne de Markov classique
10.	CMCED	: Chaîne de Markov à temps continue et à états discrets
11.	i.i.d	: indépendantes et identiquement distribuées
12.	PSC	: Processus Stochastique Classique
13.	FAC	: File d'attente classique
14.	FAF	: File d'attente Floue
15.	PVM	: processus stochastique de vie ou de mort
16.	FIFO	: First In First Out
17.	LIFO	: Last In First Out
18.	PS	: Processor Sharing

# Table des figures

1.1	Représentation graphique de la fonction d'appartenance trapézoïdale . . . . .	8
1.2	Représentation graphique de la fonction d'appartenance triangulaire . . . . .	9
1.3	Représentation graphique de la fonction d'appartenance gaussienne . . . . .	9
1.4	Présentation des Ensembles Flous . . . . .	10
1.5	Intersection de l'ensemble flou et son complément. Union de l'ensemble flou et son complément . . . . .	13
1.6	Zones des éléments de $R^2$ selon leur appartenance à $\tilde{A}$ . . . . .	16
1.7	Graphe de la fonction d'appartenance de l'ensemble flou $\tilde{A}$ . . . . .	17
1.8	Échelle générale d'un contrôleur flou . . . . .	18
1.9	Défussificateur centre de gravité $G(B)$ . . . . .	20
1.10	Défussificateur centre de maximum $C(B)$ . . . . .	20
1.11	Système d'Inférence Floue . . . . .	21
1.12	Image d'un sous-ensemble flou à partir du principe d'extension d'une fonc- tion $f$ . . . . .	25
1.13	Sous-ensemble $\hat{f}(\tilde{A})$ de l'exemple 2.2 . . . . .	27
1.14	niveau $\alpha$ du sous-ensemble flou $\tilde{A}$ . . . . .	35
1.15	niveau $\alpha$ du sous-ensemble flou $\tilde{A}$ . . . . .	35
4.1	Fonction d'appartenance de $\tilde{S}$ . . . . .	87
4.2	Fonction d'appartenance de $\tilde{A}_1$ . . . . .	88
4.3	Fonction d'appartenance de $\tilde{A}_2$ . . . . .	89
4.4	Fonction d'appartenance de $\tilde{A}_3$ . . . . .	90
4.5	Fonction d'appartenance de $\tilde{S}$ . . . . .	93
4.6	Fonction d'appartenance de $\tilde{A}_1$ . . . . .	94
4.7	Fonction d'appartenance de $\tilde{A}_2$ . . . . .	95
4.8	Fonction d'appartenance de $\tilde{A}_3$ . . . . .	96

# Liste des tableaux

1.1 Opérateurs logiques . . . . .	13
-----------------------------------	----

# Table des matières

<b>Remerciement</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Table des figures</b>	<b>vi</b>
<b>Table des tableaux</b>	<b>vii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>viii</b>
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	<b>1</b>
0.1 Motivation . . . . .	1
0.2 Objectif du mémoire . . . . .	1
0.3 Contributions . . . . .	2
0.4 Organisation du mémoire . . . . .	2
<b>1 Chapitre 1. LA LOGIQUE FLOUE</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Définition de la logique floue . . . . .	4
1.3 Chronologie de la Logique Floue . . . . .	5
1.4 Les Applications Pratiques de la Logique Floue . . . . .	5
1.5 Principes de base de la théorie des ensembles flous . . . . .	6
1.5.1 Ensembles classiques et ensembles flous . . . . .	6
1.5.2 Fonction d'appartenance . . . . .	7
1.5.3 Quelques formes de fonctions d'appartenance . . . . .	8
1.5.3.1 Fonction d'appartenance trapézoïdale : . . . . .	8
1.5.3.2 Fonction d'appartenance triangulaire : . . . . .	8
1.5.3.3 Fonction d'appartenance gaussienne : . . . . .	9
1.5.4 Caractéristiques des ensembles flous . . . . .	10
1.5.5 Opérations sur les ensembles flous . . . . .	11
1.5.5.1 Propriétés des opérations sur les ensembles flous . . . . .	12
1.5.5.2 Opérateurs ensemblistes flous . . . . .	13
1.6 Théorie des ensembles flous . . . . .	14
1.7 Analyse de la logique floue et élaboration d'un système de contrôle flou . . .	17

---

1.7.1	Fuzzification . . . . .	17
1.7.2	Module de règle de base . . . . .	18
1.7.3	Module d'inférence floue . . . . .	18
1.7.4	Défuzzification . . . . .	18
1.7.5	Système d'Inférence Floue(SIF) . . . . .	21
1.7.6	Avantages et inconvénients de SIF . . . . .	21
1.7.7	Définition d'un $\alpha$ -cut . . . . .	22
1.7.8	Normalité et Convexité . . . . .	23
1.8	Principe d'extension de Zadeh . . . . .	23
1.9	Nombre flou . . . . .	28
1.9.1	Généralités . . . . .	28
1.9.2	Opérations arithmétiques sur les nombres flous . . . . .	28
1.9.2.1	Arithmétique floue basée sur le principe d'extension . . . . .	29
1.9.2.2	Arithmétique floue par alpha-cuts et intervalles . . . . .	30
1.9.3	Alpha-cuts d'un nombre flou . . . . .	32
1.9.4	Concept de $\alpha$ - cut . . . . .	34
1.9.5	Principe de la méthode $\alpha$ - cut . . . . .	37
1.9.6	Arithmétique sur les nombres flous triangulaires . . . . .	37
1.10	Nombre flou de type $L - R$ (Left - Right) . . . . .	39
1.10.1	Première forme de type $L - R$ . . . . .	40
1.10.2	Notations et appellations : . . . . .	40
1.11	Arithmétique des nombres flous de même type $L - R$ . . . . .	41
1.11.1	Addition et soustraction . . . . .	41
1.11.2	Multiplication des nombres flous de type $L - R$ . . . . .	41
1.11.3	Division des nombres flous de type $L - R$ . . . . .	42
1.11.4	Deuxième forme de type $L - R$ . . . . .	45
1.12	Quelques propriétés de nombres flous triangulaires liées au type $L - R$ . . . . .	45
1.12.1	Propositions . . . . .	45
1.13	Conclusion . . . . .	46
<b>2</b>	<b>chapitre 2. LA MODÉLISATION DES FILES D'ATTENTE FLOUES</b> . . . . .	<b>47</b>
2.1	Introduction . . . . .	47
2.2	Évolution et signification de la théorie des files d'attente . . . . .	48
2.2.1	Présentation et Terminologie d'une file d'attente Classique . . . . .	48
2.2.2	Étude Mathématique d'un Système de Files d'Attente Classique . . . . .	49
2.2.3	Chaîne de Markov classique . . . . .	50
2.3	File d'attente floue . . . . .	51
2.3.1	Les caractéristiques du système de file d'attente floue . . . . .	52
2.4	Chaîne de Markov floue . . . . .	52
2.5	Quelques modèles des files d'attente floues . . . . .	54
2.5.1	Le modèle de file d'attente flou M/F/1 . . . . .	54

---

---

2.5.1.1	Structure de la File d'Attente M/F/1 : . . . . .	54
2.5.1.2	Processus d'Arrivée : . . . . .	54
2.5.1.3	Temps de Service : . . . . .	55
2.5.1.4	Mesures de performance . . . . .	55
2.5.1.5	Système de File d'attente $M/F/1$ avec le principe d'extension de ZADEH . . . . .	56
2.5.2	Modélisation de système F/M/1 par la méthode de alpha-cut . . . . .	59
2.5.2.1	Formulation du problème . . . . .	59
2.6	Modélisation du modèle FM/FM/1 par la methode L-R : . . . . .	61
2.6.1	Nombre de clients et temps d'attente dans une file d'attente classique simple M/M/1 . . . . .	61
2.6.2	Nombre attendu de clients et temps d'attente attendu dans une file d'attente floue . . . . .	62
2.6.2.1	Description de la Méthode utilisée . . . . .	62
2.6.2.2	Formules pour le nombre de client en attente . . . . .	62
2.6.2.3	Quantités de temps d'attente anticipée . . . . .	63
<b>3</b>	<b>chapitre 3. MÉTHODES DE CLASSEMENT FLOUES</b>	<b>66</b>
3.1	Introduction . . . . .	66
3.2	Méthode de l'Abscisse du Centre de Gravité (Abscissa of the Center of Gra- vity Method) . . . . .	67
3.2.1	Formule Mathématique . . . . .	67
3.2.2	Étapes du Calcul . . . . .	67
3.2.3	Exemple Pratique . . . . .	68
3.2.4	Comparaison avec d'Autres Méthodes de Défuzzification . . . . .	68
3.3	Méthode de Comparaison des Centres de Gravité . . . . .	68
3.3.1	Étapes de la Méthode . . . . .	69
3.3.2	Exemple Pratique . . . . .	69
3.4	Comparaison des Avantages et des Inconvénients . . . . .	70
3.4.1	Avantages . . . . .	70
3.4.2	Inconvénients . . . . .	71
3.4.3	Nuances à Considérer . . . . .	71
3.5	Méthode de Classement des Alpha-cuts . . . . .	71
3.5.1	Fonctionnement de la Méthode . . . . .	71
3.5.2	Exemple Pratique . . . . .	72
3.5.3	Avantages et Inconvénients . . . . .	73
3.6	Méthode des Moments pour la Défuzzification . . . . .	73
3.6.1	Fonctionnement de la Méthode . . . . .	73
3.6.2	Calcul des moments . . . . .	73
3.6.3	Exemple Pratique . . . . .	74
3.6.4	Avantages et Inconvénients . . . . .	75

---

---

3.7	Méthode de classement flou basée sur les fonctions d'appartenance . . . . .	75
3.7.1	les fonctions d'appartenance utiliser . . . . .	76
3.7.2	Exemples . . . . .	77
3.7.3	Avantages et Inconvénients . . . . .	77
3.7.3.1	Avantages . . . . .	77
3.7.3.2	Inconvénients . . . . .	77
3.8	Méthode de Dominance Stochastique . . . . .	78
3.8.1	Modèle Mathématique . . . . .	78
3.8.2	Exemple Pratique . . . . .	78
3.8.3	Avantages et Inconvénients . . . . .	78
3.9	Critère Spécifique . . . . .	78
3.9.1	Formule Mathématique . . . . .	79
3.9.2	Exemple Pratique . . . . .	79
3.9.3	Avantages et Inconvénients . . . . .	79
3.10	Robust Ranking Technique – Algorithm . . . . .	79
3.10.1	Avantages et Inconvénients de la Technique de Classification Robuste	80
3.11	Conclusion . . . . .	81
<b>4</b>	<b>chapitre 4. APPLICATION : LA FILE D'ATTENTE <math>FM/FM/1</math> AVEC</b>	
	<b>PRIORITÉ</b>	<b>82</b>
4.1	Introduction . . . . .	82
4.2	Description du modèle avec priorité . . . . .	83
4.2.1	$\alpha$ -cut d'un nombre flou . . . . .	83
4.2.2	Formulation mathématique . . . . .	84
4.3	Application numérique . . . . .	86
4.3.1	Description du Problème . . . . .	86
4.3.2	Pour le nombre Flou trapézoïdal . . . . .	86
4.3.2.1	Calcul des fonctions d'adhésion . . . . .	86
4.3.2.2	Calcul des mesures de performance . . . . .	91
4.3.3	Pour le nombre flou triangulaire . . . . .	92
4.3.3.1	Calcul des fonctions d'adhésion . . . . .	92
4.3.3.2	Calcul des mesures de performances . . . . .	97
4.4	Conclusion . . . . .	98
	<b>L'ANNEXE</b>	<b>99</b>
	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	<b>120</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>121</b>

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce mémoire est destiné à résoudre une problématique qui a pour but la défuzzification des mesures de performance d'une file d'attente floue (FM/FM/1 avec priorité) par la technique de classification robuste. À cet effet, plusieurs solutions seront proposées à l'issue des chapitres présentés dans ce document.

## 0.1 Motivation

Les modèles de files d'attente sont appliqués dans divers domaines tels que le génie des transports, l'industrie des services, la production, les systèmes de communication, les soins de santé et les systèmes de traitement de l'information. Motivée par la nécessité pressante de répondre aux défis complexes posés par les systèmes de files d'attente dans un monde en perpétuelle évolution, cette recherche prend tout son sens face à la variabilité, à l'incertitude et à la dynamique inhérentes à de nombreux environnements réels. Il devient impératif d'adopter des approches plus flexibles et résilientes pour modéliser, analyser et optimiser ces systèmes critiques. C'est dans ce contexte que la présente recherche offre une perspective novatrice et prometteuse pour relever ces défis. En combinant les principes de la théorie des files d'attente floue avec la technique de classification robuste, nous aspirons à ouvrir de nouvelles voies pour une gestion plus efficace des files d'attente, conduisant ainsi à des améliorations tangibles dans divers domaines d'application. Cette motivation sous-tend non seulement notre démarche scientifique, mais également notre engagement à contribuer de manière significative à la résolution des problèmes réels auxquels sont confrontés les praticiens et les décideurs dans un monde en constante mutation.

## 0.2 Objectif du mémoire

L'objectif principal de ce mémoire est d'explorer en profondeur les files d'attente floues en utilisant la technique de classification robuste. Nous visons à comprendre comment cette approche peut être appliquée de manière efficace pour modéliser, analyser et optimiser les systèmes de files d'attente dans divers contextes. À travers cette recherche, nous cherchons à fournir des solutions innovantes et pratiques pour améliorer la gestion des files d'attente, en tenant compte de la nature dynamique et incertaine des environnements réels. En mettant en évidence les avantages et les limites de cette approche, notre objectif est de contribuer à l'avancement des connaissances dans ce domaine et d'offrir des perspectives précieuses pour une utilisation plus large dans des applications pratiques.

---

### 0.3 Contributions

Les contributions de ce mémoire résident dans plusieurs aspects clés. Tout d'abord, nous avons examiné en détail le concept des files d'attente floues et proposé une approche novatrice basée sur la technique de classification robuste pour aborder leur modélisation et leur analyse. En appliquant plusieurs méthodes de classification dans divers scénarios, nous avons montré la pertinence et l'efficacité de la méthode de classification robuste dans la résolution de problèmes réels liés à la gestion des files d'attente. De plus, notre recherche a permis d'identifier les forces et les limites de la méthode de classification robuste dans le contexte des files d'attente floues, offrant ainsi des perspectives précieuses pour son utilisation future. En mettant en évidence les domaines où cette approche excelle et ceux où des améliorations sont nécessaires, nous avons contribué à éclairer le débat sur les meilleures pratiques en matière de modélisation et de gestion des files d'attente dans des environnements complexes et incertains.

### 0.4 Organisation du mémoire

Nous organisons ce mémoire en cinq chapitres que nous présentons dans les lignes qui suivent :

- L'introduction générale nous permet de présenter la problématique détaillée en retraçant l'origine du thème, les motivations et un aperçu de ce qui va suivre.
- Le premier chapitre est destiné à la présentation de la logique floue.
- Le deuxième chapitre introduit la théorie des ensembles flous.
- Le troisième chapitre est consacré aux files d'attente floues ; trois modèles principaux ont été analysés à l'aide de diverses méthodes.
- Le quatrième chapitre examine les méthodes de classification utilisées en logique floue (défuzzification) pour convertir des ensembles flous en valeurs précises.
- Le dernier chapitre est une application de la méthode de classification robuste pour une file d'attente floue FM/FM/1 avec priorité.
- Enfin, une conclusion.

# La Logique Floue

## 1.1 Introduction

Pendant de nombreux siècles, l'incertitude a été un sujet de préoccupation pour les chercheurs et les philosophes, remontant à l'aube de la pensée. La quête de la vérité, de ce qui est, de ce qui existe, a été débattue à travers les âges. Cette incertitude se manifeste également dans notre recherche actuelle, où nous cherchons à comprendre et à modéliser des phénomènes complexes et flous.

Le terme "flou" désigne ce qui manque de précision ou de netteté, ce qui est vague et indéterminé.

Dans la logique binaire traditionnelle, les propositions sont catégorisées comme vraies ou fausses, sans possibilité de nuance. Cependant, la nature des phénomènes naturels et des systèmes complexes est souvent bien plus nuancée et difficile à définir de manière catégorique. C'est là que la logique floue entre en jeu, offrant un cadre plus flexible pour traiter l'incertitude et l'imprécision dans le raisonnement.

La logique floue, introduite par Lotfi Zadeh dans les années 1960, repose sur le concept d'ensembles flous, permettant aux propositions d'avoir des valeurs de vérité allant de 0 à 1, avec une gamme continue de valeurs intermédiaires. Cette approche correspond mieux à la réalité des phénomènes naturels, où les distinctions entre les catégories sont souvent floues et subjectives. En linguistique, cette ambiguïté se manifeste dans des termes tels que "grand" ou "petit", dont la signification peut varier en fonction du contexte et des perspectives individuelles. La logique floue offre un cadre formel pour modéliser cette imprécision et cette ambiguïté, en fournissant des outils mathématiques pour analyser des concepts vagues et flexibles.

Les applications de la logique floue sont vastes, allant de l'ingénierie et de la robotique à

la médecine et à la finance. Elle permet de prendre des décisions dans des environnements incertains, de superviser des systèmes en mouvement et de représenter des processus complexes. En offrant une approche plus souple et adaptative, la logique floue ouvre de nouvelles perspectives pour résoudre des problèmes dans un monde où l'incertitude est omniprésente.

La logique floue est basée sur le concept de sous-ensemble flou tel que la théorie des sous-ensembles flous, introduite par Zadeh en 1965, vise à résoudre les contradictions entre la théorie des ensembles classiques et la réalité imprécise. Elle intègre l'imprécision, l'incertitude, l'incomplétude et la subjectivité dans ses fondements. Cette théorie, développée en parallèle avec la logique floue et la théorie de possibilité par Zadeh, a connu une montée en popularité dans les années 1990 avec de nombreuses applications industrielles et scientifiques, notamment dans le contrôle flou et les systèmes linguistiques.

Elle a suscité un grand intérêt dans différents domaines tels que l'ingénierie, le commerce, la médecine, l'économie, la robotique, l'intelligence artificielle, etc. Dans ce chapitre, nous explorerons les fondements théoriques de la logique floue et de la théorie des ensembles flous, leurs applications dans divers domaines, et leurs implications pour la prise de décision et le contrôle des systèmes. Notre objectif est de contribuer à une meilleure compréhension et à une utilisation plus efficace de cette approche novatrice, en combinant théorie et pratique.

## 1.2 Définition de la logique floue

La logique floue est une branche de la logique qui permet de gérer des concepts et des situations imprécises ou vagues. Contrairement à la logique traditionnelle, qui s'appuie sur des valeurs binaires, une logique floue utilise des degrés de vérité pour valider des propositions. Cette approche permet de modéliser des phénomènes du monde réel qui ne peuvent pas être strictement définis en binaire, comme les couleurs, les températures ou les émotions.

Dans la logique floue, les variables peuvent prendre des valeurs en continu dans un intervalle donné, permettant une meilleure représentation de la complexité et de l'incertitude dans divers domaines. Par exemple, "température modérée" peut être utilisée pour décrire une situation intermédiaire. Cette flexibilité permet l'analyse de problèmes complexes et la prise de décisions fondées sur des informations partielles ou ambiguës.

La logique Floue trouve de nombreuses applications dans la robotique, le contrôle des processus, la reconnaissance des formes et la prise de décisions. Il est également utilisé pour modéliser le raisonnement humain et simuler les comportements intelligents dans les systèmes informatiques.

La logique floue offre un cadre mathématique puissant pour traiter des situations réelles

où les catégories traditionnelles sont peu claires ou incertaines. Il est largement utilisé dans les systèmes de contrôle et de prise de décision, en particulier dans les domaines de l'informatique, l'ingénierie et la robotique. Par exemple, il est utilisé pour contrôler la vitesse des véhicules autonomes et ajuster la température en fonction des variations environnementales.

En plus des applications technologiques, la logique floue peut également être appliquée en médecine, en finance et en linguistique. Il permet de modéliser des concepts complexes et en tenant compte de plusieurs facteurs pour prendre des décisions plus nuancées et appropriées dans des situations réelles.

### 1.3 Chronologie de la Logique Floue

Les premières recherches sur la théorie des ensembles flous remontent à 1965 avec les travaux de Lotfi Asker Zadeh [53], suivis par ceux de Goguen en 1967 [17] et 1969 [18], visant à généraliser la notion d'ensemble et de proposition pour traiter les données floues. Bellman et Zadeh ont ensuite développé la programmation linéaire floue en 1970, appliquée à la prise de décision dans des environnements incertains.

Le premier article sur l'automatisation utilisant la logique floue a été proposé par Mamdani et Assilian en 1974 [33]. Leur recherche, basée sur le contrôle d'un moteur à vapeur, a démontré que les opérateurs humains expriment leurs stratégies de contrôle de manière linguistique plutôt que mathématique. Cette approche a influencé l'adoption de contrôleurs flous dans la théorie du contrôle. Actuellement, ces contrôleurs sont largement utilisés dans divers appareils électriques, notamment au Japon depuis 1985, suivi par l'Allemagne en 1990 et le Portugal, où ils sont employés dans des applications telles que la gestion industrielle et les systèmes de climatisation.

### 1.4 Les Applications Pratiques de la Logique Floue

La logique floue est cruciale dans de nombreux domaines en raison de sa capacité à gérer efficacement l'incertitude.

#### 1. Gestion de l'incertitude

En introduisant des degrés d'appartenance à un ensemble, la logique floue permet de modéliser des concepts tels que « probablement vrai » ou « partiellement vrai » dans des situations où les données sont incomplètes ou imprécises.

#### 2. Flexibilité et tolérance

Contrairement à la logique traditionnelle, la logique floue est souple et tolérante envers les imprécisions, ce qui la rend précieuse pour des décisions dans des contextes où les frontières entre les catégories sont floues.

### 3. Modélisation du raisonnement humain

Elle peut représenter le raisonnement humain, souvent basé sur des évaluations subjectives et des jugements incertains, ce qui est essentiel pour des applications comme les systèmes experts et la reconnaissance de formes.

### 4. Adaptabilité aux données réelles

La logique floue offre un cadre pour traiter efficacement des données variables ou imprécises, ce qui est utile dans des domaines tels que la gestion des processus et la robotique.

### 5. Complémentarité avec d'autres approches

Elle enrichit d'autres méthodes en permettant de modéliser et de traiter les connaissances incertaines, et peut être combinée avec des approches telles que les réseaux de neurones pour créer des systèmes plus complets.

### 6. Les principes de base de la logique floue

Les ensembles flous sont utilisés pour représenter des concepts dont les frontières sont floues. Les opérateurs flous tels que l'intersection floue (And « et » flou), l'union floue (Or « ou » flou) et la négation floue (Not flou) permettent de manipuler ces ensembles de manière efficace. Les règles d'inférence floue prennent en compte les degrés de certitude et d'incertitude, ce qui est crucial dans des environnements complexes où les paramètres sont difficiles à quantifier précisément.

En résumé, la logique floue est devenue un outil essentiel dans des domaines tels que l'intelligence artificielle, la modélisation des systèmes complexes et la prise de décision en raison de sa capacité à gérer l'incertitude de manière flexible et efficace.

## 1.5 Principes de base de la théorie des ensembles flous

### 1.5.1 Ensembles classiques et ensembles flous

**Définition 1** (Définition d'un ensemble classique)

*Un ensemble classique est habituellement défini comme une collection d'éléments ou d'objets qui satisfont à certaines propriétés, qu'elles soient spécifiques ou non. Ces ensembles peuvent être finis ou infinis, et peuvent être dénombrables ou non dénombrables.*

*Considérons  $X$  comme une collection d'éléments ou d'objets. Pour un sous-ensemble  $A$ , où  $A \subset X$ , chaque élément de  $X$  peut appartenir à  $A$  ou non. Ainsi, pour un élément  $x$  de  $X$ , l'affirmation " $x \in A$ " peut être vraie ou fausse.*

*Il existe plusieurs façons de décrire un tel ensemble. On peut les énumérer en listant tous les éléments qui en font partie. Une autre approche consiste à décrire l'ensemble de manière analytique en établissant des critères d'appartenance, par exemple :  $A = \{x \in \mathbb{Z}; x$*

est un nombre entier pair}. Il est également possible d'utiliser une fonction pour exprimer cette appartenance. Un autre concept est celui de "fonction caractéristique" (Oshiro et al., 1987),  $\mu_A(x)$ , dont la valeur indique si, oui ou non,  $x$  fait partie de  $A$  :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in A \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (1.1)$$

### 1.5.2 Fonction d'appartenance

**Définition 2 :**

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ , la fonction d'appartenance, est une fonction floue définie sur un ensemble  $X$ , avec des valeurs variant de 0 à 1 [54]

$$\tilde{A} = \{(\mathbf{x}, \mu_A(\mathbf{x})) | \mathbf{x} \in \mathbf{X}\} \quad (1.2)$$

D'après Zadeh [54], la logique floue s'appuie sur la théorie des ensembles flous pour aborder des concepts difficiles à définir de manière précise, comme la température moyenne ou le courant faible. Voici quelques éléments essentiels à considérer concernant l'implication de Mamdani dans le domaine de la logique floue :

#### 1. Degré d'appartenance :

En logique floue, le niveau d'appartenance d'une variable à un ensemble flou peut varier de manière continue entre 0 et 1. Par exemple, la température peut être qualifiée de faible avec un niveau d'appartenance de 0,7.

#### 2. Méthode d'inférence Max-Min (Implication de Mamdani) [32] :

Dans cette méthode, l'opérateur "ET" est appliqué en utilisant la fonction "MIN" pour combiner les antécédents de chaque règle. De même, la fonction "MIN" est utilisée pour combiner les conclusions "ALORS" de chaque règle. Ensuite, les différentes règles sont associées à l'opérateur "OU" en utilisant la fonction "MAX". Cette approche est couramment employée pour l'inférence dans les systèmes flous.

Autrement dit, dans le domaine de la logique Floue, un ensemble flou « $\tilde{A}$ » dans un univers de discours « $X$ » est défini par une fonction d'appartenance « $\mu_{\tilde{A}}$ » qui associe un nombre « $\mu_x(x)$ » à tout élément « $x$ » appartenant à « $X$ » compris entre 0 et 1.

Un univers de discours  $X$  est constitué d'un ensemble flou  $\tilde{A}$  composé de paires ordonnées :

1. Tout  $x$  est membre de  $\tilde{A}$  à un degré compris entre 0 et 1.

2.  $\tilde{A}$  se distingue principalement par sa fonction d'appartenance.

D'un point de vue concret,  $\tilde{A}$  est un élément qualitatif (qu'il soit flou ou linguistique) associé aux valeurs précises d'une variable numérique  $x$ .

### 1.5.3 Quelques formes de fonctions d'appartenance

En théorie des ensembles flous, diverses formes de fonctions d'appartenance sont employées pour décrire la manière dont les éléments appartiennent à un ensemble flou. Voici quelques exemples courants de ces fonctions d'appartenance :

#### 1.5.3.1 Fonction d'appartenance trapézoïdale :

La fonction d'appartenance trapézoïdale est caractérisée par quatre paramètres, notés  $a, b, c$  et  $d$ , où  $a \leq b \leq c \leq d$ . Cette fonction prend la forme d'un trapèze et est couramment utilisée pour modéliser des ensembles flous présentant une transition progressive entre les éléments membres et non-membres. Elle se caractérise par une augmentation linéaire de sa valeur de  $a$  à  $b$ , reste constante de  $b$  à  $c$ , puis diminue de manière linéaire de  $c$  à  $d$ .

La fonction d'appartenance trapézoïdale  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  pour un élément  $x$  est définie comme suit :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \text{ ou } x \geq d \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c < x < d \end{cases} \quad (1.3)$$

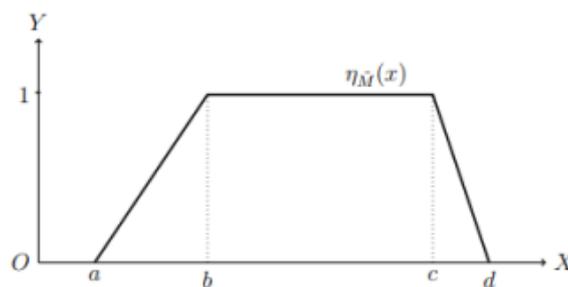


FIGURE 1.1 – Représentation graphique de la fonction d'appartenance trapézoïdale

#### 1.5.3.2 Fonction d'appartenance triangulaire :

La fonction d'appartenance triangulaire se caractérise par trois paramètres :  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$ , où  $a \leq b \leq c$ . Elle adopte la forme d'un triangle, et sert à représenter des ensembles flous avec une transition linéaire entre les éléments appartenant et non-appartenant à cet ensemble. Cette fonction voit sa valeur augmenter de façon linéaire de  $\mathbf{a}$  à  $\mathbf{b}$ , puis diminuer de façon linéaire de  $\mathbf{b}$  à  $\mathbf{c}$ .

La fonction d'appartenance triangulaire  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  pour un élément  $x$  est définie comme suit :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \text{ ou } x \geq c \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x = b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } b < x < c \end{cases} \quad (1.4)$$

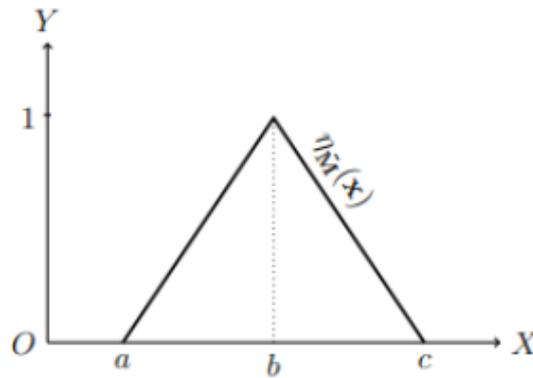


FIGURE 1.2 – Représentation graphique de la fonction d'appartenance triangulaire

### 1.5.3.3 Fonction d'appartenance gaussienne :

La fonction d'appartenance gaussienne est caractérisée par deux paramètres : la moyenne, notée  $\mu$ , et l'écart-type, noté  $\sigma$ . Elle adopte une forme de courbe en cloche et est utilisée pour représenter des ensembles flous avec une distribution symétrique autour de la moyenne  $\mu$ . La valeur de la fonction d'appartenance diminue de manière exponentielle à mesure que l'on s'éloigne de la moyenne  $\mu$ . La fonction d'appartenance gaussienne, notée  $\mu(x)$ , pour un élément  $x$  est définie comme suit :

$$\mu(x) = \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.5)$$

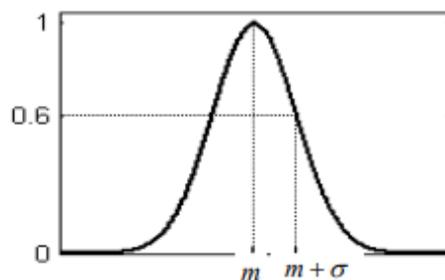


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de la fonction d'appartenance gaussienne

Ces formes de fonctions d'appartenance sont largement répandues en théorie des ensembles flous, mais il existe aussi d'autres formes plus complexes et spécifiques, adaptées à divers types de modélisations et de contextes d'application.

### Remarque

La fonction d'appartenance, similaire à la fonction caractéristique d'un ensemble traditionnel, est sélectionnée en fonction des conseils d'experts ou d'études statistiques. Les choix les plus courants comprennent les sigmoïdes, les tangentes hyperboliques, les exponentielles, les gaussiennes, ou d'autres formes adaptées au contexte spécifique.

### Définition 3 (Définition d'un ensemble flou)

Un ensemble flou est défini par sa fonction d'appartenance. Soit  $X$  un ensemble universel, et soit  $\tilde{A}$  un ensemble flou sur  $X$ . La fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{A}} \rightarrow [0, 1]$  associée à  $\tilde{A}$  est définie comme :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in \tilde{A} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (1.6)$$

avec  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  représentant le degré d'appartenance de l'élément  $x$  à l'ensemble flou  $\tilde{A}$ .

Cette fonction  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  attribue à chaque élément  $x$  de l'ensemble universel  $X$  un degré d'appartenance à l'ensemble flou  $\tilde{A}$ , représentant ainsi la "force" ou le "degré" selon lequel  $x \in \tilde{A}$ .

Ainsi, la notion d'un ensemble flou repose sur cette fonction d'appartenance, qui facilite la représentation de la variation dans la caractéristique des éléments au sein de l'ensemble flou. Cela diffère des ensembles classiques, où l'appartenance est binaire.

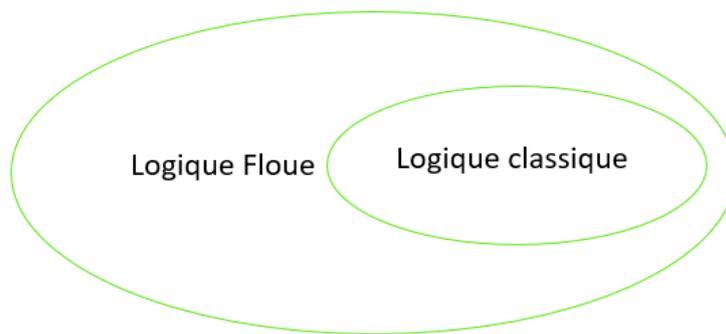


FIGURE 1.4 – Présentation des Ensembles Flous

#### 1.5.4 Caractéristiques des ensembles flous

Pour définir les propriétés des ensembles flous, nous réexaminons et élargissons les caractéristiques typiques des ensembles classiques. Les ensembles flous présentent diverses caractéristiques qui nécessitent une attention particulière. Supposons qu'un ensemble flou  $\tilde{A}$  de  $X$  soit caractérisé par la fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{A}}$ .

**a- Hauteur** notée  $H(\tilde{A})$  : C'est le plus fort degré avec lequel un élément de  $X$  appartient à  $\tilde{A}$  où

$$H(\tilde{A}) = \{x \in \tilde{A} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \neq 0\} \quad (1.7)$$

**b- Noyau** noté  $N(\tilde{A})$  : C'est l'ensemble des points qui appartiennent intégralement à  $\tilde{A}$  :

$$N(\tilde{A}) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}. \quad (1.8)$$

Par construction

$$\text{noy}\tilde{A} \subset \text{sup}(\tilde{A}). \quad (1.9)$$

**c- Support** noté  $\text{Sup}(\tilde{A})$  : avec des degrés d'appartenances supérieur à zéro :

$$\text{sup}(\tilde{A}) = \{x \in \tilde{A} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (1.10)$$

### 1.5.5 Opérations sur les ensembles flous

Les opérations effectuées sur les ensembles flous sont des opérations logiques qui permettent de fusionner, de manipuler et d'analyser des ensembles flous. Les principales opérations sur les ensembles flous comprennent :

#### 1. Intersection Floue (AND Flou) :

\* L'intersection floue de deux ensembles flous  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ , notée  $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ , correspond à l'ensemble flou résultant où chaque élément a un degré d'appartenance égal au minimum des degrés d'appartenance correspondants dans  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ . Formellement :

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \quad (1.11)$$

\* L'intersection floue est utilisée pour exprimer la simultanéité ou la coexistence de deux conditions ou propriétés floues.

#### 2. Union Floue (OR Flou) :

\* L'union floue de deux ensembles flous  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ , notée  $\tilde{A} \cup \tilde{B}$  correspond à l'ensemble flou résultant où chaque élément a un degré d'appartenance égal au maximum des degrés d'appartenance correspondants dans  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  Formellement :

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \quad (1.12)$$

\* L'union floue est utilisée pour exprimer l'alternative ou la possibilité de l'une des deux conditions ou propriétés floues.

#### 3. Négation Floue (NOT Flou) :

\* La négation floue d'un ensemble flou  $\tilde{A}$ , notée  $-\tilde{A}$ , correspond à l'ensemble flou résultant où chaque élément a un degré d'appartenance égal à l'inverse de son

degré d'appartenance dans  $\tilde{A}$ . Formellement :

$$\mu_{\sim A}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (1.13)$$

\* La négation floue est utilisée pour exprimer l'opposé ou l'absence d'une condition ou propriété floue.

4. L'ensemble flou  $\tilde{A}$  est dit **inclus** dans l'ensemble flou  $\tilde{B}$  (en abrégé,  $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ ) ssi :

$$\eta_{\tilde{A}}(x) \leq \eta_{\tilde{B}}(x); \quad \forall x \in E \quad (1.14)$$

5. L'ensemble flou  $\tilde{A}$  est **égal** à l'ensemble flou  $\tilde{B}$  (en abrégé,  $\tilde{A} = \tilde{B}$ ) ssi :

$$\eta_{\tilde{A}}(x) = \eta_{\tilde{B}}(x); \quad \forall x \in E \quad (1.15)$$

6. **L'addition** de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  et l'ensemble flou  $\tilde{A} + \tilde{B}$ , défini sur  $E$  par la fonction d'appartenance :

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \min \left\{ \eta_{\tilde{A}}(x); \eta_{\tilde{B}}(x) \right\}; \quad \forall x \in E \quad (1.16)$$

7. La **différence** de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  est l'ensemble flou  $\tilde{A}/\tilde{B}$ , défini sur  $E$  par la fonction d'appartenance :

$$\eta_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x) = \min \left\{ \eta_{\tilde{A}}(x); 1 - \eta_{\tilde{B}}(x) \right\}; \quad \forall x \in E \quad (1.17)$$

La relation ci-dessus (7) ne vérifie pas une bonne partie de propriétés de la différence classique. C'est le cas par exemple de propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{A} \subset \tilde{B} &\implies \tilde{A}/\tilde{B} = \emptyset \\ \tilde{A}/\tilde{B} &= \tilde{A}/(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \\ (\tilde{B} \subset \tilde{C}) &\implies (\tilde{B}/\tilde{A}) \subset (\tilde{C}/\tilde{A}) \end{aligned}$$

8. Le **complémentaire** d'un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$ , noté  $\tilde{A}^c$ , est l'ensemble flou défini sur  $E$  par la fonction d'appartenance suivante :

$$\eta_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \eta_{\tilde{A}}(x); \quad \forall x \in E \quad (1.18)$$

### 1.5.5.1 Propriétés des opérations sur les ensembles flous

1. **Involution** :  $(\tilde{A}^c)^c = \tilde{A}$ ;
2.  $\emptyset^c = E$ ;
3.  $E^c = \emptyset$
4. **Commutativité** :  $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$ ,  $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$ ;
5. **Associativité** :  $(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C})$  et  $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C})$ ;

6. **Idempotence** :  $\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$  et  $\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$ ;
7. **Distributivité** :  $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$  et  $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$ ;
8. **Les lois de De Morgan** :  $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c$  et  $(\tilde{A} \cap \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cup \tilde{B}^c$ ;
9. **Les lois d'absorption** :  $\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A}$  et  $\tilde{A} \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \tilde{A}$ ;
10.  $\tilde{A} \cap \tilde{\emptyset} = \tilde{\emptyset}$ ;  $\tilde{A} \cup \tilde{E} = \tilde{A}$ ;
11. **Identité** :  $\tilde{A} \cup \tilde{\emptyset} = \tilde{A}$ ;  $\tilde{A} \cap \tilde{E} = \tilde{A}$ ;
12. **Formule d'équivalence** :  $(\tilde{A}^c \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}^c) = (\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B})$ ;
13. **Formule de la différence symétrique** :  $(\tilde{A}^c \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}^c) = (\tilde{A}^c \cup \tilde{B}^c) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B})$ ;
14. La famille  $\tilde{\mathcal{P}}(E)$  en tant que treillis pour l'inclusion, conserve toutes les propriétés que possède le treillis  $\mathcal{P}(E)$ , sauf la complémentation. [11], [27]

### 1.5.5.2 Opérateurs ensemblistes flous

Les opérateurs de base de la logique floue sont définis en fonction de la logique 1.1.

Opérateur	Application
OU	$\tilde{A} \text{ OU } \tilde{B} = \max(\tilde{A}, \tilde{B})$
ET	$\tilde{A} \text{ ET } \tilde{B} = \min(\tilde{A}, \tilde{B})$
NON	NON $\tilde{A} = 1 - \tilde{A}$
OU Exclusif	$\tilde{A} \text{ OUEx } \tilde{B} = \max(\tilde{A}, \tilde{B}) - \min(\tilde{A}, \tilde{B})$

TABLE 1.1 – Opérateurs logiques

Pour simplifier la manipulation des ensembles flous, nous adaptons les opérateurs de la théorie des ensembles classiques afin de les rendre compatibles avec les fonctions d'appartenance propres à la logique floue, qui génèrent des valeurs situées strictement entre 0 et 1.

En logique floue, des situations particulières peuvent se présenter où :

- le principe du tiers exclu est contredit tel que :  $A \cup \bar{A} \neq X$ , c'est-à-dire  $\mu_{A \cup \bar{A}}(X) \neq 1$
- le A est le non-A en même temps tel que :  $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ , c'est-à-dire  $\mu_{A \cap \bar{A}}(X) \neq 0$

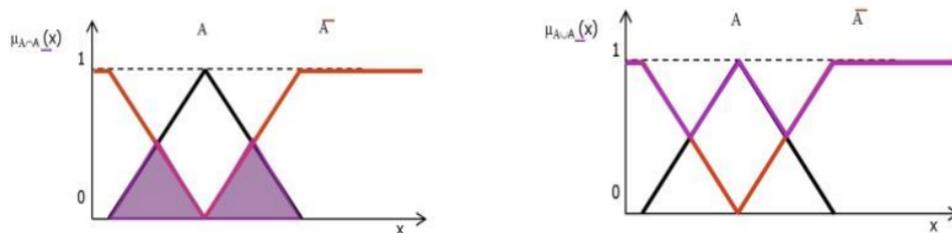


FIGURE 1.5 – Intersection de l'ensemble flou et son complément. Union de l'ensemble flou et son complément

## 1.6 Théorie des ensembles flous

### Définition 4

Étant donné que  $E$  est un ensemble de référence ou un univers, une fonction réelle, appelée fonction d'appartenance, est utilisée pour décrire un sous-ensemble flou  $A$  de  $E$ , ou plus précisément un ensemble flou  $A$ , dans l'intervalle unité  $[0, 1]$  de  $\mathbb{R}$ . Dans la suite, nous aborderons un sous-ensemble flou  $A$  sur un ensemble référentiel  $E$ , qui se distinguera par sa fonction d'appartenance  $\eta_A$ , qui s'étend de  $E$  vers l'intervalle unité  $[0, 1]$  et est définie par :

$$\begin{aligned}\eta_A : E &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \eta_A(x)\end{aligned}$$

La famille des sous-ensembles flous définis sur un univers  $E$  sera notée  $\tilde{P}(E)$ .

### Remarque

1. Les expressions "classique", "traditionnelles" ou "ordinaires" dans le texte de cette dissertation font référence à la théorie classique des ensembles, tandis que les expressions "flou", "vague", "imprécis", "incertain", "mal connu", etc., désignent ce qui est lié aux ensembles flous.
2. Afin de faire la distinction entre l'ensemble flou  $A$  (*fuzzy set*  $A$ ) et l'ensemble non flou  $A$  (*crisp set*  $A$ ), nous devons maintenant surmonter l'ensemble flou du symbole  $\sim$ . De cette manière, le sous-ensemble flou  $A$  sera représenté par  $\tilde{A}$  et signalé par :

$$\tilde{A} = \{(x, \eta_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in E\} \quad (1.19)$$

3. Lorsque  $E$  est un ensemble fini ou dénombrable, un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  sur  $E$  est souvent noté par :

$$\tilde{A} = \eta_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + \dots + \eta_{\tilde{A}}(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \eta_{\tilde{A}}(x_i)/x_i \quad (1.20)$$

où le signe  $+$  représente l'union des éléments et où le signe  $/$  joue le rôle de séparateur [11].

4. Lorsque  $E$  est infini ou non dénombrable,  $\tilde{A}$  est noté :

$$\tilde{A} = \int_E \eta_{\tilde{A}}(x)/x \quad (1.21)$$

où  $\eta_{\tilde{A}}$  peut être exprimée par son expression algébrique, et où le symbole  $\int_E$  est juste une notation adoptée pour exprimer l'infinité ou la non-dénombrabilité de  $E$ , et non le signe habituel d'une mesure sur  $E$ .

5. Un sous-ensemble classique  $A$  est un cas particulier de sous-ensemble flou, avec comme fonction d'appartenance sa fonction caractéristique [11].

6. L'ensemble flou vide est noté  $\tilde{\emptyset}$ , et est défini par :

$$\eta_{\tilde{\emptyset}}(x) = 0, \forall x \in E. \quad (1.22)$$

Il ne possède aucun élément de  $E$ , ni entièrement, ni partiellement. Il est égal à l'ensemble vide classique noté habituellement par  $\emptyset$ .

7. Le plus grand sous-ensemble flou sur  $E$  au sens classique est noté  $\tilde{1}_E$ . Il a pour fonction d'appartenance :

$$\eta_{\tilde{1}_E}(x) = 1, \forall x \in E. \quad (1.23)$$

Tout élément de  $E$  lui appartient totalement. Il est égal à l'univers  $E$ .

8. Les opérateurs min et max seront employés au moyen des parenthèses, des accolades ou des crochets.

9. Les fonctions d'appartenance peuvent être de différentes formes selon leurs définitions : triangulaires, trapézoïdales, gaussiennes, sigmoïdales, etc.

10. Généralement, on consolide l'intuition sur un ensemble flou par le graphe de sa fonction d'appartenance à la place du diagramme de Venn utilisé dans la théorie classique.

### Exemple

Prenons l'univers  $E = \mathbb{R}^2$ . Soit  $\tilde{A}$  le sous-ensemble de  $E$  constitué des points  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  proches de l'origine d'axes, dont le degré d'appartenance à  $\tilde{A}$  est défini subjectivement par :

$$\eta_{\tilde{A}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \max\left(0, \frac{b-d(x_1, x_2)+1}{b}\right) & \text{Si } x_1^2 + x_2^2 > a^2 \\ 1 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (1.24)$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels fixes tels que  $1 < a < b$ , et  $d(x_1, x_2)$  la distance euclidienne du point  $(x_1, x_2)$  à l'origine.

Tels que ses éléments sont illustrés sur la figure 1.6 ci-dessous,  $\tilde{A}$  est un sous-ensemble flou de  $\mathbb{R}^2$  auquel :

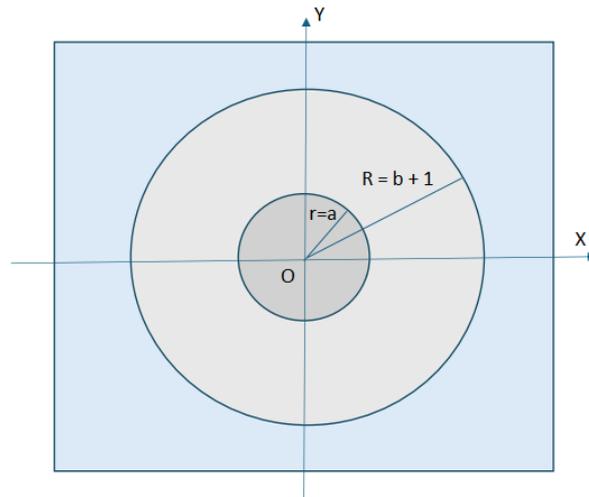


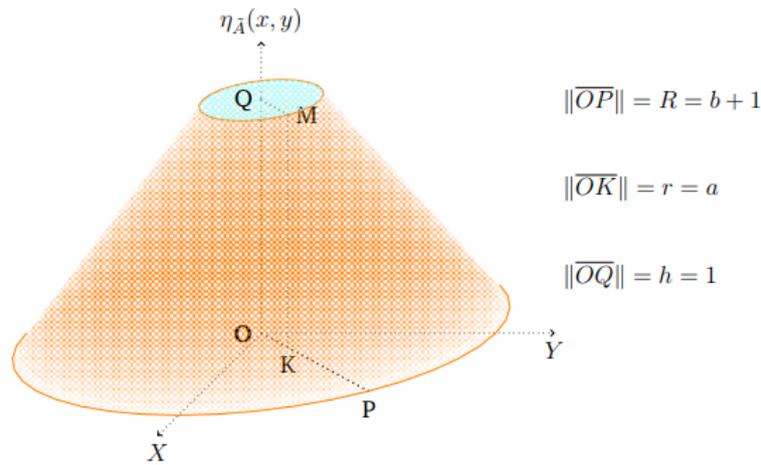
FIGURE 1.6 – Zones des éléments de  $R^2$  selon leur appartenance à  $\tilde{A}$ .

- Chaque point de la zone en bleu ciel sur la figure 1.6 appartient à l'ensemble des points du disque fermé centré à l'origine, de rayon  $a$ .
- Chaque point de la bande ouverte constituée des cercles de rayons respectifs  $a$  et  $b + 1$ , est partiellement intégré (points de la zone orange).
- Les autres points du plan ne font pas partie de la zone blanche.

Dans cette représentation graphique, tous les éléments de la zone bleu ciel ont le même niveau d'appartenance 1 ; ceux de la bande orange ont des niveaux différents, allant strictement de 0 à 1, bien que la bande soit colorée de manière uniforme ; et enfin ceux de la zone blanche ont le même niveau bas.

La surface de la figure 1.6 ci-dessous est le graphe de la fonction d'appartenance de  $\tilde{A}$ . Son apparence ressemble à un tronc de cône recouvert d'une petite base.

- dont la grande base est centrée à l'origine d'axes XOY,
- dont la hauteur  $h = 1$ ,
- dont le rayon de la grande base est  $R = b + 1$ ,
- dont le rayon de la petite base est  $r = a$ .

FIGURE 1.7 – Graphe de la fonction d'appartenance de l'ensemble flou  $\tilde{A}$ .

## 1.7 Analyse de la logique floue et élaboration d'un système de contrôle flou

La logique floue considère la logique exacte comme une forme restreinte de raisonnement approximatif, où tout existe sur un continuum. Elle permet de rendre tout système logique flou. Les connaissances sont vues comme des contraintes flexibles ou floues sur un ensemble de variables.

Ainsi, un système de contrôle flou analyse les entrées en utilisant des variables logiques qui prennent des valeurs continues entre 0 et 1, contrairement à la logique classique ou numérique qui repose sur des valeurs discrètes comme 1 ou 0.

### 1.7.1 Fuzzification

La **fuzzification** est l'étape où les entrées du système sont représentées sous forme d'ensembles flous, avec chacun leur domaine propre. Cette phase est cruciale et nécessite la collaboration étroite des experts du domaine concerné. Ensemble, ils définissent les fonctions d'appartenance pour chaque ensemble flou utilisé dans le processus. Si une entrée est nette, elle est convertie en floue en utilisant sa fonction caractéristique.

L'**objectif** de la fuzzification est de définir les variables linguistiques utilisées dans le système, en transformant les entrées réelles en parties floues définies sur un espace de représentation associé à chaque entrée. En général, cet espace de représentation est un sous-ensemble flou.

En résumé, cette étape consiste à établir les fonctions d'appartenance pour les différentes variables d'entrée afin de **convertir** les grandeurs déterminées en variables linguistiques adaptées aux inférences.

### 1.7.2 Module de règle de base

Le module **Rule-Base** (règle de base) peut être considéré comme un module faisant partie du « **noyau** » du contrôleur flou. Il se compose des propositions floues et chacune de ces propositions est décrite par la forme linguistique :

$$\begin{aligned} &\text{Si } x_1 \in A_1 \text{ et } x_2 \in A_2 \text{ et } \dots \text{ et } x_n \in A_n \\ &\text{Alors } u_1 \in B_1 \text{ et } u_2 \in B_2 \text{ et } \dots \text{ et } u_m \in B_m \end{aligned}$$

D'après les renseignements recueillis auprès de l'expert. C'est à ce stade que les variables et leurs classifications linguistiques sont délimitées et ensuite modélisées par des ensembles fuzzy, c'est-à-dire leurs fonctions d'appartenance. Les méthodes d'obtention de ces fonctions d'adhésion sont nombreuses : appel intuitif, ajustement de courbe, interpolation et même réseaux neuronaux [ [29], [47], [39]].

### 1.7.3 Module d'inférence floue

Le **module d'inférence floue**, utilisant la logique floue, transforme les propositions floues en relations floues. Il détermine les t-normes, t-conormes, règles d'inférence, incluant les implications floues, utilisées pour obtenir la relation floue représentant la base de règles. Son importance est comparable à celle du module de base de règles.

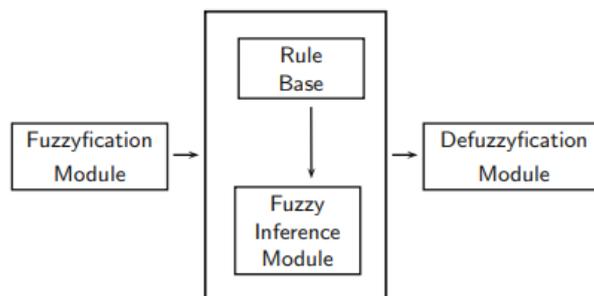


FIGURE 1.8 – Échelle générale d'un contrôleur flou

Fondamentalement, c'est de cela que dépend le succès du contrôleur flou puisqu'il donnera la sortie (contrôle) à utiliser par le contrôleur à partir de chaque entrée.

### 1.7.4 Défuzzification

En théorie stochastique, l'espérance mathématique, le mode et la médiane sont des mesures couramment utilisées pour représenter la centralisation des distributions de données. En contraste, dans la théorie des ensembles flous, la **défuzzification** permet de convertir un ensemble flou en une valeur nette, un nombre réel.

La base de règles est représentée mathématiquement par une relation floue  $\mathcal{R}$  avec une

fonction d'appartenance :

$$\varphi_{\mathcal{R}}(x, u) = \nabla(\varphi_{\mathcal{R}_i}(x, u)), \text{ avec } 1 \leq i \leq r \quad (1.25)$$

Où  $\nabla$  est un t-conorm et  $\mathcal{R}_i$  est une relation floue obtenue à partir de la règle  $i$ , dont la fonction d'appartenance  $\varphi_{\mathcal{R}_i}$  est obtenue par divers moyens – par exemple, par le modus ponens généralisé (une règle de déduction en logique qui stipule que pour une implication  $P \rightarrow Q$ , si  $P$  est vrai, alors  $Q$  doit être vrai aussi). Les valeurs  $x$  et  $u$  représentent l'état et le contrôle, respectivement.

L'inférence qui représente le contrôle  $\tilde{B}$  pour un état  $\tilde{A}$  est donnée par une règle de composition de l'inférence :

$$\varphi_{\tilde{B}}(u) = \sup_x (\varphi_{\mathcal{R}}(x, u) \Delta \varphi_{\tilde{A}}(x)) \quad (1.26)$$

Son objectif est de convertir l'ensemble flou en une valeur finale claire. La défuzzification est une opération qui consiste, contrairement à la fuzzification, à convertir une information floue en une information précise (valeur réelle). Un nombre flou de l'ensemble flou est converti en une grandeur numérique.

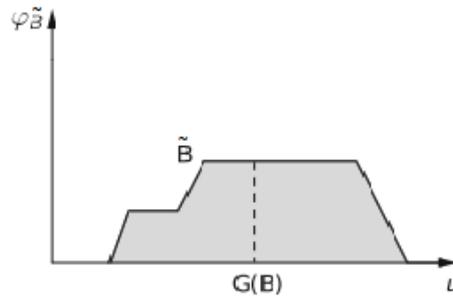
Parmi les différentes méthodes de défuzzification, nous allons présenter les approches les plus fréquemment utilisées :

### 1. La méthode du Centre de Gravité "COG" ( $G(B)$ )

Cette méthode de défuzzification est semblable à la moyenne arithmétique utilisée dans le calcul des distributions de fréquence d'une variable donnée, mais elle diffère en ce que les poids sont déterminés par les valeurs floues  $\varphi_{\tilde{B}}(u_i)$ , qui représentent le degré de compatibilité de la valeur  $u_i$  avec le concept défini par l'ensemble flou  $\tilde{B}$ . Parmi les diverses techniques de défuzzification, celle-ci est souvent privilégiée, même si elle peut être plus complexe. Les équations (1) et (1) s'appliquent respectivement aux cas discret et continu. La figure 1.9 illustre le graphique du défuzzificateur  $G(B)$ .

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \varphi_{\tilde{B}}(u_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_{\tilde{B}}(u_i)} \quad (1.27)$$

$$G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \varphi_{\tilde{B}}(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\tilde{B}}(u) du} \quad (1.28)$$

FIGURE 1.9 – Défussificateur centre de gravité  $G(B)$ 

## 2. Centre du maximum "COM" ( $C(B)$ )

C'est une procédure radicale, dans le sens où elle tient compte seulement des régions de possibilité majeure parmi les valeurs possibles de la variable qui modèle le concept flou impliqué. Dans ce cas, nous avons :

$$C(B) = \frac{i + s}{2} \quad (1.29)$$

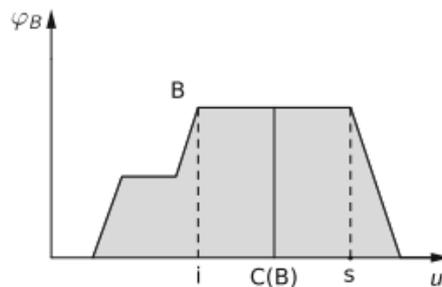
où

$$i = \inf u \in \mathbb{R} : \varphi_{\tilde{B}}(u) = \max_u \varphi_{\tilde{B}}(u) \quad (1.30)$$

Et

$$s = \sup\{u \in \mathbb{R} : \varphi_{\tilde{B}}(u) = \max_u \varphi_{\tilde{B}}(u)\} \quad (1.31)$$

La figure 1.10 illustre ce défussificateur

FIGURE 1.10 – Défussificateur centre de maximum  $C(B)$ 

## 3. La méthode Moyenne des Maxima "MM" ( $M(B)$ )

Pour les domaines discrètes, il est courant d'utiliser comme défussificateur la moyenne du maximum dont la définition est donnée par

$$M(B) = \frac{\sum u_i}{n} \quad (1.32)$$

où  $n$  est donné et  $u_i$ , avec  $1 \leq i \leq n$ , sont les valeurs ayant la plus grande adhésion à l'ensemble floue  $\tilde{B}$ .

Les contrôleurs flous, comme précédemment évoqué, se composent de quatre modules : la fuzzification, la base de règles, la déduction et la défuzzification. La méthode de Mamdani est un exemple classique de cette configuration. Cependant, dans certains cas spécifiques, le module de défuzzification peut être omis.

### 1.7.5 Système d'Inférence Floue(SIF)

La logique floue est un puissant outil pour la prise de décisions et l'exécution d'actions dans des contextes où les données sont incertaines, imprécises ou subjectives, contrairement à la logique binaire traditionnelle qui traite l'information comme vraie ou fausse [20]. Elle permet de manipuler des concepts comme "très chaud", "assez grand" et "probablement vrai", ce qui la rend adaptée à la modélisation de processus complexes où la précision n'est pas absolue, mais où des décisions doivent être prises. Ces systèmes sont largement utilisés dans le contrôle des processus, la prise de décisions, les systèmes de recommandation et la robotique, car ils gèrent l'incertitude et la complexité des données, ce qui en fait des outils précieux pour la modélisation et l'automatisation de divers processus et systèmes.

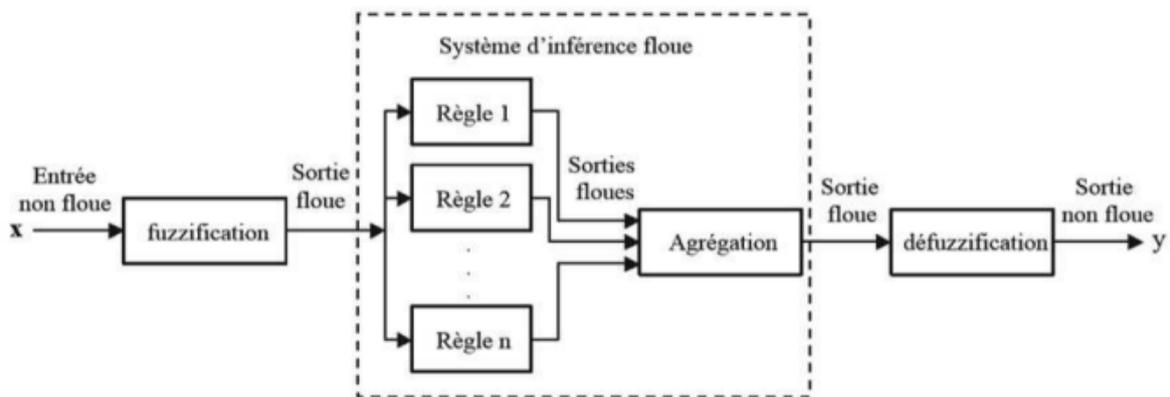


FIGURE 1.11 – Système d'Inférence Floue

### 1.7.6 Avantages et inconvénients de SIF

Les systèmes d'inférence floue offrent plusieurs bénéfices, comme la possibilité de traiter des informations incertaines, ambiguës ou subjectives, ce qui les rend adaptés aux situations où la logique binaire traditionnelle est restreinte. Ils offrent la possibilité de représenter des systèmes complexes où les interactions entre les variables ne sont pas linéaires ou facilement mesurables. En utilisant des degrés d'appartenance flottants, la logique floue permet une représentation plus souple des concepts, et permet une simulation plus précise du comportement humain. Souvent, ces systèmes ont une plus grande résistance face au bruit ou aux fluctuations des données d'entrée, car ils peuvent considérer

ces fluctuations comme des valeurs flottantes plutôt que des erreurs. En outre, ils sont aisément adaptables et actualisés afin d'intégrer de nouvelles connaissances sans avoir besoin d'une révision complète.

Toutefois, ils comportent également des désavantages. Les utilisateurs qui ne sont pas familiers avec la logique floue peuvent avoir du mal à les comprendre, et ils peuvent être complexes et demander des calculs approfondis, notamment lors de l'agrégation de règles ou de la défuzzification. La fiabilité et la pertinence des données d'entrée influencent la qualité des résultats, et même s'ils sont efficaces, ils peuvent ne pas être aussi précis que des modèles mathématiques rigoureux et stricts dans certaines situations.

### 1.7.7 Définition d'un $\alpha$ -cut

On appelle  $\alpha$ -cut ou cut de niveau  $\alpha$  ( $\alpha$ -cut or  $\alpha$ -level) d'un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$ , noté  $\tilde{A}_\alpha$ , l'ensemble classique défini par :

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in E \mid \eta_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (1.33)$$

Cet ensemble  $\tilde{A}_\alpha$  est parfois appelé  $\alpha$ -cut faible (weak  $\alpha$ -cut) de  $\tilde{A}$  comparativement à l'ensemble  $\tilde{A}^\alpha$ , appelé  $\alpha$ -cut fort (strong  $\alpha$ -cut) de  $\tilde{A}$ , défini par :

$$\tilde{A}^\alpha = \{x \in E \mid \eta_{\tilde{A}}(x) > \alpha\} \quad (1.34)$$

Il découle de la définition 1.9.1 que  $\tilde{A}^\alpha$  est une partie classique de  $E$  de fonction caractéristique  $\varphi$  définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_{\tilde{A}} \geq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.35)$$

**Théorème 1** (de décomposition) :

*Tout sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  peut être décomposé sous la forme suivante où apparaissent des produits de sous-ensembles ordinaires par des coefficients  $\alpha_i$  :*

$$\tilde{A} = \max_{0 < \alpha \leq 1, i=1,2,\dots,n} \left[ \alpha_1 \cdot \tilde{A}_{\alpha_1}, \alpha_2 \cdot \tilde{A}_{\alpha_2}, \dots, \alpha_n \cdot \tilde{A}_{\alpha_n} \right] \quad (1.36)$$

**Preuve :** [27], [23]

**Remarque**

Soit  $\tilde{A}$  un sous-ensemble flou sur  $E$ , si les  $\alpha$ -cuts  $\tilde{A}_\alpha$  sont donnés pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ , la fonction d'appartenance de  $\tilde{A}$  peut être rétablie pour tout  $x$  de  $E$  à l'aide de la formule suivante [11], [30] :

$$\eta_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min \left\{ \alpha, \eta_{\tilde{A}_\alpha}(x) \right\} \quad (1.37)$$

où

$$\eta_{\tilde{A}_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \tilde{A}_\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Chaque fois qu'on est en présence des  $\alpha$ -cuts, on a souvent besoin de cette formule pour retrouver la fonction d'appartenance du nombre flou correspondant.

### 1.7.8 Normalité et Convexité

#### Ensemble flou normalisé

##### Définition 5

Un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  sur  $E$  est dit **normal** ou **normalisé** s'il est de hauteur 1, c'est-à-dire s'il existe au moins un élément  $x$  de  $E$  tel que  $\eta_{\tilde{A}}(x) = 1$ .

#### Ensemble flou convexe

##### Définition 6

Un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  sur  $E$  est dit **convexe** ssi  $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0, 1]$

$$\eta_{\tilde{A}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min \left\{ \eta_{\tilde{A}}(x), \eta_{\tilde{A}}(y) \right\} \quad (1.38)$$

## 1.8 Principe d'extension de Zadeh

Le principe d'extension de Zadeh [9], comme son nom l'indique, est une technique permettant d'étendre les opérations standard de la théorie des ensembles classiques à une théorie floue, et il est abordé dans ce chapitre. Il fournit la formule pour déterminer le degré d'appartenance des composants d'un ensemble flou et les fonctions opérationnelles qui en résultent. En outre, le nombre flou et l'arithmétique des nombres flous sont introduits par rapport aux ensembles flous.

Les concepts de la théorie des ensembles flous doivent être élargis à la thèse classique. L'une des théories fondamentales qui encourage l'extension des notions mathématiques non-floues en floues est l'approche d'extension de Zadeh, parfois appelée le principe de l'extension.

Le principe d'extension de Zadeh pour une fonction  $f : X \rightarrow Z$  indique comment l'image d'un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  de  $X$  doit être calculée lorsque la fonction  $f$  est appliquée. On s'attend à ce que cette image soit un sous-ensemble flou de  $Z$ .

##### Définition 7 (Principe d'extension de Zadeh)

Soit  $f$  une fonction telle que  $f : X \rightarrow Z$  et  $\tilde{A}$  un sous-ensemble flou de  $X$ . L'extension de Zadeh de  $\hat{f}$  est la fonction  $f$  qui appliquée à  $\tilde{A}$  nous donne le sous-ensemble  $\hat{f}(\tilde{A})$  de  $Z$  avec la fonction d'adhésion donnée par :

$$\varphi_{\hat{f}(\tilde{A})}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_{\tilde{A}}(x) & \text{si } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases} \quad (1.39)$$

où  $f^{-1}(z) = \{x \mid f(x) = z\}$  est la préimage de  $z$ .

Nous pouvons observer que si  $f$  est une fonction bijective, alors

$$\{x \mid f(x) = z\} = \{f^{-1}(z)\}$$

où  $f^{-1}$  signifie la fonction inverse de  $f$ . Ainsi, si  $\tilde{A}$  est un sous-ensemble flou de  $X$ , avec la fonction d'appartenance  $\varphi_{\tilde{A}}$ , et si  $f$  est bijective, alors la fonction d'appartenance de  $\hat{f}(\tilde{A})$  est donnée par :

$$\varphi_{\hat{f}(\tilde{A})}(z) = \sup_{\{x \mid f(x)=z\}} \varphi_{\tilde{A}}(x) = \varphi_{f(\tilde{A})}(z) = \sup_{\{x \in f^{-1}(z)\}} \varphi_{\tilde{A}}(x) = \varphi_{\tilde{A}}(f^{-1}(z)) \quad (1.40)$$

Le graphique de la façon de construire l'extension  $\hat{f}$  de  $f$  est illustré à la Fig 1.6, où nous avons utilisé une fonction bijective  $f$ . Nous observons que si  $f$  est injectif, alors  $z = f(x)$  appartient au sous-ensemble  $\hat{f}(\tilde{A})$  flou avec le même degré  $\alpha$  que  $x$  appartenant à  $\tilde{A}$ . Cela ne peut pas se produire si  $f$  n'est pas injectif.

On a  $f : X \rightarrow Z$  une fonction injective et  $\tilde{A}$  un sous-ensemble dénombrable (ou fini) flou de  $X$  donné par

$$\tilde{A} = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{\tilde{A}}(x_i)/x_i$$

Ensuite, le principe d'extension assure que  $\hat{f}(\tilde{A})$  est un sous-ensemble flou de  $Z$  donné par

$$\hat{f}(\tilde{A}) = \hat{f}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{\tilde{A}}(x_i)/x_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{\tilde{A}}(x_i)/f(x_i)$$

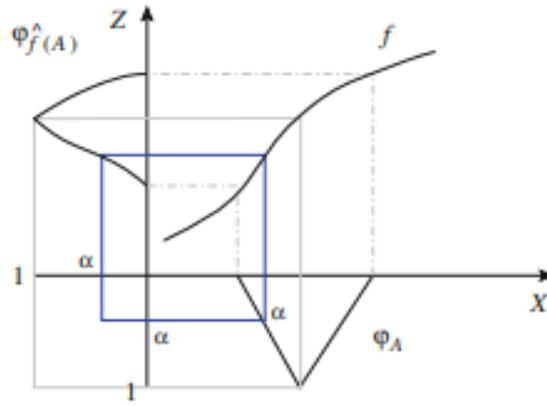
Par conséquent, l'image de  $\tilde{A}$  par  $\hat{f}$  peut être dérivée de la connaissance des images de  $x_i$  par  $f$ . Le degré d'adhésion de  $z_i = f(x_i)$  dans  $\hat{f}(\tilde{A})$  est le même que  $x_i$  dans  $\tilde{A}$ .

### Exemple 2.1

On a  $\tilde{A}$  un ensemble flou avec un support dénombrable,  $f(x) = x^2$  et  $x \geq 0$ . Alors

$$\hat{f}(\tilde{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{\tilde{A}}(x_i)/f(x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{\tilde{A}}(x_i)/x_i^2$$

Le principe d'extension étend le concept à des ensembles flous d'une fonction appliquée à un sous-ensemble classique de  $X$ . En effet, laissez  $f : X \rightarrow Z$  être une fonction et  $A$  un sous-ensemble classique de  $X$ .


 FIGURE 1.12 – Image d'un sous-ensemble flou à partir du principe d'extension d'une fonction  $f$ 

La fonction caractéristique de  $\tilde{A}$  est sa fonction d'appartenance. L'extension de Zadeh de  $f$  appliquée à  $\tilde{A}$  est le sous-ensemble  $\hat{f}(\tilde{A})$  de  $Z$ , qui est la fonction caractéristique  $\forall z$ .

$$\varphi_{\hat{f}(\tilde{A})}(z) = \sup_{\{x:f(x)=z\}} \chi_{\tilde{A}}(x) \begin{cases} 1 & \text{si } z \in f(\tilde{A}) \\ 0 & \text{si } z \notin f(\tilde{A}) \end{cases} = \chi_{f(\tilde{A})}(z)$$

Il est clair que la fonction d'adhésion de l'ensemble flou  $\hat{f}(\tilde{A})$  est juste la fonction caractéristique du groupe crisp  $f(\tilde{A})$ , c'est-à-dire que l'ensemble  $\hat{f}(\tilde{A})$  coïncide avec le groupe classique  $f(\tilde{A})$  :

$$\hat{f}(\tilde{A}) = f(\tilde{A}) = \{f(a) \mid a \in \tilde{A}\}$$

Dans la formule donnée, l'ensemble  $A$  est considéré comme un ensemble classique, ce qui signifie que l'image de l'ensemble flou  $\hat{f}(\tilde{A})$  est claire. Cela rend la formulation (1.39) inutile car chaque  $f(a)$  appartient à  $f(\tilde{A})$  avec un degré d'appartenance égal à 1. Le principe d'extension de Zadeh, dans le contexte des ensembles classiques, est appelé l'extension unifiée. Cela est utilisé dans la théorie des fonctions à valeur d'ensemble et dans l'analyse d'intervalle [2]. La différence entre le principe d'extension de Zadeh et l'extension unifiée réside dans le fait que le premier cartographie les fonctions d'appartenance des fonctions, tandis que le second cartographie directement les ensembles flous en valeurs floues, sans utiliser de fonction d'appartenance intermédiaire. Cela implique de caractériser les valeurs d'ajustement, y compris les plages de valeurs réelles, en les cartographiant directement de l'ajustement à la régulation.

Nous pouvons également remarquer que si  $A$  est un ensemble classique, alors  $[A]^\alpha = A \forall \alpha \in (0, 1]$ . Par conséquent,

$$[\hat{f}(\tilde{A})]^\alpha = [f(\tilde{A})]^\alpha = f(\tilde{A}) = f([\tilde{A}^\alpha])$$

Rappelons que pour  $\alpha = 0$  nous voulons dire que  $[\tilde{A}]^0$  est la fermeture de  $\tilde{A}$ , c'est-à-dire, le plus petit ensemble fermé contenant le soutien de  $\tilde{A}$ , si  $X$  est un espace topologique. Ce résultat, affirmé ici comme **théorème 2.3**, peut également être appliqué à un sous-ensemble flou de  $X$  [8], [42].

### Théorème 2.3

Soit  $f : X \rightarrow Z$  une fonction continue et  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$ . Ensuite,  $\forall \alpha \in [0, 1]$  l'égalité suivante tient :

$$[\hat{f}(\tilde{A})]^\alpha = f([\tilde{A}]^\alpha) \quad (1.41)$$

Ce résultat indique que les niveaux  $\alpha$  de l'ensemble flou obtenu par le Principe d'extension de Zadeh coïncident avec les images des niveaux  $\alpha$  par la fonction crisp (Fig. 1.13). La preuve de ce théorème utilise le Théorème de Weierstrass et elle peut être vue dans [8], [42].

### Exemple 2.2

Soit  $\tilde{A}$  un ensemble flou de nombres réels dont la fonction d'adhésion est donnée par

$$\varphi_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 4(x - x^2) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

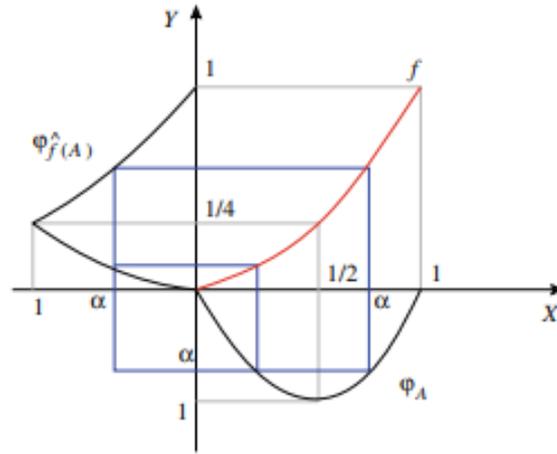
Les niveaux  $\alpha$  de  $\tilde{A}$  sont les intervalles

$$[\tilde{A}]^\alpha = \left[ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right]$$

Considérons maintenant la fonction réelle  $f(x) = x^2$  pour  $x \geq 0$ . Puisque  $f$  est une fonction croissante, nous avons

$$\begin{aligned} [\hat{f}(\tilde{A})]^\alpha &= \left[ f\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha})\right), f\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha})\right) \right] \\ &= \left[ \frac{1}{4}(1 - \sqrt{1 - \alpha})^2, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2 \right] \end{aligned}$$

La figure 1.13 illustre le sous-ensemble  $\hat{f}(\tilde{A})$ .


 FIGURE 1.13 – Sous-ensemble  $\hat{f}(\tilde{A})$  de l'exemple 2.2

### Définition 8

Soit  $f : X \times Y \rightarrow Z$  une fonction et  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  des sous-ensembles flous de  $X$  et  $Y$ , respectivement. L'extension  $\hat{f}$  de  $f$ , appliquée à  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ , est le sous-ensemble  $\hat{f}(\tilde{A}, \tilde{B})$  de  $Z$  avec la fonction d'adhésion donnée par :

$$\varphi_{\hat{f}(\tilde{A}, \tilde{B})} = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \min[\varphi_{\tilde{A}}(x), \varphi_{\tilde{B}}(y)] & \text{si } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases} \quad (1.42)$$

où  $f^{-1}(z) = \{(x, y) \mid f(x, y) = z\}$ .

### Exemple 2.3

Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui satisfait  $f(x, y) = x + y$ . Considérons les ensembles flous finis de  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= 0.4/3 + 0.5/4 + 1/5 + 0.5/6 + 0.2/7 \\ \tilde{B} &= 0.2/6 + 0.5/7 + 1/8 + 0.5/9 + 0.2/10 \end{aligned}$$

Calculons le degré d'adhésion de  $z = 10$  en  $\hat{f}(\tilde{A}, \tilde{B})$  :

$$\begin{aligned} & \sup_{\{x+y=10\}} \min[\varphi_{\tilde{A}}(x), \varphi_{\tilde{B}}(y)] \\ &= \max\{\min[\varphi_{\tilde{A}}(3), \varphi_{\tilde{B}}(7)], \min[\varphi_{\tilde{A}}(4), \varphi_{\tilde{B}}(6)]\} \\ &= \max\{0.4, 0.2\} = 0.4 \end{aligned}$$

## 1.9 Nombre flou

### 1.9.1 Généralités

Une **quantité floue** est définie comme un sous-ensemble flou normalisé  $\tilde{Q}$  dont l'univers  $E$  est l'ensemble des nombres réels. Le mode d'une quantité floue est défini comme un réel  $m$  pour lequel le degré d'appartenance  $\mu_{\tilde{Q}}(m)$  est égal à 1.

Un **intervalle flou**  $\tilde{I}$  est un sous-ensemble flou convexe correspondant à un intervalle de nombres réels  $\mathbb{R}$  avec des limites imprécises. Si sa fonction d'appartenance est semi-continue supérieurement, alors ses  $\alpha$ -cuts sont des intervalles fermés pour tout  $\alpha$  dans l'intervalle  $(0, 1]$ .

Un **nombre flou** est un intervalle flou dont la fonction d'appartenance est continue supérieurement, avec un support borné et une seule valeur modale [11]. La famille des nombres flous de  $\mathbb{R}$  est désignée par  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ , afin de les distinguer des autres sous-ensembles flous de  $\mathbb{R}$ .

#### Remarque

1° Les intervalles flous trapézoïdaux de nombres flous sont exclus de la définition précédente qui exigeait l'unicité de la valeur modale. Cependant, étant donné l'importance de ces intervalles dans de nombreux calculs, plusieurs chercheurs ont ajusté cette définition en permettant la non-unicité de la valeur modale, ce qui classe les intervalles flous trapézoïdaux dans la famille des nombres flous [56], [49], [5]. Cette dissertation doctorale suit cette logique de modification.

2° Un nombre flou  $\tilde{M}$  est dit **positif** (resp. **négatif**) si et seulement si

$$\eta_{\tilde{M}}(x) = 0, \forall x < 0 \text{ (resp. } \eta_{\tilde{M}}(x) = 0, \forall x > 0) \text{ [12].}$$

3° Si  $\tilde{M}$  est un nombre flou, tout réel  $m$  tel que  $\eta_{\tilde{M}}(m) = 1$  est dit **valeur modale** ou **mode** ou encore **valeur moyenne** de  $\tilde{M}$ . Ainsi,  $\text{Noy}(\tilde{M})$  est l'ensemble des valeurs modales de  $\tilde{M}$ .

4° Nous adoptons dans ce travail l'appellation "**nombre flou unimodal**" pour tout nombre flou  $\tilde{M}$  pour lequel le cardinal du noyau vaut 1.

5° L'appellation "**nombre flou multimodal**" sera réservée à tout nombre flou  $\tilde{M}$  dont le cardinal du noyau est supérieur ou égal à 2.

### 1.9.2 Opérations arithmétiques sur les nombres flous

Deux méthodes de base ont été développées pour additionner, soustraire, multiplier et diviser deux nombres flous. La première est basée sur le principe d'extension de Zadeh, et la deuxième sur l'arithmétique des  $\alpha$ -cuts et intervalles.

### 1.9.2.1 Arithmétique floue basée sur le principe d'extension

L'une des techniques qui font la force du principe d'extension de Zadeh est l'arithmétique floue basée sur ce principe. Considéré sur un produit de deux ensembles, ce principe permet d'étendre une loi de composition interne  $*$  en une loi de composition interne floue  $\otimes$  qui est définie dans un ensemble quelconque  $E$  dans la famille des sous-ensembles flous  $\tilde{\mathcal{P}}(E)$ . Ainsi, cette nouvelle loi est définie  $\forall(\tilde{M}, \tilde{N}) \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \times \tilde{\mathcal{P}}(E)$  par :

$$\eta_{\tilde{M} \otimes \tilde{N}}(z) = \sup\{\min\{\eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y)\} \mid x, y \in E \text{ et } x * y = z\} \quad (1.43)$$

Dans la famille des nombres flous  $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ , les opérations fondamentales  $\oplus, \otimes, \ominus, \oslash, \max$  et  $\min$  ont été définies respectivement par Dubois et Prade dans [11] ou par Zimmermann dans [56] de la manière suivante :

$$\eta_{\tilde{M} \oplus \tilde{N}}(z) = \sup\{\min\{\eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y)\} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x + y = z\} \quad (1.44)$$

$$\eta_{\tilde{M} \ominus \tilde{N}}(z) = \sup\{\min\{\eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y)\} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x - y = z\} \quad (1.45)$$

$$\eta_{\tilde{M} \oslash \tilde{N}}(z) = \sup\{\min\{\eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y)\} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x \cdot y = z\} \quad (1.46)$$

$$\eta_{\tilde{M} \oslash \tilde{N}}(z) = \sup\{\min\{\eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y)\} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x/y = z\} \quad (1.47)$$

$$\eta_{\max(\tilde{M}, \tilde{N})}(z) = \sup\{\min\{\eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y)\} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \max(x, y) = z\} \quad (1.48)$$

$$\eta_{\min(\tilde{M}, \tilde{N})}(z) = \sup\{\min\{\eta_{\tilde{M}}(x), \eta_{\tilde{N}}(y)\} \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \min(x, y) = z\} \quad (1.49)$$

#### Remarque

1° Dans la relation (1.43) qui définit l'opération du point flottant, les réels  $z$  du support de  $\tilde{M} \otimes \tilde{N}$  sont obtenus par la composition des réels  $x$  de  $\tilde{M}$  et  $y$  de  $\tilde{N}$ . Les naissances de  $Supp(\tilde{M} \otimes \tilde{N})$  peuvent être connues en examinant la nature de l'opération  $*$ . Pour une opération croissante, aucun problème n'existe, mais pour une opération en diminution, plusieurs cas existent [36].

2° La déviation standard de 1.45 ne garantit pas l'égalité  $\tilde{M} \ominus \tilde{M} = 0$ , limitant les résultats théoriques et pratiques sur les nombres flottants. De nouvelles soustractions, telles que  $\ominus_H, \ominus_{gH}$  et  $\ominus_g$ , ont été introduites.

— La première  $\ominus_H$ , dite "**différence de Hukuhara**", introduite par Hukuhara au moyen d'un espace topologique classique dans [22], est redéfinie par Bede dans [24],  $\forall \tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{P} \in \mathbb{F}\mathbb{R}$  par :

$$\tilde{M} \ominus_H \tilde{N} = \tilde{P} \iff \tilde{M} = \tilde{N} \oplus \tilde{p}$$

Remarquons qu'avec cette différence, nous obtenons,  $\forall \tilde{M} \in \mathbb{FR}$ , l'égalité :

$$\tilde{M} \ominus_H \tilde{N} = 0$$

Si  $\tilde{M} \ominus_H \tilde{N}$  existe, ses  $\alpha$ -cuts pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  sont selon Bede [24] :

$$\left[ \tilde{M} \ominus_H \tilde{N} \right]_{\alpha} = \left[ \tilde{M}_{\alpha}^L - \tilde{N}_{\alpha}^L, \tilde{M}_{\alpha}^U - \tilde{N}_{\alpha}^U \right]$$

— Stefanini [48] définit la deuxième  $\ominus_{gH}$ , appelée "**différence généralisée de Hukuhara**" ou simplement "**gH-différence**", dans l'ensemble des nombres flous par  $\forall \tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{P} \in \mathbb{FR}$  :

$$\tilde{M} \ominus_{gH} \tilde{N} = \tilde{P} \iff \begin{cases} \tilde{M} = \tilde{N} \oplus \tilde{P} \\ \text{ou } \tilde{N} = \tilde{M} \oplus (-1)\tilde{P} \end{cases}$$

En plus de la propriété  $\tilde{M} \ominus_{gH} \tilde{M} = 0$ , si  $\tilde{M} \ominus_{gH} \tilde{N} = \tilde{P}$ , on vérifie que le nombre flou  $\tilde{P}$  est unique. En termes des alpha-cuts, Bede [24] montre que ,  $\forall \tilde{M}, \tilde{N} \in \mathbb{FR}$

$$\left[ \tilde{M} \ominus_{gH} \tilde{N} \right]_{\alpha} = \left[ \min \left\{ \tilde{M}_{\alpha}^L - \tilde{N}_{\alpha}^L, \tilde{M}_{\alpha}^U - \tilde{N}_{\alpha}^U \right\}, \max \left\{ \tilde{M}_{\alpha}^L - \tilde{N}_{\alpha}^L, \tilde{M}_{\alpha}^U - \tilde{N}_{\alpha}^U \right\} \right]$$

— La dernière  $\ominus_g$ , dite "**différence généralisée**" ou tout simplement "**gdifférence**", est définie dans l'ensemble des nombres flous par Bede dans [24], pour  $\forall \tilde{M}, \tilde{N} \in \mathbb{FR}$  :

$$\left[ \tilde{M} \ominus_g \tilde{N} \right]_{\alpha} = cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} \left( \tilde{M}_{\beta} \ominus_{gH} \tilde{N}_{\beta} \right), \forall \alpha, \beta \in [0, 1]$$

### 1.9.2.2 Arithmétique floue par alpha-cuts et intervalles

Selon Ritha et Menon dans ([41],p.76), la proposition suivante expose les caractéristiques des  $\alpha$ -cuts lors d'une opération arithmétique floue. Sa contribution est importante dans l'arithmétique des  $\alpha$ -cuts et des intervalles.

#### Proposition 1.1

Soient  $\tilde{A}$  et  $\tilde{A}'$  deux nombres flous de  $\alpha$ -cuts respectives  $\tilde{A}_{\alpha}$  et  $\tilde{A}'_{\alpha}$ , avec  $\alpha \in [0, 1]$ . Les opérations  $\oplus, \ominus, \odot$  et  $\otimes$  s'effectuent sur  $\tilde{A}$  et  $\tilde{A}'$  par passage à leurs  $\alpha$ -cuts de la manière suivante :

$$\left( \tilde{A} \oplus \tilde{A}' \right)_{\alpha} = \tilde{A}_{\alpha} + \tilde{A}'_{\alpha} \quad (1.50)$$

$$\left( \tilde{A} \ominus \tilde{A}' \right)_{\alpha} = \tilde{A}_{\alpha} - \tilde{A}'_{\alpha} \quad (1.51)$$

$$\left( \tilde{A} \odot \tilde{A}' \right)_{\alpha} = \tilde{A}_{\alpha} \cdot \tilde{A}'_{\alpha} \quad (1.52)$$

$$\left(\tilde{A} \circ \tilde{A}'\right)_{\alpha} = \frac{\tilde{A}_{\alpha}}{\tilde{A}'_{\alpha}} \quad (1.53)$$

La proposition générale de Hanss dans [21] résume ces quatre égalités précédentes pour une opération arithmétique floue quelconque  $\otimes$  de la façon suivante :

$$\left(\tilde{A} \otimes \tilde{A}'\right)_{\alpha} = \tilde{A}_{\alpha} * \tilde{A}'_{\alpha} \quad \forall \tilde{A}, \tilde{A}' \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \quad (1.54)$$

où  $*$  est une opération arithmétique définie dans la famille des intervalles fermés de  $\mathbb{R}$  par  $\forall [a_1, b_1], [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}$  :

$$[a_1, b_1] * [a_2, b_2] = [\min G, \max G] \quad (1.55)$$

Avec  $G = \{a_1 * a_2, a_1 * b_2, b_1 * a_2, b_1 * b_2\}$ .

Le procédé exposé ci-après, indique comment appliquer concrètement ces différentes formules ci-haut.

### Procédé de calcul

Opérations arithmétiques sur deux nombres flous  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$  en employant les  $\alpha$  – cuts et les intervalles.

Tout d'abord, on effectue la défuzzification, qui consiste à convertir les nombres flous en intervalles réels  $\mathbb{R}$  en utilisant les alpha-cuts.

Ensuite, on applique les opérations arithmétiques courantes à ces intervalles réels. Après avoir réalisé les calculs, on obtient  $\alpha$  – cut qui représente un ensemble crisp dans  $\mathbb{R}$ .

Afin de retrouver le nombre flou correspondant par 1.7.7, on procède à une fuzzification en utilisant une relation particulière. Ce procédé propose une approche organisée pour manipuler des nombres flous tout en prenant en considération l'incertitude intrinsèque de ces valeurs, ce qui requiert une arithmétique adaptée aux intervalles fermés de  $\mathbb{R}$ .

### Opérations arithmétiques sur les intervalles de $\mathbb{R}$

$\forall * \in \{+, -, \times, \div\}$ , on définit l'opération arithmétique  $*$  sur deux intervalles ordinaires fermés  $[a_1, b_1]$  et  $[a_2, b_2]$  de  $\mathbb{R}$  par la relation suivante :

$$[a_1, b_1] * [a_2, b_2] = \{a * b \mid a_1 \leq a \leq b_1 \text{ et } a_2 \leq b \leq b_2\} \quad (1.56)$$

Où la division n'a de sens que si zéro n'appartient pas à  $[a_2, b_2]$  ([4]).

L'égalité (1.9.2.2) à son tour, est souvent simplifiée dans les cas des opérations  $+, -, \times, \div$  comme suit :

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] \quad (1.57)$$

$$[a_1, b_1] - [a_2, b_2] = [a_1 - b_2, b_1 - a_2] \quad (1.58)$$

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [\min(a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2, b_1b_2); \max(a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2, b_1b_2)] \quad (1.59)$$

$$\frac{[a_1, b_1]}{[a_2, b_2]} = \left[ \min\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{b_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{b_1}{a_2}\right); \max\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{b_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{b_1}{a_2}\right) \right] \quad (1.60)$$

La multiplication et la division sont encore plus simplifiées si l'information sur les signes de bornes est disponible.

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [a_1a_2, b_1b_2]; \text{ Si } a_1 \geq 0 \text{ et } a_2 \geq 0 \quad (1.61)$$

En résumé, l'arithmétique floue basée sur les  $\alpha$ -cuts et intervalles se fait en trois étapes :

- 1° **La déffuzification** : Les nombres flous donnés sont transformés en ensembles classiques ( $\alpha$ -cuts) avec  $\alpha \in [0, 1]$ , puis on effectue l'opération sur ces  $\alpha$ -cuts en utilisant la formule (1.9.2.2).
- 2° **Le calcul ordinaire** : C'est l'étape des calculs ordinaires concernant les éléments des intervalles de  $\mathbb{R}$ , dont le résultat est  $\alpha$ -cut.
- 3° **La fuzzification** : Il s'agit de trouver le nombre flou correspondant à l'alpha-cut trouvée ; la relation (1.7.7) est pratique dans cette situation.

### 1.9.3 Alpha-cuts d'un nombre flou

Les alpha-cuts jouent un rôle essentiel dans la théorie des nombres flous. Elle a pu simplifier l'introduction de l'arithmétique floue appelée "arithmétique des  $\alpha$ -cuts et intervalles" en utilisant le principe d'extension de Zadeh. [55] Cette notion est l'objet de plusieurs théorèmes importants de cette théorie, tels que le théorème de stacking [11], le théorème de caractérisation [31], le théorème de représentation  $L-U$  [3], le théorème de Goetschel et Voxman [16], etc. Les caractéristiques des fonctions déterminant les cuts de niveau  $\alpha$  d'un nombre flou  $\tilde{A}$  sont décrites dans tous ces théorèmes.

**Théorème 3 (Stacking theorem, Negoita et Ralescu [38])**

Si  $\tilde{A}$  est un nombre flou et si  $\tilde{A}_\alpha$  sont ses cuts de niveau  $\alpha$  avec  $\alpha \in [0, 1]$ , alors :

- (i)  $\tilde{A}_\alpha$  est un intervalle fermé noté  $\tilde{A}_\alpha = [\tilde{A}_\alpha^L, \tilde{A}_\alpha^U]$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$  ;
- (ii) Si  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ , alors  $\tilde{A}_{\alpha_2} \subseteq \tilde{A}_{\alpha_1}$  ;
- (iii) Pour toute suite  $(\alpha_n)$  qui converge vers  $\alpha \in (0, 1]$  par des valeurs inférieures à  $\alpha$ , on a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{\alpha_n} = \tilde{A}_\alpha$$

- (iv) Pour toute suite  $(\alpha_n)$  qui converge vers 0 par des valeurs supérieures à 0, on a

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{\alpha_n}\right) = \tilde{A}_0$$

où  $cl$  désigne la fermeture ou l'adhérence.

**Preuve**( [24])

Le théorème ci-dessous, appelé "de caractérisation des nombres flous", est inverse du théorème de stacking, indiqué précédemment.

**Théorème 4 (Théorème de caractérisation, Negoita et Ralescu [38])**

*Si  $M_\alpha : \alpha \in [0, 1]$  est une famille des sous-ensembles vérifiant les conditions suivantes :*

- (i)  $M_\alpha$  est un intervalle fermé non vide,  $\forall \alpha \in [0, 1]$  ;
- (ii) Si  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ , on a  $M_{\alpha_2} \subseteq M_{\alpha_1}$  ;
- (iii) Pour toute suite  $(\alpha_n)$  qui converge vers  $\alpha \in (0, 1]$  par des valeurs inférieures à  $\alpha$ , on a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} = M_\alpha$$

- (iv) Pour toute suite  $(\alpha_n)$  qui converge vers 0 par des valeurs supérieures à 0, on a

$$cl \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} \right) = M_0$$

Alors, il existe un nombre flou unique  $\tilde{V}$  tel que  $\tilde{V}_\alpha = M_\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$

**Preuve**( [24])

**Théorème 5 (Théorème de représentation L-U, Goetschel et Voxman [16])**

*Si  $\tilde{A}$  est un nombre flou et si  $\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} = [\tilde{A}_\alpha^L, \tilde{A}_\alpha^U]$  sont ses  $\alpha$ -cuts pour  $\alpha \in [0, 1]$  ; alors les fonctions  $\tilde{A}^L, \tilde{A}^U : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , définissant les bornes des  $\alpha$ -cuts, satisfont les conditions suivantes :*

- (i)  $\tilde{A}^L(\alpha) = \tilde{A}_\alpha^L \in \mathbb{R}$  est une fonction bornée, non décroissante, continue à gauche dans  $(0, 1]$  et continue à droite de 0 ;
- (ii)  $\tilde{A}^U(\alpha) = \tilde{A}_\alpha^U \in \mathbb{R}$  est une fonction bornée, non croissante, continue à gauche dans  $(0, 1]$  et continue à droite de 0 ;
- (iii)  $\tilde{A}_1^L \leq \tilde{A}_1^U$

**Preuve**( [24])

**Théorème 6 (Théorème de Goetschel-Voxman, Goetschel et Voxman [16])**

*Si  $M^L$  et  $M^U$  sont deux fonctions réelles de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , d'une seule variable  $\alpha$ , satisfaisant les conditions suivantes :*

- (i)  $M^L$  est une fonction bornée croissante sur  $[0, 1]$ ,
- (ii)  $M^U$  est une fonction bornée décroissante sur  $[0, 1]$ ,
- (iii)  $M^L(1) \leq M^U(1)$
- (iv)  $M^L$  et  $M^U$  sont continues à gauche sur  $(0, 1]$  et à droite de 0,

Alors il existe un nombre flou  $\tilde{V}$  tel que  $\tilde{V}_\alpha = (M^L(\alpha), M^U(\alpha))$

**Preuve**( [24])

La définition suivante, formulée par Yang et Liu dans [51], définit l'égalité de deux nombres flous sur base de leurs  $\alpha$ -cuts.

**Définition 9** (Yang et Liu [51])

Soient  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  deux nombres flous de  $\alpha$ -cuts respectives  $\tilde{U}_\alpha = [\tilde{U}_\alpha^L, \tilde{U}_\alpha^U]$  et  $\tilde{V}_\alpha = [\tilde{V}_\alpha^L, \tilde{V}_\alpha^U]$ .  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  sont dits égaux si et seulement si  $\tilde{U}^L(\alpha) = \tilde{V}^L(\alpha)$  et  $\tilde{U}^U(\alpha) = \tilde{V}^U(\alpha)$ ;  $\forall \alpha \in [0, 1]$

#### 1.9.4 Concept de $\alpha$ -cut

Un sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  de  $U$  est « formé » par des éléments de  $U$  avec un ordre (hiérarchie) qui est donné par les degrés d'appartenance. Un élément  $x$  de  $U$  sera dans une « classe d'ordre »  $\alpha$  si son degré d'appartenance (sa valeur d'adhésion) est au moins le niveau de seuil  $\alpha \in [0, 1]$  qui définit cette classe. L'ensemble classique de tels éléments est appelé un  $\alpha$ -cut de  $\tilde{A}$ , désigné  $[\tilde{A}]^\alpha$ .

#### Définition 10

La notion d' $\alpha$ -cut joue un rôle essentiel dans la théorie des ensembles flous. Pour une partie floue  $\tilde{A}$ . Dans un univers  $U$  avec un paramètre  $\alpha \in [0, 1]$ , le niveau  $\alpha$  de  $\tilde{A}$  est défini comme l'ensemble classique  $[\tilde{A}]^\alpha$  de  $U$ , tel que

$$[\tilde{A}]^\alpha = \left\{ x \in U : \varphi_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \right\} \text{ avec } 0 < \alpha \leq 1$$

Quand  $U$  est un espace topologique, on définit le niveau zéro  $\alpha$  du sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  comme le sous-ensemble fermé de  $U$  contenant le support de  $\tilde{A}$ . Autrement dit,  $[\tilde{A}]^0$  correspond à la fermeture du support de  $\tilde{A}$  et est également connu sous le nom de  $\overline{\text{supp}\tilde{A}}$ . Cette définition revêt une importance capitale dans les cas théoriques traités dans le texte.

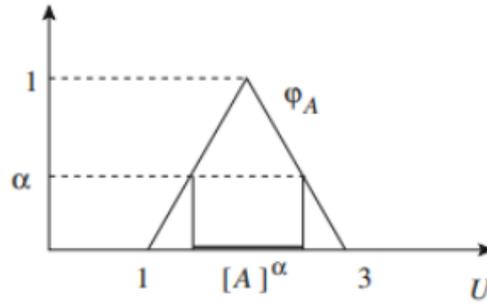
Il convient de souligner que l'ensemble  $\left\{ x \in U : \varphi_{\tilde{A}}(x) \geq 0 \right\} = U$  est égal à 0. ne correspond pas forcément à  $[\tilde{A}]$ . L'importance de la distinction entre le niveau zéro et l'ensemble où la fonction d'appartenance est positive est mise en évidence par  $[\tilde{A}]^0 = \overline{\text{supp}\tilde{A}}$ .

**Exemple 2.3** Soit  $U = \mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et  $\tilde{A}$  un sous-ensemble flou de  $\mathbb{R}$  avec la fonction d'appartenance suivante :

$$\varphi_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{Si } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & \text{Si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{Si } x \notin [1, 3) \end{cases}$$

Dans ce cas, nous avons :

$$[\tilde{A}]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha] \text{ avec } 0 < \alpha \leq 1 \text{ et } [\tilde{A}]^0 = \overline{[1, 3[} = [1, 3]$$

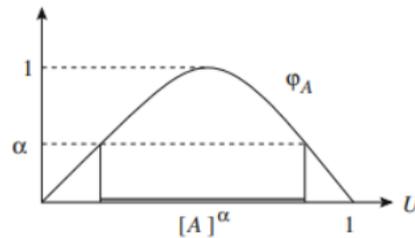

 FIGURE 1.14 – niveau  $\alpha$  du sous-ensemble flou  $\tilde{A}$ 

**Exemple 2.4** Soit  $U = [0, 1]$  et  $\tilde{A}$  soit le sous-ensemble flou de  $U$  dont la fonction d'appartenance est donnée par  $\varphi_{\tilde{A}}(x) = 4(x - x^2)$ . Alors,

$$[\tilde{A}]^\alpha = \left[ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right] \text{ pour tout } \alpha \in [0, 1]$$

Nous avons observé que si  $x$  est un élément de  $[\tilde{A}]^\alpha$ , alors  $x$  appartient à l'ensemble flou  $\tilde{A}$  avec au moins le degré de fonction d'adhésion  $\alpha$ . Nous avons aussi que si  $\alpha \leq \beta$  alors  $[\tilde{A}]^\alpha \subseteq [\tilde{A}]^\beta$ .

Le théorème suivant montre qu'un ensemble flou est uniquement déterminé par ses  $\alpha$ -cuts.


 FIGURE 1.15 – niveau  $\alpha$  du sous-ensemble flou  $\tilde{A}$ 

### Théorème 7

Soit  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  des sous-ensembles flous de  $U$ . Une condition nécessaire et suffisante pour  $\tilde{A} = \tilde{B}$  de tenir est que  $[\tilde{A}]^\alpha = [\tilde{B}]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$ .

**Preuve** Bien sûr  $\tilde{A} = \tilde{B} \implies [\tilde{A}]^\alpha = [\tilde{B}]^\alpha; \forall \alpha \in [0, 1]$ .

Supposons maintenant que  $[\tilde{A}]^\alpha = [\tilde{B}]^\alpha; \forall \alpha \in [0, 1]$ . Si  $\tilde{A} = \tilde{B}$  alors il y a un  $x \in U$  tel que  $\varphi_{\tilde{A}}(x) \neq \varphi_{\tilde{B}}(x)$ . Par conséquent, nous avons  $\varphi_{\tilde{A}}(x) < \varphi_{\tilde{B}}(x)$ , ou que, inversement,  $\varphi_{\tilde{A}}(x) > \varphi_{\tilde{B}}(x)$ . Si nous imaginons que  $\varphi_{\tilde{A}}(x) > \varphi_{\tilde{B}}(x)$ , alors nous arrivons à la conclusion que  $x \in [\tilde{A}]^{\varphi_{\tilde{A}}(x)}$  et  $x \geq 1$  et  $x \notin [\tilde{B}]^{\varphi_{\tilde{A}}(x)}$  donc  $[\tilde{A}]^{\varphi_{\tilde{A}}(x)} \neq [\tilde{B}]^{\varphi_{\tilde{A}}(x)}$ , ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle  $[\tilde{A}]^\alpha = [\tilde{B}]^\alpha; \forall \alpha \in [0, 1]$ . Une contradiction similaire est atteinte si nous supposons que  $\varphi_{\tilde{A}}(x) < \varphi_{\tilde{B}}(x)$ .

La conséquence de ce théorème est que la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou est maintenant liée aux fonctions caractéristiques de ses niveaux  $\alpha$ .

**Corollaire 1 :**

La fonction d'appartenance  $\varphi_{\tilde{A}}$  d'un ensemble flou  $\tilde{A}$  peut être exprimée en termes de la fonction caractéristique de leurs niveaux  $\alpha$ , comme suit :

$$\varphi_{\tilde{A}}(x) = \sup \min \left[ \alpha, \chi_{[\tilde{A}]^\alpha}(x) \right] \text{ avec } \chi_{[\tilde{A}]^\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in [\tilde{A}]^\alpha \\ 0 & \text{Si } x \notin [\tilde{A}]^\alpha \end{cases}$$

Le théorème suivant est d'une importance extrême dans l'étude de la théorie des ensembles flou et montre une condition qui est suffisante pour qu'une famille de sous-ensembles, au sens classique, de  $U$  puisse être formée par différents niveaux  $\alpha$  d'un sous-ensemble flou.

**Théorème 8** (Théorème de la représentation de Negoita et Ralescu [38])

Soit  $\tilde{A}_\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , être une famille de sous-ensembles classiques de  $U$ , tels que les conditions suivantes :

1.  $\sqcup \tilde{A}_\alpha \subseteq \tilde{A}_0$  avec  $\alpha \in [0, 1]$  ;
2.  $\tilde{A}_\alpha \subseteq \tilde{A}_\beta$  Si  $\beta \leq \alpha$  ;
3.  $\tilde{A}_\alpha = \bigcap_{k \geq 0} \tilde{A}_{\alpha_k}$  Si  $\alpha_k$  converge à  $\alpha$  avec  $\alpha_k \leq \alpha$ .

Dans ces conditions, il existe un sous-ensemble unique flou de  $\tilde{A}$  en  $U$  dont les niveaux  $\alpha$  sont exactement les sous-ensembles classiques  $\tilde{A}_\alpha$ , en d'autres termes,  $[\tilde{A}]^\alpha = \tilde{A}_\alpha$ . L'idée de la preuve est de construire, pour chaque  $x \in U$ , la fonction d'appartenance de  $\tilde{A}$ , comme suit,

$$\varphi_{\tilde{A}}(x) = \sup \{ \alpha \in [0, 1] : x \in \tilde{A}_\alpha \}.$$

En utilisant la définition des niveaux  $\alpha$ , nous avons les propriétés suivantes :

1.  $[\tilde{A} \cup \tilde{B}]^\alpha = [\tilde{A}]^\alpha \cup [\tilde{B}]^\alpha$  ;
2.  $[\tilde{A} \cap \tilde{B}]^\alpha = [\tilde{A}]^\alpha \cap [\tilde{B}]^\alpha$  ;

**Définition 11**

On dit qu'un ensemble flou est normal quand tous ses niveaux  $\alpha$  ne sont pas vides ou, en d'autres termes, si  $[\tilde{A}]^1 = \emptyset$ .

Rappelant que le support du sous-ensemble flou  $A$  est le classique

$$\text{supp} \tilde{A} = \{ x \in U : \varphi_{\tilde{A}}(x) > 0 \}$$

Il est courant de décrire  $A$  à l'aide de la notation suivante, lorsqu'il a un nombre d'éléments numérotés à son appui, en utilisant la mention suivante,

$$\tilde{A} = \frac{\varphi_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\varphi_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$$

et

$$\tilde{A} = \frac{\varphi_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\varphi_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\varphi_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}.$$

Quand  $\tilde{A}$  a un soutien discret fini. C'est-à-dire,  $\text{supp}\tilde{A} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Il convient de noter que la notation  $\frac{\varphi_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$ , n'indique pas la division. C'est juste une façon de visualiser un élément  $x_i$  et son degré respectif d'appartenance, sa valeur d'adhésion,  $\varphi_{\tilde{A}}(x_i)$ .

Ici aussi, le symbole «+» dans la notation ne signifie pas addition et ne veut pas dire somme. C'est juste un moyen de connecter les éléments de  $U$  qui sont en  $\tilde{A}$  avec leurs degrés respectifs.

### 1.9.5 Principe de la méthode $\alpha - cut$

Un ensemble de points flottants est divisé en deux parties distinctes par la méthode  $\alpha - cut$  : la partie inférieure et la partie supérieure. Un point flottant variable est un point flottant dont la capacité d'attirer confère un degré d'attraction à chaque élément de l'univers du discours. Un chiffre réel  $\alpha$ , compris entre 0 et 1, définit la manière dont l'ensemble du point flottant est parti en deux. Les éléments présents dans la partie inférieure ont un degré d'attraction plus élevé ou égal, tandis que ceux présents dans la partie supérieure ont un degré infrarouge strict. Il est possible de manipuler ces parties individuellement pour des opérations de logique de point flottant comme la moyenne, la fusion ou la prise de décisions. Après avoir réalisé les opérations sur les parties inférieures et supérieures, les résultats peuvent être analysés ou interprétés afin de prendre des décisions ou de fournir des informations dans un contexte spécifique. En somme, l'utilisation de la méthode  $\alpha - cut$  facilite la gestion de l'incertitude et de la valeur dans les systèmes de points flottants.

### 1.9.6 Arithmétique sur les nombres flous triangulaires

Pour effectuer l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division de deux nombres flous triangulaires  $\tilde{M} = (a/b/c)$  et  $\tilde{N} = (d/e/f)$  par l'arithmétique des alpha-cuts, il suffit de trouver leurs  $\alpha - cuts$   $\tilde{M}_\alpha$  et  $\tilde{N}_\alpha$ , et d'appliquer les formules allant de (1.9.2.2) à (1.9.2.2).

$\tilde{M}_\alpha$  et  $\tilde{N}_\alpha$  étant respectivement des ensembles des réels  $x$  tels que  $\eta_{\tilde{M}}(x) \geq \alpha$  et  $\eta_{\tilde{N}}(x) \geq \alpha$ , on a :

$$\tilde{M}_\alpha = \left[ \tilde{M}^L(\alpha), \tilde{M}^U(\alpha) \right] = \left[ a + (b - a)\alpha, c + (b - c)\alpha \right] \quad (1.62)$$

$$\widetilde{N}_\alpha = [\widetilde{N}^L(\alpha), \widetilde{N}^U(\alpha)] = [d + (e - d)\alpha, f + (e - f)\alpha] \quad (1.63)$$

L'addition

$$\widetilde{M} \oplus \widetilde{N} = (a + d/b + e/c + f) \quad (1.64)$$

La soustraction

$$\widetilde{M} \ominus \widetilde{N} = (a + d/b - e/c + f) \quad (1.65)$$

**Théorème 9** (de reconnaissance d'un nombre flou triangulaire)

Soit un nombre flou  $\widetilde{M}$  de  $\alpha$ -cut  $\widetilde{M}_\alpha = [\widetilde{M}^L(\alpha), \widetilde{M}^U(\alpha)]$ .  $\widetilde{M}$  est triangulaire ssi il existe trois réels  $u < v < w$  tq  $\forall \alpha \in [0, 1]$  :

$$\widetilde{M}^L(\alpha) = (v - u)\alpha + u \quad (1.66)$$

et

$$\widetilde{M}^U(\alpha) = (v - w)\alpha + w \quad (1.67)$$

**Preuve**

**Condition nécessaire :**

Soit un nombre flou  $\widetilde{M}$  dont la cut de niveau  $\alpha$  est donnée par  $\widetilde{M}_\alpha = [\widetilde{M}^L(\alpha), \widetilde{M}^U(\alpha)]$ . Supposons dans un premier temps que ce nombre soit triangulaire. Dans ce cas, d'après l'égalité (1.9.2.2), il existe trois réels  $a < b < c$  pour lesquels la cut de  $\widetilde{M}$  de niveau  $\alpha$  est donnée par

$$\widetilde{M}_\alpha = [\widetilde{M}^L(\alpha), \widetilde{M}^U(\alpha)] = [a + (b - a)\alpha, c + (b - c)\alpha].$$

En prenant  $a = u$ ,  $b = v$ ,  $c = w$ , cette cut devient :

$$\widetilde{M}_\alpha = [\widetilde{M}^L(\alpha), \widetilde{M}^U(\alpha)] = [(v - u)\alpha + u, (v - w)\alpha + w]$$

avec  $u < v < w$ .

Ce qui implique finalement :

$$\widetilde{M}^L(\alpha) = (v - u)\alpha + u$$

et

$$\widetilde{M}^U(\alpha) = (v - w)\alpha + w.$$

Donc, si un nombre flou  $\widetilde{M}$  est triangulaire, il existe trois nombres réels  $u, v$  et  $w$  tq  $u < v < w$ ,  $\widetilde{M}^L(\alpha) = (v - u)\alpha + u$ ,  $\widetilde{M}^U(\alpha) = (v - w)\alpha + w \forall \alpha \in [0, 1]$ .

**Condition suffisante :** Soit un nombre flou  $\widetilde{M}$  dont la cut de niveau  $\alpha$  est donnée par  $\widetilde{M}_\alpha = [\widetilde{M}^L(\alpha), \widetilde{M}^U(\alpha)]$ . Montrons que s'il existe trois nombres réels  $u < v < w$  tq

$u < v < w$ ,  $\widetilde{M}^L(\alpha) = (v - u)\alpha + u$ ,  $\widetilde{M}^U(\alpha) = (v - w)\alpha + w \forall \alpha \in [0, 1]$ , alors  $\widetilde{M}$  est triangulaire.

En effet, la cut de  $\widetilde{M}$  de niveau  $\alpha$  étant connue pour  $0 \leq \alpha \leq 1$ , l'égalité (1.7.7) permet de reconstruire la fonction d'appartenance  $\widetilde{\eta}_{\widetilde{M}}$ , sans perdre de vue que  $\widetilde{M}^L$  et  $\widetilde{M}^U$  sont des fonctions de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $\widetilde{M}_\alpha = \eta_{\widetilde{M}}^{-1}([\alpha, 1])$ . Notons que si  $\alpha$  parcourt l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $\widetilde{M}_\alpha$  recouvre le support de  $\widetilde{M}$ . L'hypothèse  $\widetilde{M}_\alpha = [\widetilde{M}^L(\alpha), \widetilde{M}^U(\alpha)] = [(v - u)\alpha + u, (v - w)\alpha + w]$  laisse voir déjà que  $\text{supp}(\widetilde{M}) = ]u, w[$  et que la valeur modale de  $\widetilde{M}$  est  $v$ . D'après le théorème de Goetschel et Voxmam,  $\widetilde{M}^L$  est continue et croissante sur  $[u, v]$  et  $\widetilde{M}^U$  est continue et décroissante sur  $[v, w]$ . Nous déduisons que  $\eta_{\widetilde{M}}$  est une fonction réelle définie par trois fonctions différentes. La 1ère est la réciproque de  $\widetilde{M}^L$  sur  $[u, v]$ , la seconde est la réciproque de  $\widetilde{M}^U$  sur  $[v, w]$  et la dernière est nulle sur  $\mathbb{R} \setminus ([u, v] \cup [v, w])$ . Ces deux fonctions réciproques sont respectivement  $(\widetilde{M}^L)^{-1}(x) = \frac{1}{v - u}(x - u)$  et  $(\widetilde{M}^U)^{-1}(x) = \frac{1}{v - w}(x - w)$ .

La fonction d'appartenance  $\eta_{\widetilde{M}}(x)$  est donc définie par :

$$\eta_{\widetilde{M}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{v - u}(x - u) & \text{Si } u \leq x \leq v \\ \frac{1}{v - w}(x - w) & \text{Si } v < x \leq w \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (1.68)$$

Ainsi, les trois réels  $u, v$  et  $w$  de l'égalité (1.9.6) satisfont la définition d'un nombre flou triangulaire.  $\widetilde{M}$  est triangulaire.

**Corollaire 2 :** Soit un nombre flou  $\widetilde{M}$  triangulaire. Si  $\widetilde{M}$  a pour support  $]u, w[$ , et pour valeur modale  $v$ ; alors la cut de  $\widetilde{M}$  de niveau  $\alpha$  est l'intervalle fermé :

$$\widetilde{M}_\alpha = [(v - u)\alpha + u, (v - w)\alpha + w]$$

## 1.10 Nombre flou de type $L - R$ (Left - Right)

Cette approche repose sur l'arithmétique des nombres flous de type  $L - R$  qui est limitée aux approximations faibles. Son élaboration découle d'une réflexion sur trois observations faites concernant les mesures évaluées en utilisant la méthode de programmation non linéaire paramétrique, à savoir :

1. Les paramètres de performance des files d'attente floues simples sont généralement des nombres flous positifs; ces chiffres correspondent au nombre de clients, au temps d'attente, au débit de la file, ... qui sont généralement des valeurs positives.
2. Ces résultats, qui sont généralement décrits par les fonctions d'appartenance, peuvent également être décrits par les supports et les valeurs modales des nombres flous obtenus.
3. Les nombres flous triangulaires ou trapézoïdaux sont utilisés comme paramètres de fonctionnement dans la quasi-totalité des études menées sur ce sujet, et ces deux

types de nombres font partie des nombres flous de type  $L - R$ .

### 1.10.1 Première forme de type $L - R$

#### Définition 12

Un nombre flou  $\widetilde{M}$  est considéré comme de type  $L - R$  si et seulement si trois réels  $m, a > 0, b > 0$  et deux fonctions positives, continues et décroissantes  $L$  et  $R$  de  $\mathbb{R}$  dans l'intervalle unité  $[0, 1]$ , tels que :

$$L(0) = R(0) = 1 \quad (1.69)$$

$$L(1) = 0 \text{ ou } L(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0 \quad (1.70)$$

$$R(1) = 0 \text{ ou } R(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0 \quad (1.71)$$

$$\eta_{\widetilde{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{a}\right) & \text{Si } x \in [m-a, m] \\ R\left(\frac{x-m}{b}\right) & \text{Si } x \in [m, m+b] \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (1.72)$$

### 1.10.2 Notations et appellations :

- (i) La valeur modale ou le mode de  $\widetilde{M}$  est  $m$ .
- (ii) Les valeurs  $a$  et  $b$  sont respectivement désignées comme l'étalement gauche ou l'écart gauche et l'étalement droit ou l'écart droit de  $\widetilde{M}$ .
- (iii)  $\widetilde{M}$  est symboliquement noté  $\widetilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$ .
- (iv) On appelle la représentation L-R, l'écriture L-R ou la forme L-R de  $\widetilde{M}$  la notation  $\langle m, a, b \rangle_{LR}$ .
- (v) Par convention  $\langle m, 0, 0 \rangle_{LR}$  est le nombre réel ordinaire  $m$  et est également connu sous le nom de singleton flou.
- (vi) Les nombres flous de type L-R seront représentés par la notation  $\mathbb{F}_{LR}(\mathbb{R})$ .
- (vii) Selon la définition de  $\eta_{\widetilde{M}}$  en 1.11.1, le support de  $\widetilde{M}$  est défini par l'intervalle ouvert :

$$\text{supp}(\widetilde{M}) = ]m-a, m] \cup [m, m+b[ = ]m-a, m+b[ \quad (1.73)$$

- (viii) En cas d'égalité entre  $L$  et  $R$ , le nombre  $\widetilde{M}$  est appelé semi-symétrique. On appelle symétrique un nombre semi-symétrique dont les étalements sont égaux ([21]).
- (ix) Il existe de nombreuses fonctions  $L$  et  $R$  qui répondent à ces conditions ; Zimmer-

mann [56] propose par exemple les fonctions suivantes pour  $p > 0$  :

$$L(x) = R(x) = \max(0, 1 - x^p) \quad (1.74)$$

$$L(x) = R(x) = \exp(-x) \quad (1.75)$$

$$L(x) = R(x) = \frac{1}{1 + x^p} \quad (1.76)$$

## 1.11 Arithmétique des nombres flous de même type $L - R$

### 1.11.1 Addition et soustraction

En utilisant la relation (1.43), Dubois et Prade ont montré dans [11] que si  $\tilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$  et  $\tilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  sont deux nombres flous de même type  $L - R$ , leur somme et leur différence sont des nombres flous de type  $L - R$  donnés respectivement par :

$$\tilde{M} \oplus \tilde{N} = \langle m + n, a + c, b + d \rangle_{LR} \quad (1.77)$$

$$\tilde{M} \ominus \tilde{N} = \langle m - n, a + c, b + d \rangle_{LR} \quad (1.78)$$

### 1.11.2 Multiplication des nombres flous de type $L - R$

Dans le passé, les valeurs approximatives floues  $L - R$  les plus connues et les plus répercutées par les autres chercheurs sont celles obtenues par Dubois et Prade [11] lorsque les étalements de deux facteurs sont plus petits face à leurs niveaux de valeur. Ces dernières sont exposées dans [36].

**1er cas :**  $\tilde{M} > 0$  et  $\tilde{N} > 0$

$$\tilde{M} \odot \tilde{N} \approx \tilde{V} = \langle m.n, mc + na - ac, md + nb + bd \rangle_{LR} \quad (1.79)$$

**2e cas :**  $\tilde{M} < 0$  et  $\tilde{N} < 0$

$$\tilde{M} \odot \tilde{N} \approx \tilde{V} = \langle m.n, -md - nb - bd, -mc - an + ac \rangle_{LR} \quad (1.80)$$

**3e cas :**  $\tilde{M} < 0$  et  $\tilde{N} > 0$

$$\tilde{M} \odot \tilde{N} \approx \tilde{V} = \langle m.n, -md + na + ad, -mc + nb - bc \rangle_{LR} \quad (1.81)$$

Ces trois valeurs de  $\widetilde{V}$  confirment celles trouvées par Hanss dans [21]. Elles constituent ce qu'il a appelé approximations sécantes [21].

### 1.11.3 Division des nombres flous de type $L - R$

Comme pour le produit des nombres flous de type  $L - R$ , Hanss affirme sans prouver dans [21] que le quotient de deux nombres flous de même type  $L - R$  n'est pas de type  $L - R$ . Cependant, il suggère les formules suivantes qui permettent d'obtenir des approximations tangentes pour deux nombres flous  $\widetilde{M}$  et  $\widetilde{N}$  où  $\widetilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$  et  $\widetilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  :

Si  $\widetilde{M} > 0$  et  $\widetilde{N} > 0$

$$\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} = \frac{\langle m, a, b \rangle_{LR}}{\langle n, c, d \rangle_{LR}} \approx \left\langle \frac{m}{n}, \frac{(md + na)}{n^2}, \frac{(mc + nb)}{n^2} \right\rangle_{LR} \quad (1.82)$$

Si  $\widetilde{M} < 0$  et  $\widetilde{N} < 0$

$$\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} = \frac{\langle m, a, b \rangle_{LR}}{\langle n, c, d \rangle_{LR}} \approx \left\langle \frac{m}{n}, \frac{(mc - nb)}{n^2}, \frac{(md - na)}{n^2} \right\rangle_{LR} \quad (1.83)$$

Si  $\widetilde{M} < 0$  et  $\widetilde{N} > 0$

$$\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} = \frac{\langle m, a, b \rangle_{LR}}{\langle n, c, d \rangle_{LR}} \approx \left\langle \frac{m}{n}, \frac{(na - mc)}{n^2}, \frac{(nb - md)}{n^2} \right\rangle_{LR} \quad (1.84)$$

Si  $\widetilde{M} > 0$  et  $\widetilde{N} < 0$

$$\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} = \frac{\langle m, a, b \rangle_{LR}}{\langle n, c, d \rangle_{LR}} \approx \left\langle \frac{m}{n}, \frac{(md - nb)}{n^2}, \frac{(mc - na)}{n^2} \right\rangle_{LR} \quad (1.85)$$

#### Définition 13

Selon [21], on définit l'approximation sécante de l'inverse d'un nombre flou positif de type  $L - R$ ,  $\widetilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  par

$$\widetilde{N}^{-1} \approx \left\langle \frac{1}{n}, \frac{d}{n(n+d)}, \frac{c}{n(n-c)} \right\rangle_{LR}, \quad (1.86)$$

La définition de l'**approximation sécante du quotient** de deux nombres flous positifs de même type  $L - R$  nous permet de déterminer où  $\widetilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$  et  $\widetilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  par la formule suivante :

$$\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \approx \left\langle \frac{m}{n}, \frac{md}{n(n+d)} + \frac{a}{n} - \frac{ad}{n(n+d)}, \frac{mc}{n(n-c)} + \frac{b}{n} + \frac{bc}{n(n-c)} \right\rangle_{LR} \quad (1.87)$$

L'approximation sécante du quotient de  $\widetilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$  par  $\widetilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  est clairement un nombre flou de type  $L - R$  dont le noyau est

$$\text{noy} \left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \right) = \left\{ \frac{m}{n} \right\} \quad (1.88)$$

et dont le support est :

$$\text{supp} \left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \right) = \left] \frac{m-a}{n+d}, \frac{m+b}{n-c} \right[ \quad (1.89)$$

Dans le cas particulier des nombres flous de type  $L - R$  triangulaire, le théorème suivant montre que le noyau et le support du quotient  $\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}}$  obtenus par l'approximation sécante sont exactement identiques à ceux obtenus par l'approche habituelle des  $\alpha$ -cuts.

### Théorème 10

*En cas de  $\widetilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$  et  $\widetilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$ , alors le noyau et le support de leur quotient obtenus par l'arithmétique des  $\alpha$ -cuts sont ceux obtenus par l'approximation sécante.*

**Preuve** Soit  $\widetilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{LR}$  et  $\widetilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{LR}$  deux nombres flous de forme triangulaire de type  $L - R$ .

Les nombres  $\widetilde{M}$  et  $\widetilde{N}$ , sous forme triangulaire, s'écrivent :  $\widetilde{M} = (m - a/m/m + b)$  et  $\widetilde{N} = (n - c/n/n + d)$ . On procède au calcul du quotient  $\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}}$  en utilisant l'arithmétique classique des  $\alpha$ -cuts et intervalles en utilisant successivement les relations (1.7.7), (1.9.2.2), (1.9.2.2) et (1.7.7) :

1° **Défuzzification** de  $\widetilde{M}$  et  $\widetilde{N}$  Selon le **corollaire 1.1**, on écrit les  $\alpha$ -cuts de  $\widetilde{M}$  et de  $\widetilde{N}$  :

$$\widetilde{M}_\alpha = [a\alpha + m - a, -b\alpha + m + b]$$

et

$$\widetilde{N}_\alpha = [c\alpha + n - c, -d\alpha + n + d]$$

2° **Calculs ordinaires ou classiques**

$$\left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \right)_\alpha = \frac{\widetilde{M}_\alpha}{\widetilde{N}_\alpha} = \frac{[a\alpha + m - a, -b\alpha + m + b]}{[c\alpha + n - c, -d\alpha + n + d]} = [\min K(\alpha), \max K(\alpha)] .$$

La formule (1.9.2.2) permet d'obtenir  $\min K(\alpha)$  et  $\max K(\alpha)$  en résolvant les deux programmes non linéaires paramétriques (PNLPs) suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min K(\alpha) = ? \\ K(\alpha) = \{K_1(\alpha), k_2(\alpha), k_3(\alpha), k_4(\alpha)\} \\ K_1(\alpha) = \frac{a\alpha + m - a}{c\alpha + n - c} \\ k_2(\alpha) = \frac{a\alpha + m - a}{-d\alpha + n + d} \\ k_3(\alpha) = \frac{-b\alpha + m + b}{c\alpha + n - c} \\ k_4(\alpha) = \frac{-b\alpha + m + b}{-d\alpha + n + d} \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \max K(\alpha) = ? \\ K(\alpha) = \{K_1(\alpha), k_2(\alpha), k_3(\alpha), k_4(\alpha)\} \\ K_1(\alpha) = \frac{a\alpha + m - a}{c\alpha + n - c} \\ k_2(\alpha) = \frac{a\alpha + m - a}{-d\alpha + n + d} \\ k_3(\alpha) = \frac{-b\alpha + m + b}{c\alpha + n - c} \\ k_4(\alpha) = \frac{-b\alpha + m + b}{-d\alpha + n + d} \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

Étant des écarts de nombres flous de type  $L - R$ , les réels  $a, b, c$  et  $d$  sont tous strictement positifs. Cette information permet de trouver des solutions à ces deux programmes :

$\min K(\alpha) = K_2(\alpha)$  et  $\max K(\alpha) = k_3(\alpha)$ . D'où :

$$\left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \right)_\alpha = \left[ \left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \right)_\alpha^L, \left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \right)_\alpha^U \right] = \left[ \frac{a\alpha + m - a}{-d\alpha + n + d}, \frac{-b\alpha + m + b}{c\alpha + n - c} \right].$$

3° **Fuzzification** Le nombre flou quotient  $\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}}$  est obtenu de cette cut de niveau  $\alpha$  en déduisant son noyau pour  $\alpha = 1$ , son support pour  $\alpha = 0$  et éventuellement sa fonction d'appartenance. Ainsi, donc,

$$\text{noy} \left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \right) = \left\{ \left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \right)_1^L \right\} = \left\{ \left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \right)_1^U \right\} = \left\{ \frac{m}{n} \right\}$$

et

$$\text{supp} \left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \right) = \left[ \left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \right)_0^L, \left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} \right)_0^U \right] = \left[ \frac{m - a}{n + d}, \frac{m + b}{n - c} \right].$$

Il est évident que le noyau et le support que nous venons d'obtenir grâce à l'arithmétique des  $\alpha$ -cuts et intervalles sont exactement identiques à ceux obtenus grâce à l'approximation sécante aux égalités (1.88) et (1.89).

### Remarque

Nous venons de montrer ce théorème dans un cas très limité de type  $L - R$  triangulaire, et il est valable pour tous les types  $L - R$ . Il précise que deux méthodes peuvent être utilisées pour calculer le mode et le support d'un quotient de deux nombres flous de type  $L - R$  :

- l'arithmétique des  $\alpha$ -cuts et intervalles.
- les formules des approximations sécantes de l'arithmétique des nombres flous de type  $L - R$ .

#### 1.11.4 Deuxième forme de type $L - R$

Un nombre flou de type  $L - R$  de la deuxième forme est également défini pour les nombres flous multimodaux. Un tel nombre flou est considéré comme de type  $L - R$  si et seulement si il y a des nombres réels  $m, m', a > 0, b > 0$ ; et deux fonctions positives décroissantes et continues  $L$  et  $R$  allant de  $\mathbb{R}$  dans l'intervalle unité  $[0, 1]$  tq :  $L$  et  $R$  vérifient les relations (1.10.1), (1.10.1) et (1.10.1) ;

et

$$\eta_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{a}\right) & \text{Si } x \in [m-a, m[ \\ 1 & \text{Si } x \in [m, m'] \\ R\left(\frac{x-m'}{b}\right) & \text{Si } x \in ]m', m'+b] \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

**Notation et appellation :** La représentation  $L-R$  de  $\tilde{M}$  dans ce cas se note  $\langle m, m', a, b \rangle_{LR}$ . L'arithmétique de ces nombres est semblable à celle de nombres de type  $L - R$  de la première forme vue précédemment aux sous-sections 1.11.1, 1.11.2, et 1.11.3

## 1.12 Quelques propriétés de nombres flous triangulaires liées au type $L - R$

### 1.12.1 Propositions

**Proposition 1.2** *Un nombre flou de type  $L - R$  est un nombre flou triangulaire.*

Autrement dit,  $\mathbb{F}_{TRI}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{F}_{LR}(\mathbb{R})$ .

**Preuve** [56] [25]

**Proposition 1.3**

*Le produit de deux nombres flous triangulaires n'est pas forcément triangulaire.*

**Preuve** [29]

**1.13 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons défini la logique floue comme une branche de la logique qui permet de traiter des concepts dont les frontières sont floues ou imprécises. Contrairement à la logique classique qui se base sur des valeurs binaires (vrai ou faux), la logique floue utilise des degrés de vérité pour représenter la gradation des concepts. Cette approche permet de modéliser des situations du monde réel de manière plus proche de la réalité, en prenant en compte la complexité et l'incertitude des phénomènes.

Nous avons également décrit la définition et les opérations de la théorie des ensembles flous. Différents types de fonctions d'appartenance ont été décrits, ainsi que les projections floues, la composition de deux relations floues, et les relations binaires floues. Les opérations floues intuitionnistes, les relations et les compositions ont été expliquées avec des exemples concrets.

Dans le prochain chapitre, nous allons étudier la modélisation des files d'attente floues en utilisant les méthodes vues dans ce chapitre.

# LA MODÉLISATION DES FILES D'ATTENTE FLOUES

## 2.1 Introduction

LA modélisation des files d'attente floues est une approche utilisée pour étudier et analyser les systèmes d'attente où les paramètres ne sont pas clairement définis. Il est possible que cela se produise lorsque les données sont imprécises ou incertaines, ce qui rend l'utilisation de modèles classiques compliquée. Les files d'attente floues permettent de prendre en compte cette incertitude et de fournir des résultats plus réalistes pour ces types de systèmes. L'exploration des files d'attente floues implique l'utilisation de concepts de logique floue pour modéliser les variables et les paramètres du système d'attente. Par exemple, au lieu de définir un temps d'attente précis pour chaque client, on peut utiliser des ensembles flous pour représenter des valeurs approximatives. Cela permet de mieux capturer la réalité des situations où les temps d'attente peuvent varier et ne sont pas toujours fixes.

En utilisant des techniques de modélisation des files d'attente floues, les chercheurs et les professionnels peuvent obtenir des résultats plus précis et réalistes pour les systèmes d'attente complexes. Cela peut être particulièrement utile dans des domaines tels que la gestion des opérations, la logistique et les services clients, où les files d'attente sont courantes et peuvent avoir un impact significatif sur les performances globales. En comprenant et en explorant les files d'attente floues, les décideurs peuvent prendre des décisions plus éclairées et améliorer l'efficacité de leurs systèmes.

## 2.2 Évolution et signification de la théorie des files d'attente

La problématique des files d'attente et des réseaux de files d'attente est omniprésente dans la vie quotidienne, notamment lorsqu'il s'agit de répondre à une forte demande de services. Les premiers modèles mathématiques de files d'attente sont nés de cette préoccupation, donnant naissance à la théorie des files d'attente.

Selon Chedom Fotso et Pauline Fotso [14], la théorie des files d'attente est une technique de la Recherche Opérationnelle permettant de modéliser un système confronté à un phénomène d'attente, de calculer ses performances et d'identifier ses caractéristiques afin d'assister les gestionnaires dans leurs choix. Cette définition est largement partagée par plusieurs auteurs. Une étude théorique des files d'attente permet de prédire à l'avance les performances globales du système, d'identifier les éléments critiques et d'anticiper les effets de toute modification des conditions de fonctionnement.

L'évolution de la théorie des files d'attente peut être divisée en quatre étapes. La première étape remonte à l'introduction de la théorie en 1909, marquée par la publication de l'article scientifique d'Erlang ([13]). La deuxième étape concerne l'analyse des réseaux de files d'attente, initiée par J.R. Jackson dans les années 1950. La troisième étape est inspirée par le développement rapide des systèmes informatiques, mettant l'accent sur les disciplines de service telles que le "Processor Sharing" introduit par Kleinrock en 1967.

Des méthodes efficaces ont été développées pour analyser les files d'attente, notamment en examinant leur comportement qualitatif et en utilisant des Chaînes de Markov à Temps Continu (CMC) pour modéliser ces systèmes. La quatrième étape, débutant vers 1980 avec l'article pionnier de Prade [40], introduit les nombres flous dans la modélisation des files d'attente, donnant naissance aux files d'attente floues (FAF), qui offrent une modélisation plus flexible et plus expressive des systèmes d'attente.

### 2.2.1 Présentation et Terminologie d'une file d'attente Classique

La terminologie et les concepts fondamentaux de la théorie des files d'attente couvrent les trois principaux éléments de la FAC : **les clients**, **les files d'attente** et **les serveurs** (mécanismes de service). Les clients sont générés par une source d'entrée, laquelle peut être une population d'individus finie ou infinie. Les clients rejoignent une file d'attente et sont traités par un serveur selon une discipline de file d'attente. Les principales disciplines de service les plus utilisées sont : **FIFO** (First In First Out) ; **LIFO** (Last In First Out) ; **PS** (Processor Sharing ou partage égalitaire) et **PR** (Prioritaire avec ou sans préemption).

La théorie des files d'attente utilise des méthodes mathématiques pour anticiper le comportement d'une file d'attente. Pour faciliter cette analyse, on suppose souvent que la file d'attente suit **un processus stochastique de vie ou de mort (PVM)**. La prédiction du comportement comprend des éléments tels que la probabilité d'avoir un

certain nombre de clients dans la file (la longueur moyenne de la file), le temps moyen d'attente, le débit de la file, etc. Pour modéliser une telle file, nous utilisons les paramètres  $\mathbf{A/S/c/Ns/Np/Z}$ , comme définis par la notation de Kendall.

Où

$\mathbf{A}$  se rapporte à la distribution des arrivées de clients, avec les valeurs principales suivantes :

1. **G (Général)** : des intervalles inter-arrivées stationnaires complètement généraux.
2. **GI (Général Indépendant)** : les écarts entre les arrivées  $(t_{n+1} - t_n)$  sont i.i.d.
3. **M (Markov)** : les écarts entre les arrivées  $(t_{n+1} - t_n)$  sont indépendants et suivent une distribution exponentielle avec le même paramètre. Le processus d'arrivée est alors un processus de Poisson.
4. **D (Déterministe)** : les écarts entre les arrivées  $(t_{n+1} - t_n)$  sont constants (C) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , représentant des arrivées périodiques.

**Le paramètre S** concerne la distribution des durées de service par client, avec des valeurs similaires à celles mentionnées précédemment, sauf que  $(t_{n+1} - t_n)$  est remplacé par  $\mu_n$ , la durée de service du n-ième client.

**Le paramètre c** représente le nombre de serveurs dans le système.

**Ns** indique la taille du système.

**Np** représente la taille de la population source.

**Z** correspond à la discipline de service.

En l'absence de données pour ces trois derniers paramètres, il est généralement supposé que  $Ns = \infty$ ,  $Np = \infty$  et **Z** est **FIFO**.

### 2.2.2 Étude Mathématique d'un Système de Files d'Attente Classique

En se référant à [1] et [35], l'analyse mathématique d'un système de files d'attente (FAC) repose généralement sur l'introduction d'un Processus Stochastique Classique (PSC) approprié. Initialement, l'attention se porte sur le nombre  $X(t)$  de clients présents dans le système à l'instant  $t$  ( $t \geq 0$ ). En fonction des besoins, on cherche à calculer :

- les probabilités d'état :

$$p_n(t) = \mathbb{P}[X(t) = n], \quad (2.1)$$

qui décrivent le régime transitoire du PSC  $\{X(t), t \geq 0\}$ . Ces probabilités d'état dépendent de l'état initial du processus.

- Les probabilités d'état en régime permanent ou stationnaire, définies par :

$$p_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[X(t) = n], \quad (2.2)$$

avec  $n = 0, 1, 2, \dots$

À partir de la distribution stationnaire du processus, on peut calculer d'autres paramètres d'exploitation du système, tels que :

1. Le temps moyen d'attente d'un client dans la file :  $\mathbf{Tf}$
2. Le temps moyen de séjour d'un client dans le système :  $\mathbf{T_s}$
3. Le nombre moyen de clients dans la file d'attente :  $\mathbf{Nf}$
4. Le nombre moyen de clients dans le système :  $\mathbf{N_s}$
5. Le taux d'utilisation des serveurs :  $\mathbf{U}$
6. L'intensité de trafic  $\rho$ , définie par :

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu},$$

où  $c$  est le nombre de serveurs, et  $\lambda$  et  $\mu$  sont respectivement le taux d'arrivée et le taux de service, en supposant que les serveurs ont des distributions indépendantes et identiquement distribuées (**i.i.d.**).

Ces paramètres sont généralement appelés les mesures de performance d'une file d'attente. Parmi les processus stochastiques markoviens, les Chaînes de Markov à Temps Continu (**CMC**) et à États Discrets (**CMCED**) sont les modèles de base pour les systèmes d'attente en général.

### 2.2.3 Chaîne de Markov classique

#### Définition 14 [43]

Une chaîne de Markov classique (CMC) sur un espace de probabilité discret  $(\Omega, \mathbf{A}, \mathbb{P})$  est un processus stochastique ordinaire (PSC)  $X = \{X_n\}_{n \in T}$  avec  $T = \{1, 2, \dots, N\}$ , avec un nombre d'états  $k$  vérifiant l'équation suivante :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = i) = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) \quad (2.3)$$

où  $T$  est l'espace de temps ;  $1 \leq i, j \leq k$  ; et  $X_n$  une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des états  $\Omega = \{1, 2, \dots, k\}$ .

Si  $\Omega$  est fini, on parle d'une CMC finie ; et s'il est infini, on parle d'une CMC infinie.

L'évolution d'un système dynamique au fil du temps est décrite par une chaîne de Markov classique, un modèle probabilistique qui repose sur les transitions probabilistiques entre différents états. Chaque situation dans le système est une possibilité, et les transitions probabilistiques sont les probabilités de passer d'un état à un autre à chaque instant. L'espacement des états, la matrice de transition, la propriété de Markov, les probabilités stationnaires et le processus de temps continu de Markov sont les éléments clés d'une chaîne classique de Markov.

Un système à trois états est une chaîne de Markov qui est définie sur un ensemble fini ou dénombrable d'états possibles. La matrice de transition représente les chances de transitionner d'un état à un autre dans un délai spécifique. Selon la propriété de Markov, la probabilité de passer à un état futur dépend exclusivement de l'état actuel et non de l'histoire complète des états précédents. La limite de distribution des états au fur et à mesure que le temps approche de l'infini est représentée par les probabilités fixes.

En résumé, une chaîne de Markov traditionnelle est un outil efficace pour la modélisation et l'analyse de systèmes probabilistes, en particulier lorsque l'évolution du système est influencée par des facteurs analytiques.

Les chaînes de Markov sont des modèles de probabilité employés dans l'étude des systèmes dynamiques qui se déplacent de manière autonome dans le temps. Les principaux aspects des chaînes de Markov incluent l'état, qui représente un système dans l'un des états possibles à un moment donné, représentant différentes conditions, situations ou configurations du système par rapport à un autre. La possibilité d'un système de passer d'un État à un autre, appelée transition d'état, est conditionnée par l'État actuel du système, et non par son histoire complète. La matrice de transition, communément désignée sous le nom de  $P$ , renferme les probabilités de passer d'un état à un autre dans un laps de temps donné.

En résolvant l'équation  $\pi P = \pi$ , on obtient la distribution de la probabilité stationnaire, où  $\pi$  est le vecteur de la distribution des probabilités stationnaires. Selon la propriété de Markov, la probabilité de se déplacer dans un nouvel état est déterminée exclusivement par l'état actuel, et non par la manière dont il a été atteint. Cela rend l'analyse des chaînes de Markov plus facile et les rend pratiques pour la modélisation de divers systèmes dynamiques. Dans des secteurs tels que l'ingénierie, les sciences sociales, la biologie, l'économie et la gestion des opérations, elles sont couramment employées afin de représenter les processus autonomes et anticiper le comportement à venir des systèmes.

## 2.3 File d'attente floue

Les concepts de logique floue sont intégrés dans la théorie des files d'attente floues, une extension de la théorie des files d'attente classiques. À la différence des modèles traditionnels qui exigent des valeurs précises pour des paramètres tels que les temps d'attente et les taux d'arrivée, les files d'attente floues offrent une prise en charge plus souple de ces paramètres en raison de l'incertitude et de la variabilité.

La définition des paramètres flous, comme les temps d'attente, les taux d'arrivée des clients et les tarifs de service, est incertaine et représentée par des ensembles flous. Ces ensembles décrivent la probabilité des périodes d'attente en utilisant des degrés de certitude différents. En général, on établit des règles de gestion et de prise de décision en utilisant des règles floues, en prenant en considération des éléments tels que la charge du

système et la satisfaction du client.

On utilise fréquemment des systèmes d'inférence floue afin de gérer des règles et des décisions incertaines, manipuler des informations imprécises et obtenir des résultats qui reposent sur des degrés de certitude plutôt que sur des valeurs binaires. Dans les modèles de files d'attente floues, les méthodes d'optimisation prennent en considération l'incertitude et la variabilité des paramètres, en réduisant au minimum les temps d'attente moyens tout en tenant compte de la satisfaction du client.

### 2.3.1 Les caractéristiques du système de file d'attente floue

Les notations suivantes sont utilisées pour décrire les caractéristiques du système de file d'attente floue proposé :

- $\tilde{\lambda}$  : taux d'arrivée moyen flou de la distribution de Poisson,
- $\frac{1}{\tilde{\mu}}$  : temps de service moyen flou de la distribution exponentielle,
- $\tilde{P}_0$  : probabilité floue que le système soit vide,
- $\tilde{P}_n$  : probabilité floue de  $n$  éléments dans le système,
- $\tilde{P}_w$  : probabilité floue qu'un élément arrive,
- $\tilde{L}_q$  : nombre d'éléments d'attente flou dans le système,
- $\tilde{L}$  : nombre d'éléments dans le système de file d'attente floue,
- $\tilde{W}_q$  : temps d'attente flou prévu,
- $\tilde{W}$  : temps d'attente flou dans le système.

## 2.4 Chaîne de Markov floue

Nous allons présenter des chaînes de Markov floues finies basées sur la théorie de la possibilité.

Une chaîne de Markov finie comporte un nombre fini d'états possibles (résultats)  $S_1, \dots, S_r$  à chaque étape  $n = 1, 2, 3, \dots$  dans le processus.

Soit

$$P_{ij} = \text{Prob}\{S_j \text{ à l'étape } n + 1 \mid S_i \text{ à l'étape } n\}. \quad (2.4)$$

Nous avons le même nombre fini d'états  $S_1, \dots, S_r$ , mais maintenant  $P_{ij}$  représente la possibilité que le processus se trouve dans l'état  $S_j$  à l'étape  $n + 1$ , étant donné qu'il était dans l'état  $S_i$  à l'étape  $n$ , pour  $1 \leq i, j \leq r$ . Les  $P_{ii}$  sont maintenant les possibilités de transition indépendantes de  $n$ . Soit  $P = (p_{ij})$  une matrice  $r \times r$  de possibilités, où chaque ligne a un maximum égal à un, nécessaire pour les distributions de possibilités. Soit  $p_j^n$  la possibilité d'être dans l'état  $S_j$  à l'étape  $n$ , étant donné que vous avez commencé dans l'état  $S_i$ . Soit  $P^n$  le produit  $n$  fois de  $P$  en utilisant la composition max-min des matrices floues (relations). Cela signifie que nous utilisons le minimum à la place de la multiplication et le maximum pour l'addition. Nous affirmons que  $P^n = (p_{ij}^{(n)})$ . Notre

seule hypothèse est que toutes les distributions de possibilités sont non interactives. Non interactif pour les distributions de possibilités est analogue à supposer que les variables aléatoires sont indépendantes dans la théorie des probabilités. Si  $p^{(0)}$  est la distribution de possibilité initiale et si  $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, \dots, p_n^{(n)})$ , où  $p_i^{(n)}$  est la possibilité d'être dans l'état  $S_i$  après  $n$  étapes, nous voyons également que  $p^{(n)} = p^{(0)}P^n$  pour la composition max-min de  $p^{(0)}$  et  $P^n$ .

Il est connu que la séquence  $P^n$  pour  $n = 1, 2, 3, \dots$  converge ou oscille. Si  $P^n$  converge, alors nous appellerons la chaîne de Markov floue régulière. Si  $P^n$  oscille et ne converge pas, nous l'appellerons une chaîne de Markov floue oscillante. Nous allons maintenant étudier les chaînes de Markov floues absorbantes.

Tout comme pour les chaînes de Markov absorbantes non floues, nous renommons les états, si nécessaire, pour obtenir  $P_{abs}$  avec

$$p_{abs} = \begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

où  $I$  est une matrice identité  $k \times k$ ,  $O$  est la matrice zéro  $k \times (r - k)$ ,  $R$  est une matrice  $(r - k) \times k$  et  $Q$  est une matrice  $(r - k) \times (r - k)$ .

Un état  $S_i$  est absorbant si  $P_{ii} = 1$  et  $P_{ij} = 0$  pour  $j \neq i$ . Une fois dans un état absorbant  $S_i$ , la possibilité de partir est nulle. Nous supposons qu'il y a  $k$  états absorbants pour  $1 \leq k < r$ . Nous pouvons montrer que

$$P^n = \begin{pmatrix} I & O \\ R_n & Q^n \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

où  $R_n = \max\{R, QR, \dots, Q^{n-1}R\}$ . La séquence  $p^n$ , pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ , converge ou oscille en fonction de la séquence  $Q_n$ , pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Si  $Q_n$  converge vers  $C$ , alors  $p^n$  converge car  $R_n$  converge toujours vers  $R^*$  (voir ci-dessous). Lorsque  $Q_n \rightarrow C$ , alors  $p^n \rightarrow \Pi$  où

$$\Pi = \begin{pmatrix} I & O \\ R^* & C \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

et  $C$  ne doit pas nécessairement être la matrice nulle. Maintenant,  $R^* = \max\{R, QR, \dots, Q^c R\}$  pour un certain entier positif  $c$ . Nous avons toujours  $R_n \rightarrow R^*$  si  $Q_n$  converge ou oscille. Si  $Q_n \rightarrow 0$ , la matrice nulle, alors nous appellerons cette chaîne de Markov floue une chaîne de Markov floue absorbante.

## 2.5 Quelques modèles des files d'attente floues

Les études sur les files d'attente floues ont été menées à divers niveaux dans la littérature [31], [37]. Trois types typiques sont étudiés dans ce mémoire, à savoir  $M/F/1$ ,  $F/M/1$  et  $FM/FM/1$ . Dans ces trois files d'attente, la discipline est **FIFO** et la population est considérée comme infinie. Le système initial présente une distribution exponentielle du temps d'inter-arrivée avec une moyenne de  $\pi$  et un temps de service flou  $\tilde{S}$ . Selon la moyenne de  $\sigma$ , le deuxième système présente un temps d'inter-arrivée flou  $\tilde{A}$  et un temps de service distribué exponentiellement. Il n'existe qu'une seule variable floue dans ces deux systèmes. Le temps d'arrivée intermédiaire  $\tilde{A}$  et le temps de service  $\tilde{S}$  sont incorrects pour la troisième queue. La troisième queue présente des distributions exponentielles du temps d'inter-arrivée et du temps de service, avec des taux  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\mu}$ , respectivement. Ces variables sont plutôt des variables floues.

### 2.5.1 Le modèle de file d'attente flou M/F/1

Le modèle  $M/F/1$  fait référence à un modèle de file d'attente flou avec un seul serveur.

La gestion des files d'attente diffère entre les systèmes  $M/M/1$  et  $M/F/1$  principalement en raison de la nature de leurs modèles de temps d'arrivée et de service. Le système  $M/M/1$  offre une gestion plus prévisible avec des distributions exponentielles pour les arrivées et les services, facilitant des prévisions précises et une optimisation efficace des ressources.

En revanche, le système  $M/F/1$  intègre la notion de flou pour les temps d'arrivée et de service, adapté aux situations où la précision exacte n'est pas critique et où la variabilité est présente. Le choix entre ces modèles dépend donc de la nécessité de gérer l'incertitude et la variabilité dans les temps d'attente, influençant la stratégie de gestion des files d'attente adoptée.

#### 2.5.1.1 Structure de la File d'Attente M/F/1 :

**M** : Signifie "Markovien". Cela indique que le processus d'arrivée suit un processus de Markov ou de Poisson, où les intervalles d'inter-arrivée de clients suivent une distribution exponentielle.

**F** : Représente l'aspect flou du modèle, les temps de service de la file sont décrits à l'aide d'ensembles flous et de la logique floue.

**1** : Désigne une file d'attente à un seul serveur, ce qui signifie qu'il n'y a qu'un seul canal de service disponible.

#### 2.5.1.2 Processus d'Arrivée :

On peut décrire mathématiquement le processus d'arrivée dans la file d'attente  $M/F/1$  de la façon suivante, en se basant sur des concepts de logique floue : Soit  $A$  une représentation floue des taux d'arrivée potentiels, définis par des fonctions d'appartenance  $\mu_A(\lambda)$

où le taux d'arrivée est  $\lambda$ . Les termes flous comme "faible", "moyen" et "élevé" sont associés à des degrés d'appartenance dans cet ensemble.

### 2.5.1.3 Temps de Service :

Le temps de service dans le modèle M/F/1 peut également être décrit mathématiquement à l'aide de concepts de logique floue. Voici comment cela pourrait être formulé de manière détaillée :

Soit  $S$  l'ensemble flou représentant les temps de service possibles, défini par des fonctions d'appartenance  $\mu_s(x)$  où  $x$  est la durée du service. Les termes flous comme "rapide", "moyen" et "lent" sont associés à des degrés d'appartenance dans cet ensemble.

### Paramètres du modèle :

- $\mu_A(n)$  : La fonction d'appartenance pour le nombre d'arrivées attendues dans le système, où  $n$  est le nombre de personnes dans le système.
- $\mu_D(n)$  : La fonction d'appartenance pour le nombre de départs attendus du système.
- $\mu_{\tilde{L}}(n)$  : La fonction d'appartenance pour le nombre de personnes dans le système.
- $\mu_{\tilde{W}}(w)$  : La fonction d'appartenance pour le temps d'attente dans le système, où  $w$  est le temps d'attente.
- $\mu_N$  : La fonction d'appartenance pour le nombre prévu de personnes dans le système.
- $\mu_{\tilde{W}}$  : La fonction d'appartenance pour le temps d'attente prévu dans le système.
- $\mu_{\tilde{S}}(s)$  : La fonction d'appartenance pour le temps de service prévu dans le système.

$$\mu_{\tilde{L}}(Z) = \sup_{s \in Y, s < \pi} \left[ \mu_{\tilde{S}}(s) \mid z = [s(2 - s/\pi)] / [2\pi(1 - s/\pi)] \right], \quad (2.8)$$

$$\mu_{\tilde{W}}(Z) = \sup_{s \in Y, s < \pi} \left[ \mu_{\tilde{S}}(s) \mid z = [s(2 - s/\pi)] / [2(1 - s/\pi)] \right] \quad (2.9)$$

### 2.5.1.4 Mesures de performance

— **Temps d'attente moyen (ou Temps moyen passé dans le système) ( $W$ ) :**

$$W = \int_0^{\infty} \mu_w(t) dt$$

— **Longueur moyenne de la file ( $L$ ) :**

$$L = \int_0^{\infty} n(t) \mu_l(n(t)) dt$$

— **Taux de service ( $\lambda$ ) :**

$$\lambda = \frac{1}{E[T_s]}$$

— **Taux d'occupation du serveur ( $\rho$ ) :**

$$\rho = \frac{\lambda}{\tilde{\mu}}$$

— **Probabilité d'avoir une certaine quantité de clients dans le système :**

$$P(n) = \int_0^\infty \mathbb{P}(n, t) dt$$

— **Efficacité du système ( $\eta$ ) :**

$$\eta = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_e}$$

### 2.5.1.5 Système de File d'attente $M/F/1$ avec le principe d'extension de ZADEH

Pour modéliser un système de file d'attente  $M/F/1$  en utilisant le principe d'extension de Zadeh, nous devons prendre en compte les arrivées markoviennes ( $M$ ), les temps de service flous ( $F$ ), et un seul serveur (1). Nous allons détailler les étapes mathématiques impliquées. [54]

#### 1° Taux d'Arrivée ( $\lambda$ ) :

Le taux d'Arrivée ( $\lambda$ ) est un nombre crisp (déterministe) qui suit un processus de Poisson. Donc, il reste constant et n'est pas flou.

#### 2° Temps de Service Flou ( $\tilde{\mu}$ ) :

Le temps de service flou peut être représenté par une fonction d'appartenance. Considérons une distribution triangulaire pour simplifier l'exemple.

$$\tilde{\mu} = (a, b, c)$$

La fonction d'appartenance  $\mu_S(x)$  pour le temps de service est définie comme suit :

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \text{ ou } x > c \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } b \leq x \leq c \end{cases}$$

#### 3° Calcul du Taux de Service Flou ( $\tilde{\mu}$ ) :

Pour trouver le taux de service flou  $\tilde{\mu}$ , nous devons calculer la valeur moyenne floue en utilisant la distribution triangulaire :

$$\tilde{\mu} = \frac{\int_a^c x \cdot \mu_S(x) dx}{\int_a^c \mu_S(x) dx}$$

Décomposons cela en deux parties, le numérateur et le dénominateur.

## Dénominateur

$$\int_a^c \mu_S(x) dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx + \int_b^c \frac{c-x}{c-b} dx$$

Calculons chaque partie :

$$\int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x-a) dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{(x-a)^2}{2} \right]_a^b = \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2}$$

$$\int_b^c \frac{c-x}{c-b} dx = \frac{1}{c-b} \int_b^c (c-x) dx = \frac{1}{c-b} \left[ \frac{(c-x)^2}{-2} \right]_b^c = \frac{(c-b)^2}{2(c-b)} = \frac{c-b}{2}$$

Ainsi,

$$\int_a^c \mu_S(x) dx = \frac{b-a}{2} + \frac{c-b}{2} = \frac{c-a}{2}$$

## Numérateur

$$\int_a^c x \cdot \mu_S(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{x-a}{b-a} dx + \int_b^c x \cdot \frac{c-x}{c-b} dx$$

Calculons chaque partie :

$$\int_a^b x \cdot \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(x-a) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x^2 - ax) dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left( \frac{b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{aa^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{b-a} \left( \frac{b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2} \right) = \frac{1}{b-a} \left( \frac{b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^3}{6} \right)$$

$$\int_b^c x \cdot \frac{c-x}{c-b} dx = \frac{1}{c-b} \int_b^c x(c-x) dx = \frac{1}{c-b} \int_b^c (cx - x^2) dx$$

$$= \frac{1}{c-b} \left[ \frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_b^c = \frac{1}{c-b} \left( \frac{cc^2}{2} - \frac{c^3}{3} - \frac{cb^2}{2} + \frac{b^3}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{c-b} \left( \frac{c^3}{2} - \frac{c^3}{3} - \frac{cb^2}{2} + \frac{b^3}{3} \right) = \frac{1}{c-b} \left( \frac{c^3}{6} - \frac{cb^2}{2} + \frac{b^3}{3} \right)$$

Ainsi,

$$\int_a^c x \cdot \mu_S(x) dx = \frac{1}{b-a} \left( \frac{b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^3}{6} \right) + \frac{1}{c-b} \left( \frac{c^3}{6} - \frac{cb^2}{2} + \frac{b^3}{3} \right)$$

#### 4° Taux d'Utilisation Flou ( $\tilde{\rho}$ ) :

Pour un système flou, le taux d'occupation flou  $\tilde{\rho}$  est défini comme le rapport entre le taux d'arrivée flou  $\tilde{\lambda}$  et le taux de service flou  $\tilde{\mu}$ .

Pour assurer la stabilité, la condition classique  $\rho < 1$  doit être adaptée pour inclure les nombres flous.

#### Condition de Stabilité Floue

La condition de stabilité floue peut être formulée comme suit :

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}$$

Dans le modèle étudié, le taux d'utilisation flou est défini par :

$$\tilde{\rho} = \frac{\lambda}{\tilde{\mu}}$$

Puisque  $\tilde{\mu}$  est flou,  $\tilde{\rho}$  sera également flou. La fonction d'appartenance de  $\tilde{\rho}$  peut être déterminée par le principe d'extension de Zadeh, [56] en utilisant les valeurs crisp  $\lambda$  et la fonction d'appartenance de  $\tilde{\mu}$ .

#### 5° Temps d'attente et Longueur de File :

Utilisons les formules classiques des files d'attente en remplaçant les paramètres par leurs équivalents flous :

- Temps moyen d'attente en file ( $\widetilde{W}_q$ ) :

$$\widetilde{W}_q = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}(1 - \tilde{\rho})}$$

- Nombre moyen de clients en file ( $\widetilde{L}_q$ ) :

$$\widetilde{L}_q = \lambda \widetilde{W}_q$$

Ces formules impliquent des opérations sur des nombres flous, nécessitant l'utilisation du principe d'extension pour chaque étape.

## 2.5.2 Modélisation de système F/M/1 par la méthode de alpha-cut

### 2.5.2.1 Formulation du problème

Considérons un système de file d'attente général avec un seul serveur. Le temps d'inter-arrivée  $\tilde{a}$  et le temps de service  $\tilde{s}$  sont approximativement connus et sont représentés par les ensembles flous suivants :

$$\tilde{a} = \{(a, \mu_{\tilde{a}}(a)) \mid a \in X\} \quad (2.10)$$

et

$$\tilde{s} = \{(s, \mu_{\tilde{s}}(s)) \mid s \in Y\} \quad (2.11)$$

Où  $X$  et  $Y$  sont les ensembles universels précis du temps d'inter-arrivée et du temps de service, et  $\mu_{\tilde{a}}(a)$  et  $\mu_{\tilde{s}}(s)$  sont les fonctions d'appartenance correspondantes.

Les  $\alpha$ -cuts ou ensembles de niveau  $\alpha$  de  $\tilde{a}$  et  $\tilde{s}$  sont :

$$A(\alpha) = \{a \in X \mid \mu_{\tilde{a}}(a) \geq \alpha\}. \quad (2.12)$$

et

$$S(\alpha) = \{s \in Y \mid \mu_{\tilde{s}}(s) \geq \alpha\}. \quad (2.13)$$

Notez que  $A(\alpha)$  et  $S(\alpha)$  sont des ensembles précis. En utilisant les  $\alpha$ -cuts, le temps d'inter-arrivée et le temps de service peuvent être représentés par différents niveaux d'intervalles de confiance [56]. Par conséquent, une file d'attente floue peut être réduite à une famille de files d'attente précises avec différents ensembles de niveau  $\alpha$   $\{A(\alpha) \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$  et  $\{S(\alpha) \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$ . Ces deux ensembles représentent des ensembles de frontières mobiles, et ils forment des structures imbriquées pour exprimer la relation entre les ensembles ordinaires et les ensembles flous [26].

Supposons que  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{s}$  soient des nombres flous. En désignant leurs intervalles de confiance comme  $[L_{\tilde{\lambda}}(\alpha), U_{\tilde{\lambda}}(\alpha)]$  et  $[L_{\tilde{s}}(\alpha), U_{\tilde{s}}(\alpha)]$ , l'idée de Negi et Lee [37] est de supposer une distribution uniforme dans l'intervalle de confiance et de dériver différentes mesures de performance analytiquement pour différents niveaux de possibilité  $\alpha$ . Pour les systèmes de file d'attente complexes, la dérivation analytique est remplacée par une simulation numérique.

Pour un modèle  $F/M/1$  le temps d'inter-arrivée est un nombre flou et le temps de service suit une distribution probabiliste précise. La  $\alpha$ -cut de  $\tilde{\lambda}$  définie en 2.5.2.1 est un intervalle précis qui peut être exprimé sous la forme :

$$[\min_{\lambda \in X} \{\lambda \mid \mu_{\tilde{\lambda}}(\lambda) \geq \alpha\}, \max_{\lambda \in X} \{\lambda \mid \mu_{\tilde{\lambda}}(\lambda) \geq \alpha\}].$$

Cet intervalle indique où se trouve le temps d'inter-arrivée constant à la possibilité  $\alpha$ . Par la convexité d'un nombre flou, les bornes de l'intervalle sont des fonctions de  $\alpha$  et peuvent être obtenues comme  $L_{\tilde{\lambda}}(\alpha) = \min \mu_{\tilde{\lambda}}^{-1}(\alpha)$  et  $U_{\tilde{\lambda}}(\alpha) = \max \mu_{\tilde{\lambda}}^{-1}(\alpha)$ , respectivement. Soit  $p(\lambda, s)$  la mesure de performance du système d'intérêt. Lorsque  $\tilde{\lambda}$  est flou,  $p(\tilde{\lambda}, s)$  est aussi un nombre flou. Selon le principe d'extension de Zadeh, la fonction d'appartenance de  $p(\tilde{\lambda}, s)$  est :

$$\mu_{p(\tilde{\lambda}, s)}(z) = \sup\{\mu_{\tilde{\lambda}}(\lambda) \mid z = p(\lambda, s)\}, \quad \lambda \in X \quad (2.14)$$

qui est aussi paramétrée par  $\alpha$ . Par conséquent, nous pouvons utiliser sa  $\alpha$ -cut pour construire sa fonction d'appartenance.

Pour trouver les bornes des intervalles pour  $p(\tilde{\lambda}, s)$  au niveau de possibilité  $\alpha$ , une paire de programmes mathématiques paramétrés par  $\alpha$  peut être formulée :

$$L_{p(\alpha)} = \min p(\lambda, s) \quad \text{Si } \lambda \in A(\alpha), \quad (2.15)$$

et

$$U_{p(\alpha)} = \max p(\lambda, s) \quad \text{Si } \lambda \in A(\alpha). \quad (2.16)$$

Cette paire de programmes mathématiques implique l'étude systématique de la manière dont les solutions optimales changent lorsque les bornes  $L_{\tilde{\lambda}}(\alpha)$  et  $U_{\tilde{\lambda}}(\alpha)$  varient sur l'intervalle  $\alpha \in (0, 1]$ . Ils relèvent de la catégorie de la programmation paramétrique [15].

Si  $\mu_{\tilde{\lambda}}(\lambda)$  et  $\mu_{\tilde{s}}(s)$  sont toutes deux inversibles par rapport à  $\alpha$ , alors une fonction de forme gauche  $L(z) = L_{p(\alpha)}^{-1}(z)$  et une fonction de forme droite  $R(z) = U_{p(\alpha)}^{-1}(z)$  peuvent être obtenues, à partir desquelles la fonction d'appartenance  $\mu_{p(\tilde{\lambda}, s)}$  est construite :

$$\mu_{p(\tilde{\lambda}, s)}(z) = \begin{cases} L(z), & z_1 \leq z \leq z_2 \\ 1, & z_2 < z \leq z_3 \\ R(z), & z_3 < z \leq z_4 \end{cases} \quad (2.17)$$

Nous avons  $[L_{p(\alpha)}, U_{p(\alpha)}] \subseteq [L_{p(\alpha')}, U_{p(\alpha')}]$  pour  $\alpha < \alpha'$ . L'ensemble des intervalles  $\{[L_{p(\alpha)}, U_{p(\alpha)}] \mid \alpha \in (0, 1]\}$  révèle la forme de la fonction d'appartenance, bien que la forme exacte de la fonction ne soit pas connue explicitement.

Pour la file d'attente  $F/M/1$ , lorsque le temps d'inter-arrivée est fixé à une constante, elle devient une file d'attente  $D/M/1$ , qui est un cas particulier de la file d'attente  $GI/M/1$ . En conséquence, les formules existantes [19] peuvent être utilisées pour calculer  $W$  et  $L$  :

$$W = \frac{s}{1 - \beta}, \quad L = \frac{s}{s(1 - \beta)}, \quad (2.18)$$

où  $\beta$  est la solution de

$$\beta = e^{-s/(1-s)}, \quad \beta \in [0, 1]. \quad (2.19)$$

Il a été démontré [19] que si le temps de service moyen est inférieur au temps d'inter-arrivée moyen, alors il existe un unique  $\beta \in (0, 1)$  qui satisfait (2.5.2.1). À chaque niveau de possibilité  $\alpha$ , le temps d'inter-arrivée flou est une valeur précise située dans l'intervalle  $[L_{\tilde{\lambda}}(\alpha), U_{\tilde{\lambda}}(\alpha)]$ , ce qui réduit la file d'attente  $F/M/1$  à une file d'attente  $D/M/1$ . Les mesures de performance dans (2.5.2.1) peuvent ensuite être substituées dans les programmes paramétriques pour dériver les fonctions d'appartenance correspondantes.

### Paramètres du modèle :

- $\mu_A(n)$  : Fonction d'appartenance pour le nombre d'arrivées attendues dans le système, où  $n$  est le nombre de personnes dans le système.
- $\mu_{\tilde{W}}(w)$  : Fonction d'appartenance pour le temps d'attente dans le système, où  $w$  est le temps d'attente.
- $\mu_N$  : Fonction d'appartenance pour le nombre prévu de personnes dans le système.

## 2.6 Modélisation du modèle FM/FM/1 par la méthode L-R :

### 2.6.1 Nombre de clients et temps d'attente dans une file d'attente classique simple M/M/1

Soit une file d'attente classique avec un seul serveur dont les caractéristiques sont décrites comme suit. Une seule classe de clients arrive à la file d'attente selon un processus de Poisson avec le paramètre  $\lambda$ . Si le serveur est occupé, les clients attendent en file, sinon, ils entrent un par un pour recevoir un service exponentiel avec le taux  $\mu$ . La source d'appel est infinie et la discipline de service est **FIFO** (premier arrivé, premier servi). À la fin du service, chaque client quitte le système ( $M/M/1$ ). Sous ces hypothèses, il est montré dans la littérature ouverte qu'une telle file d'attente est stable uniquement si :

$$\lambda < \mu$$

Cette condition permet de déterminer le nombre de clients  $N$  et le temps d'attente moyen  $T$  à l'état stationnaire comme suit ([6] p. 168-169) :

$$N = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (2.20)$$

et

$$T = \frac{N}{\lambda} \quad (2.21)$$

Où  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ .

## 2.6.2 Nombre attendu de clients et temps d'attente attendu dans une file d'attente floue

### 2.6.2.1 Description de la Méthode utilisée

Reconsidérons la file d'attente ci-dessus, en supposant que le taux d'arrivée et le taux de service sont des nombres flous triangulaires notés respectivement  $\tilde{\lambda} = (\lambda_1/\lambda_2/\lambda_3)$  et  $\tilde{\mu} = (\mu_1/\mu_2/\mu_3)$ . Les informations floues transmises par  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\mu}$  affectent  $N$  et  $T$ , qui deviennent des nombres flous  $\tilde{N}$  et  $\tilde{T}$ . Le modèle devient alors une file d'attente floue  $FM/FM/1$ , où FM désigne une distribution exponentielle floutée. Pour déterminer ses mesures de performance floues, la méthode  $L - R$  représente d'abord les taux flous  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\mu}$  sous forme  $L - R$ , et les remplace dans les équations (2.6.1) et (2.6.1) pour obtenir les nombres flous  $\tilde{N}$  et  $\tilde{T}$  en  $L - R$ . Ensuite, elle utilise des formules appropriées parmi (1.11.1), (1.11.1), (1.11.2) et (1.11.3) pour trouver les représentations  $L - R$  des nombres flous  $\tilde{N}$  et  $\tilde{T}$ . Pour la multiplication et la division, des approximations sécantes sont requises, fournissant le support exact comme montré dans [11], [36].

### 2.6.2.2 Formules pour le nombre de client en attente

#### Théorème 11

*Si  $FM/FM/1$  est une file d'attente floue simple dont les taux d'arrivée et de service sont respectivement des nombres flous triangulaires positifs  $\tilde{\lambda} = (\lambda_1/\lambda_2/\lambda_3)$  et  $\tilde{\mu} = (\mu_1/\mu_2/\mu_3)$ , avec  $\lambda_3 < \mu_1$ , alors le nombre attendu de clients dans le système à l'état stationnaire est approximativement le nombre flou  $\tilde{T}$*

(i) La valeur moyenne est le nombre réel

$$m = \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} \quad (2.22)$$

(ii) Le support est l'intervalle réel fermé  $[u, v]$ ; tel que

$$u = m - \left[ \frac{\lambda_2[(\mu_3 - \mu_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)]}{(\mu_2 - \lambda_2)(\mu_3 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\mu_2 - \lambda_2} - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)[(\mu_3 - \mu_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)]}{(\mu_2 - \lambda_2)(\mu_3 - \lambda_1)} \right] \quad (2.23)$$

and

$$v = m + \left[ \frac{\lambda_2[(\mu_2 - \mu_1) + (\lambda_3 - \lambda_2)]}{(\mu_2 - \lambda_2)(\mu_1 - \lambda_3)} + \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)[(\mu_2 - \mu_1) + (\lambda_3 - \lambda_2)]}{(\mu_2 - \lambda_2)(\mu_1 - \lambda_3)} \right] \quad (2.24)$$

#### Preuve

Dans la théorie classique des files d'attente, les paramètres tels que le nombre de clients, le temps d'attente, le taux d'arrivée, le taux de service, etc., sont toujours positifs. Il en va

de même dans un environnement flou où ces nombres sont imprécis et donnés sous forme d'informations floues. Soit  $\tilde{N}$  le nombre de clients de cette file d'attente donnée à l'état stable. Par la méthode L-R décrite dans la sous-section précédente,  $\tilde{N}$  peut être calculé par l'équation (2.6.1) après avoir remplacé  $\lambda$  et  $\mu$  par leurs valeurs floues L-R appropriées.

Les nombres réels positifs  $k_1 = \lambda_2 - \lambda_1$ ,  $k_2 = \lambda_3 - \lambda_2$  étant les étendues de  $\lambda$  flou ; et  $l_1 = \mu_2 - \mu_1$ ,  $l_2 = \mu_3 - \mu_2$  étant les étendues de  $\mu$  flou ; les représentations L-R de  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\mu}$  sont respectivement :

$$\tilde{\lambda} = \langle \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2 \rangle_{LR} \quad (2.25)$$

$$\tilde{\mu} = \langle \mu_2, \mu_2 - \mu_1, \mu_3 - \mu_2 \rangle_{LR} \quad (2.26)$$

À partir de l'équation (2.6.1),  $\tilde{N}$  peut être calculé en utilisant des formules dans les équations (1.11.1) et (1.11.3) comme suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \frac{\tilde{\lambda}}{1 - \tilde{\lambda}} \\ &= \frac{\tilde{\lambda} = \langle \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2 \rangle_{LR}}{\langle \mu_2, \mu_2 - \mu_1, \mu_3 - \mu_2 \rangle_{LR} - \tilde{\lambda} = \langle \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2 \rangle_{LR}} \\ &= \frac{\tilde{\lambda} = \langle \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2 \rangle_{LR}}{\langle \mu_2 - \lambda_2, (\mu_2 - \mu_1) + (\lambda_3 - \lambda_2), (\mu_3 - \mu_2) + (\lambda_2 - \lambda_1) \rangle} \end{aligned}$$

enfin ;

$$\tilde{N} \approx \langle N_1, N_2, N_3 \rangle \quad (2.27)$$

$$N_1 = \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} \quad (2.28)$$

$$N_2 = \frac{\lambda_2 \left[ (\mu_3 - \mu_2) + (\lambda_2 - \lambda_1) \right]}{(\mu_2 - \lambda_2)(\mu_3 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) \left[ (\mu_3 - \mu_2) + (\lambda_2 - \lambda_1) \right]}{(\mu_2 - \lambda_2)(\mu_3 - \lambda_1)} \quad (2.29)$$

et

$$N_3 = \frac{\lambda_2 \left[ (\mu_2 - \mu_1) + (\lambda_3 - \lambda_2) \right]}{(\mu_2 - \lambda_2)(\mu_1 - \lambda_3)} + \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} - \frac{(\lambda_3 - \lambda_2) \left[ (\mu_2 - \mu_1) + (\lambda_3 - \lambda_2) \right]}{(\mu_2 - \lambda_2)(\mu_1 - \lambda_3)} \quad (2.30)$$

Ces nombres réels positifs  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  sont respectivement des valeurs approximatives de mode, le débit gauche et le déficit droit de  $\tilde{N}$ .

Les limites inférieure et supérieure de  $\tilde{N}$  sont respectivement  $N_1 - N_2$  et  $N_1 - N_3$ . Notant  $m = N_1$ ,  $u = N_1 - N_2$  et  $v = N_1 - N_3$  ; les équations (2.6.2.2), (2.6.2.2) et (2.6.2.2) sont établie.

### 2.6.2.3 Quantités de temps d'attente anticipée

#### Théorème 12

Si  $FM/FM/1$  est une simple file d'attente floue dont l'arrivée et le service sont respectivement des nombres triangulaires positifs  $\tilde{\lambda} = (\lambda_1/\lambda_2/\lambda_3)$  et  $\tilde{\mu} = (\mu_1/\mu_2/\mu_3)$ , avec  $\lambda_3 < \mu_1$ , alors le temps d'attente à l'état stationnaire est approximativement donné par le nombre flou  $\tilde{T}$ .

(i) La valeur moyenne est le nombre réel

$$m = \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} \quad (2.31)$$

(ii) Le support est l'intervalle fermé réel  $[u, v]$ ; où

$$u = m \left[ \frac{N_1(\lambda_3 - \lambda_2)}{\lambda_2\lambda_3} + \frac{N_2}{\mu_2} - \frac{N_2(\lambda_3 - \lambda_2)}{\lambda_2\lambda_3} \right] \quad (2.32)$$

$$v = m \left[ \frac{N_1(\lambda_1 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{N_3}{\mu_2} - \frac{N_3(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2} \right] \quad (2.33)$$

où  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  sont définis ci-dessus dans les équations (2.6.2.2), (2.6.2.2) et (2.6.2.2).

À partir de l'équation (2.6.1),  $\tilde{T}$  le temps d'attente moyen peut être calculé en utilisant la formule dans l'équation (1.11.3) tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{\tilde{N}}{\tilde{\lambda}} \\ &= \frac{\langle N_1, N_2, N_3 \rangle_{LR}}{\langle \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2 \rangle_{LR}} \end{aligned}$$

## Conclusion

Ce chapitre a exploré la modélisation des systèmes de files d'attente en intégrant des incertitudes floues à l'aide de diverses méthodes. Trois modèles principaux ont été analysés : F/M/1, M/F/1 et FM/FM/1.

Pour le modèle F/M/1, avec un temps d'inter-arrivée flou et un temps de service exponentiel, la méthode des  $\alpha$ -cuts a été utilisée. Cette méthode permet de transformer une file d'attente floue en une série de files d'attente précises, simplifiant ainsi l'analyse des performances.

Pour le modèle M/F/1, où le temps de service est flou et le temps d'inter-arrivée est exponentiel, le principe d'extension de Zadeh a été appliqué. Cette technique permet d'étendre les performances des systèmes classiques aux systèmes flous en utilisant les fonctions d'appartenance des variables floues.

Enfin, le modèle FM/FM/1, où à la fois les temps d'inter-arrivée et de service sont flous, a été étudié en utilisant la méthode L-R. Cette méthode représente les nombres flous par

leurs fonctions de forme gauche et droite, facilitant ainsi le calcul des performances des systèmes entièrement flous.

Ces différentes approches montrent l'efficacité des techniques floues dans la modélisation des systèmes de files d'attente avec incertitude, offrant des outils plus robustes pour la gestion et l'optimisation des performances de ces systèmes.

Dans le prochain chapitre, nous allons étudier quelques méthodes de classement pour les modèles flou. Ces méthodes nous permettront de classer et de prioriser des options en présence d'incertitudes floues, offrant ainsi des applications pratiques pour la prise de décision dans des environnements incertains, en ce basant sur la méthode de classement robuste.

# MÉTHODES DE CLASSEMENT FLOUES

## 3.1 Introduction

LES méthodes de classement floues jouent un rôle crucial dans la prise de décision multicritères, particulièrement lorsque les informations disponibles sont imprécises ou incertaines. Ces méthodes permettent d'évaluer et de classer différentes options en se basant sur des critères flous, offrant ainsi une approche plus flexible et réaliste par rapport aux méthodes de classement traditionnelles. Parmi les techniques couramment utilisées dans ce domaine, on trouve la méthode de l'abscisse du centre de gravité (COG), la méthode des alpha-cuts, la méthode des moments, la méthode de comparaison des centres de gravité, la méthode de dominance stochastique, le critère spécifique et la technique de classement robuste.

Les méthodes de classement floues offrent une gamme d'outils puissants pour la prise de décision dans des environnements incertains. La technique de classement robuste, en particulier, représente une avancée significative en assurant des résultats fiables et cohérents, ce qui en fait un sujet de recherche prometteur et pertinent pour de nombreuses applications.

Nous allons examiner ces méthodes de défuzzification utilisées en logique floue pour convertir des ensembles flous en valeurs précises et nous analyserons les avantages et les inconvénients de chaque méthode, ainsi que leurs applications pratiques.

## 3.2 Méthode de l'Abscisse du Centre de Gravité (Abscissa of the Center of Gravity Method)

La méthode de l'abscisse du centre de gravité, également connue sous le nom de méthode du barycentre ou méthode du centre des aires, est une technique de défuzzification couramment utilisée pour convertir un ensemble flou en une valeur précise. Cette méthode trouve le "centre de masse" de la fonction d'appartenance de l'ensemble flou. [52]

### 3.2.1 Formule Mathématique

Pour un ensemble flou  $A$  avec une fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$ , le centre de gravité  $x_{COG}$  est donné par :

$$x_{COG} = \frac{\int_a^c x\mu_A(x) dx}{\int_a^c \mu_A(x) dx}$$

Cette formule peut être interprétée comme le point où l'ensemble flou est équilibré, c'est-à-dire le point moyen pondéré par la fonction d'appartenance.

### 3.2.2 Étapes du Calcul

#### 1. Détermination de la Fonction d'Appartenance :

- La première étape consiste à déterminer la fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$  pour l'ensemble flou concerné. Cette fonction décrit à quel degré chaque élément  $x$  appartient à l'ensemble flou.

#### 2. Calcul de l'Intégrale Numérateur :

- Calculer l'intégrale de  $x\mu_A(x)$  sur l'intervalle de définition de la fonction d'appartenance.

$$\int x\mu_A(x) dx$$

- Cette intégrale représente le moment de la fonction d'appartenance par rapport à l'axe des abscisses.

#### 3. Calcul de l'Intégrale Dénominateur :

- Calculer l'intégrale de  $\mu_A(x)$  sur le même intervalle.

$$\int \mu_A(x) dx$$

- Cette intégrale représente l'aire sous la courbe de la fonction d'appartenance.

#### 4. Division pour Trouver le Centre de Gravité :

- Diviser l'intégrale du numérateur par l'intégrale du dénominateur pour obtenir

le centre de gravité  $x_{COG}$ .

$$x_{COG} = \frac{\int_a^c x \mu_A(x) dx}{\int_a^c \mu_A(x) dx}$$

### 3.2.3 Exemple Pratique

Supposons que nous avons une fonction d'appartenance triangulaire définie sur l'intervalle  $[a, b]$  avec un pic à  $c$  :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{c-a} & \text{pour } a \leq x \leq c \\ \frac{b-x}{b-c} & \text{pour } c < x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Pour cette fonction, nous devons calculer les intégrales numérateur et dénominateur.

— **Intégrale Numérateur** :

$$\int_a^b x \mu_A(x) dx = \int_a^c x \left( \frac{x-a}{c-a} \right) dx + \int_c^b x \left( \frac{b-x}{b-c} \right) dx$$

— **Intégrale Dénominateur** :

$$\int_a^b \mu_A(x) dx = \int_a^c \left( \frac{x-a}{c-a} \right) dx + \int_c^b \left( \frac{b-x}{b-c} \right) dx$$

Après avoir calculé ces intégrales, nous divisons le résultat du numérateur par celui du dénominateur pour obtenir  $x_{COG}$ .

### 3.2.4 Comparaison avec d'Autres Méthodes de Défuzzification

La méthode du centre de gravité est souvent préférée pour plusieurs raisons :

- **Simplicité** : Elle offre une méthode intuitive pour trouver un point central.
- **Exactitude** : Elle prend en compte toute l'information fournie par la fonction d'appartenance.

Cependant, elle peut être computationnellement intensive pour des fonctions d'appartenance complexes ou lorsque des méthodes d'intégration numérique sont nécessaires.

## 3.3 Méthode de Comparaison des Centres de Gravité

La méthode de comparaison des centres de gravité est souvent utilisée dans le cadre de la prise de décision multicritère ou dans des applications où plusieurs alternatives

doivent être évaluées en fonction de critères flous. Cette méthode implique de comparer les centres de gravité des différentes fonctions d'appartenance représentant les alternatives pour sélectionner la meilleure option. [7]

### 3.3.1 Étapes de la Méthode

#### 1. Définir les Alternatives et les Critères :

- Identifier les alternatives à comparer.
- Définir les critères sur lesquels les alternatives seront évaluées.

#### 2. Déterminer les Fonctions d'Appartenance :

- Pour chaque alternative, définir une fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$  qui représente le degré de satisfaction de cette alternative pour un critère donné.

#### 3. Calculer le Centre de Gravité pour Chaque Alternative :

- Pour chaque fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$ , calculer le centre de gravité  $x_{COG}$  en utilisant la formule suivante :

$$x_{COG} = \frac{\int_a^c x \mu_A(x) dx}{\int_a^c \mu_A(x) dx}$$

#### 4. Comparer les Centres de Gravité :

- Comparer les centres de gravité  $x_{COG}$  de toutes les alternatives. La comparaison peut être faite directement ou en fonction des poids des critères si ceux-ci sont différents.

#### 5. Sélectionner l'Alternative Optimale :

- Choisir l'alternative avec le centre de gravité le plus favorable selon le critère global de décision.

### 3.3.2 Exemple Pratique

Supposons que nous évaluons trois alternatives (A1, A2, A3) en fonction d'un critère de satisfaction avec les fonctions d'appartenance suivantes :

$$\mu_{A1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2-1} & \text{pour } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3-x}{3-2} & \text{pour } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\mu_{A2}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{3-2} & \text{pour } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{4-x}{4-3} & \text{pour } 3 < x \leq 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\mu_{A3}(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{4-3} & \text{pour } 3 \leq x \leq 4 \\ \frac{5-x}{5-4} & \text{pour } 4 < x \leq 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Pour chaque alternative, nous calculons le centre de gravité :

— **Alternative A1 :**

$$x_{COG_{A1}} = \frac{\int_1^3 x \mu_{A1}(x) dx}{\int_1^3 \mu_{A1}(x) dx}$$

— **Alternative A2 :**

$$x_{COG_{A2}} = \frac{\int_2^4 x \mu_{A2}(x) dx}{\int_2^4 \mu_{A2}(x) dx}$$

— **Alternative A3 :**

$$x_{COG_{A3}} = \frac{\int_3^5 x \mu_{A3}(x) dx}{\int_3^5 \mu_{A3}(x) dx}$$

Après avoir calculé ces centres de gravité, nous comparons  $x_{COG_{A1}}$ ,  $x_{COG_{A2}}$ , et  $x_{COG_{A3}}$ . Supposons que les centres de gravité calculés sont les suivants :

—  $x_{COG_{A1}} = 2.0$

—  $x_{COG_{A2}} = 3.0$

—  $x_{COG_{A3}} = 4.0$

Si le critère est de maximiser la satisfaction, l'alternative A3 serait choisie car elle a le centre de gravité le plus élevé (4.0). Si le critère est de minimiser la distance, alors A1 serait choisie (2.0).

## 3.4 Comparaison des Avantages et des Inconvénients

### 3.4.1 Avantages

#### 1. Simplicité :

— Les deux méthodes sont relativement simples à comprendre et à mettre en œuvre.

#### 2. Utilisation de l'information disponible :

— Elles utilisent toutes les deux toutes les informations fournies par les fonctions d'appartenance pour prendre des décisions. [44]

### 3.4.2 Inconvénients

#### 1. Complexité computationnelle :

- Dans certains cas, en particulier lorsque les fonctions d'appartenance sont complexes ou lorsque des calculs numériques sont nécessaires, les deux méthodes peuvent être computationnellement intensives.

#### 2. Sensibilité aux variations :

- Les deux méthodes peuvent être sensibles aux variations dans les fonctions d'appartenance, en particulier si ces fonctions ont des formes très étendues ou irrégulières.

### 3.4.3 Nuances à Considérer

#### 1. Critères de décision :

- Les deux méthodes peuvent être utilisées dans des contextes différents avec des critères de décision différents. Par exemple, la méthode de comparaison des centres de gravité peut être plus adaptée pour des problèmes de prise de décision multicritère où plusieurs critères doivent être pris en compte.

#### 2. Nature des données :

- Les avantages et les inconvénients peuvent varier en fonction de la nature spécifique des données et du problème. Par exemple, si les données sont hautement subjectives et imprécises, la méthode de comparaison des centres de gravité peut être plus appropriée en raison de sa capacité à traiter des données floues de manière explicite.

## 3.5 Méthode de Classement des Alpha-cuts

La méthode de classement des alpha-cuts est une technique utilisée en logique floue pour la défuzzification [10], c'est-à-dire pour convertir un ensemble flou en une valeur précise (crisp). Cette méthode repose sur la notion d'alpha-cuts, qui sont des ensembles crisp obtenus en seuillant l'ensemble flou à différents niveaux de confiance.

### 3.5.1 Fonctionnement de la Méthode

Dans la méthode de classement des alpha-cuts, celles-ci sont ordonnées en fonction de leur niveau de confiance, allant du plus bas au plus élevé. Le résultat final est ensuite déterminé en prenant en compte les valeurs de sortie associées à chaque alpha-cut. Cette étape implique généralement une moyenne ou une autre méthode de fusion pour obtenir une seule valeur.

Les niveaux de confiance dans la méthode des alpha-cuts sont déterminés par des valeurs de seuil alpha. Chaque valeur alpha indique la proportion de la fonction d'appartenance floue incluse dans l'alpha-cut correspondant. Par exemple, une valeur alpha de 0,5

signifie que l'alpha-cut englobe 50% de la fonction d'appartenance. Ces valeurs alpha sont typiquement choisies sur une échelle de 0 à 1, selon des critères uniformes ou spécifiques à l'application.

En résumé, les niveaux de confiance sont calculés en fonction des valeurs de seuil alpha, lesquelles définissent la portion de la fonction d'appartenance floue incluse dans chaque alpha-cut. Pour obtenir un résultat final, les valeurs de sortie associées à chaque alpha-cut sont fusionnées à l'aide de diverses méthodes tel-que :

1. **Moyenne pondérée** : Les valeurs de sortie correspondantes à chaque alpha-cut sont pondérées en fonction de leur niveau de confiance (valeur alpha) et moyennées pour obtenir un résultat final. La formule générale est :

$$\text{Résultat final} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Valeur de sortie}_i \times \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

où n est le nombre d'alpha-cuts.

2. **Méthode du maximum** : Le résultat final est déterminé en sélectionnant la valeur de sortie la plus élevée parmi toutes les valeurs de sortie correspondant aux alpha-cuts. Cela peut être exprimé comme :

$$\text{Résultat final} = \max\{\text{Valeur de sortie}_1, \text{Valeur de sortie}_2, \dots, \text{Valeur de sortie}_n\}$$

3. **Méthode de la médiane** : Le résultat final est déterminé en sélectionnant la médiane des valeurs de sortie correspondant aux alpha-cuts. Cette méthode est moins sensible aux valeurs extrêmes que la moyenne.

$$\text{Résultat final} = \text{Médiane}(\text{Valeur de sortie}_1, \text{Valeur de sortie}_2, \dots, \text{Valeur de sortie}_n)$$

Il existe également d'autres méthodes de fusion, telles que la méthode du produit, la méthode de la somme, etc., qui peuvent être utilisées en fonction des besoins spécifiques de l'application. Ces méthodes de fusion permettent de combiner les informations fournies par les différentes alpha-cuts pour obtenir un résultat final représentatif de l'ensemble flou.

### 3.5.2 Exemple Pratique

Supposons que nous ayons un ensemble flou représentant la température d'une pièce, exprimée en termes de faible, moyen et élevé. Les alpha-cuts correspondantes pour chaque niveau de confiance sont définies, par exemple, à 0.2, 0.5 et 0.8. En classant ces alpha-cuts et en prenant en compte les valeurs de sortie associées, nous pouvons déterminer une valeur précise pour la température de la pièce.

### 3.5.3 Avantages et Inconvénients

**Avantages :**

- **Flexibilité** : La méthode de classement des alpha-cuts permet de prendre en compte différents niveaux de confiance dans l'ensemble flou.
- **Adaptabilité** : Elle peut être utilisée dans une variété de contextes et de domaines d'application.

**Inconvénients :**

- **Complexité** : La manipulation et le classement des alpha-cuts peuvent être complexes, surtout pour des ensembles flous avec de multiples niveaux de confiance.
- **Sensibilité aux valeurs extrêmes** : La méthode peut être sensible aux valeurs extrêmes dans les ensembles flous, ce qui peut affecter la précision du résultat final.

En résumé, la méthode de classement des alpha-cuts est une approche intéressante pour la défuzzification en logique floue, offrant à la fois flexibilité et adaptabilité. Cependant, elle peut être plus complexe à mettre en œuvre que d'autres méthodes et peut être sensible à certaines conditions spécifiques des ensembles flous.

## 3.6 Méthode des Moments pour la Défuzzification

La méthode des moments est une technique de défuzzification couramment utilisée en logique floue pour convertir un ensemble flou en une valeur précise. Cette méthode repose sur le calcul des moments statistiques de la fonction d'appartenance floue. [45]

### 3.6.1 Fonctionnement de la Méthode

La méthode des moments utilise les moments statistiques de la fonction d'appartenance floue pour estimer une valeur précise qui représente l'ensemble flou. Les moments sont des quantités mathématiques décrivant divers aspects de la distribution de probabilité de la fonction d'appartenance. Les moments les plus couramment utilisés sont le moment d'ordre zéro (la superficie totale sous la courbe), le moment d'ordre un (le centre de gravité), le moment d'ordre deux (la variance), et ainsi de suite.

Pour utiliser la méthode des moments, les moments de la fonction d'appartenance floue sont calculés. Ces moments sont ensuite pondérés et combinés pour obtenir une valeur précise qui représente l'ensemble flou. Par exemple, le moment d'ordre un peut être utilisé pour estimer la position centrale de l'ensemble flou, tandis que le moment d'ordre deux peut être utilisé pour estimer sa dispersion.

### 3.6.2 Calcul des moments

1. **Moment d'ordre zéro (superficie totale sous la courbe)** Le moment d'ordre zéro correspond à la superficie totale sous la courbe de la fonction d'appartenance

floue. Il peut être calculé en intégrant la fonction d'appartenance sur tout son domaine :

$$M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) dx$$

Cette intégrale représente la somme de toutes les valeurs de la fonction d'appartenance floue sur l'intervalle de définition, donnant ainsi la superficie totale sous la courbe.

2. **Moment d'ordre un (Centre de gravité moyen)** Le moment d'ordre un, également appelé centre de gravité, est une mesure de la position centrale de la fonction d'appartenance floue. Il est calculé en pondérant chaque valeur de  $x$  par la valeur de la fonction d'appartenance correspondante et en moyennant le résultat.

$$M_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\mu(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) dx}$$

3. **Moment d'ordre deux (variance)** Le moment d'ordre deux est une mesure de la dispersion de la fonction d'appartenance floue autour de son centre de gravité. Il est calculé en pondérant chaque valeur de  $x$  par le carré de la distance par rapport au centre de gravité et en moyennant le résultat.

$$M_2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - M_1)^2 \mu(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) dx}$$

4. **Moments d'ordre supérieur** Les moments d'ordre supérieur capturent des caractéristiques plus complexes de la fonction d'appartenance floue, telles que son asymétrie ou son aplatissement. Ils sont calculés de manière similaire en pondérant chaque valeur de  $x$  par des puissances supérieures de sa distance par rapport au centre de gravité.

$$M_n = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - M_1)^n \mu(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) dx}$$

### 3.6.3 Exemple Pratique

Supposons que nous ayons un ensemble flou représentant la température d'une pièce, exprimée en termes de faible, moyen et élevé. Pour utiliser la méthode des moments, nous commençons par calculer les moments statistiques de la fonction d'appartenance floue, tels que le moment d'ordre un (centre de gravité) et le moment d'ordre deux (variance). Ensuite, en utilisant ces moments, nous estimons une valeur précise pour la température de la pièce.

Par exemple, si le centre de gravité de l'ensemble flou est à  $x = 20$  degrés Celsius et sa

variance est de  $\sigma^2 = 4$ , nous pourrions estimer que la température de la pièce est d'environ  $20 \pm 2$  degrés Celsius, avec une certaine incertitude due à la dispersion de l'ensemble flou.

### 3.6.4 Avantages et Inconvénients

**Avantages :**

- **Précision** : La méthode des moments offre une précision raisonnable dans la défuzzification des ensembles flous.
- **Facilité de compréhension** : Elle est relativement facile à comprendre et à mettre en œuvre.

**Inconvénients :**

- **Sensibilité aux données** : La méthode peut être sensible aux valeurs extrêmes ou aux données aberrantes.
- **Calcul intensif** : Le calcul des moments peut être computationnellement intensif, surtout pour des ensembles flous complexes.

En résumé, la méthode des moments est une approche populaire pour la défuzzification en logique floue, offrant une précision raisonnable et une relative simplicité de compréhension. Cependant, elle peut être sensible aux données et nécessiter des calculs intensifs dans certains cas.

## 3.7 Méthode de classement flou basée sur les fonctions d'appartenance

La méthode de classement flou basée sur les fonctions d'appartenance est une approche puissante pour évaluer et classer des options en tenant compte de plusieurs critères. Cette méthode repose sur l'utilisation de fonctions d'appartenance pour évaluer la pertinence de chaque option par rapport à différents critères, puis agrège ces évaluations pour obtenir un classement global. [28]

Les fonctions d'appartenance utilisées pour évaluer la pertinence de chaque option par rapport à différents critères peuvent varier en fonction de la nature des critères et des préférences de l'utilisateur. Voici quelques exemples de fonctions d'appartenance couramment utilisées pour différents types de critères :

#### 1. Critère de Prix :

- Fonction d'appartenance "Bon marché" : Habituellement une fonction triangulaire avec un pic à un prix bas et des valeurs basses à moyennes.
- Fonction d'appartenance "Modéré" : Une fonction triangulaire ou trapézoïdale avec un pic à un prix moyen.
- Fonction d'appartenance "Coûteux" : Une fonction triangulaire avec un pic à un prix élevé et des valeurs moyennes à élevées.

## 2. Critère de Qualité :

- Fonction d'appartenance "Excellente" : Peut être représentée par une fonction gaussienne avec un pic à une qualité élevée.
- Fonction d'appartenance "Acceptable" : Une fonction triangulaire ou trapézoïdale avec un pic à une qualité moyenne.
- Fonction d'appartenance "Insatisfaisante" : Une fonction triangulaire avec un pic à une qualité basse et des valeurs moyennes à basses.

## 3. Critère de Sécurité :

- Fonction d'appartenance "Très sûr" : Habituellement une fonction gaussienne avec un pic à une sécurité maximale.
- Fonction d'appartenance "Sûr" : Une fonction triangulaire ou trapézoïdale avec un pic à une sécurité moyenne.
- Fonction d'appartenance "Risque élevé" : Une fonction triangulaire avec un pic à un niveau de sécurité bas et des valeurs moyennes à basses.

Ces exemples illustrent différentes formes de fonctions d'appartenance qui peuvent être utilisées pour évaluer la pertinence des options par rapport à différents critères. En pratique, les fonctions d'appartenance peuvent être ajustées et adaptées en fonction des besoins spécifiques du problème et des préférences de l'utilisateur.

### 3.7.1 les fonctions d'appartenance utiliser

#### 1. Fonction d'appartenance triangulaire

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } b < x \leq c \\ 0 & \text{si } x > c \end{cases}$$

#### 2. Fonction d'appartenance trapézoïdale

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{si } x > d \end{cases}$$

#### 3. Fonction d'appartenance gaussienne

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$

### 3.7.2 Exemples

1. **Évaluation des Options d'achat de Voiture** : Supposons que vous évaluez différentes options d'achat de voiture en fonction de critères tels que le prix, la consommation de carburant et la sécurité. Vous pouvez définir des fonctions d'appartenance pour chaque critère pour évaluer la pertinence de chaque option. Par exemple, pour le critère du prix, vous pourriez avoir des fonctions d'appartenance "coûteux", "modéré" et "bon marché". De même, pour la consommation de carburant, vous pourriez avoir des fonctions d'appartenance "élevée", "moyenne" et "faible". En agrégeant les évaluations pour tous les critères à l'aide d'une méthode de fusion floue, vous pouvez obtenir un classement global des options.

2. **Sélection d'un Fournisseur** : Dans un contexte professionnel, vous pourriez utiliser cette méthode pour sélectionner un fournisseur en fonction de critères tels que la qualité des produits, les délais de livraison et les coûts. Pour chaque critère, vous pouvez définir des fonctions d'appartenance pour évaluer la pertinence de chaque fournisseur. Par exemple, pour la qualité des produits, vous pourriez avoir des fonctions d'appartenance "excellente", "acceptable" et "insatisfaisante". En agrégeant les évaluations pour tous les critères, vous pouvez obtenir un classement des fournisseurs.

### 3.7.3 Avantages et Inconvénients

#### 3.7.3.1 Avantages

- **Flexibilité** : Cette méthode permet de prendre en compte une variété de critères et de les pondérer selon leur importance relative.
- **Gestion de l'incertitude** : Les fonctions d'appartenance permettent de modéliser l'incertitude et le flou associés à l'évaluation des options.
- **Adaptabilité** : Elle peut être adaptée à différents contextes et situations en ajustant les fonctions d'appartenance et les critères utilisés.

#### 3.7.3.2 Inconvénients

- **Sensibilité aux Paramètres** : Les résultats peuvent être sensibles aux choix des fonctions d'appartenance et des poids des critères, ce qui peut introduire un certain degré de subjectivité.
- **Complexité** : La définition et la gestion des fonctions d'appartenance et des critères peuvent être complexes, surtout pour les problèmes avec de nombreux critères ou des données incomplètes.
- **Interprétation** : L'interprétation des résultats peut être difficile en raison de la nature floue des évaluations.

## 3.8 Méthode de Dominance Stochastique

La **méthode de dominance stochastique** est utilisée pour comparer les distributions cumulatives des critères de différentes options. Une option est dite stochastiquement dominante si elle est préférée dans un sens de probabilité à une autre option pour tous les niveaux de critère.

### 3.8.1 Modèle Mathématique

Pour deux options  $A$  et  $B$  avec des distributions cumulées  $F_A(x)$  et  $F_B(x)$ , l'option  $A$  est dite dominante stochastiquement par rapport à l'option  $B$  si :

$$F_A(x) \leq F_B(x) \quad \forall x$$

Cela signifie que pour tout niveau de critère  $x$ , la probabilité que l'option  $A$  soit inférieure ou égale à  $x$  est toujours plus grande ou égale à la probabilité que l'option  $B$  soit inférieure ou égale à  $x$ .

### 3.8.2 Exemple Pratique

Supposons que nous comparions deux investissements avec des rendements futurs incertains. Les distributions cumulatives des rendements sont  $F_A(x)$  pour l'investissement  $A$  et  $F_B(x)$  pour l'investissement  $B$ . Si  $F_A(x) \leq F_B(x)$  pour tous les niveaux de rendement  $x$ , cela signifie que l'investissement  $A$  est au moins aussi bon que l'investissement  $B$  pour tous les niveaux de rendement, et donc,  $A$  est préféré.

### 3.8.3 Avantages et Inconvénients

**Avantages :**

- Facile à comprendre et à appliquer.
- Prend en compte la totalité de la distribution des critères, offrant une vue complète de l'incertitude.

**Inconvénients :**

- Peut être difficile à appliquer lorsque les distributions se croisent.
- Nécessite des données détaillées sur les distributions des critères, ce qui peut ne pas être toujours disponible.

## 3.9 Critère Spécifique

Le **critère spécifique** se concentre sur des aspects particuliers jugés importants par le décideur, accordant ainsi plus de poids à certains critères en fonction des préférences ou des priorités spécifiques. Cette méthode de classement est particulièrement utile lorsque certains critères sont considérés comme plus critiques que d'autres.

### 3.9.1 Formule Mathématique

La fonction de décision  $D$  pour une option  $i$  peut être définie comme une pondération linéaire des critères :

$$D(i) = \sum_{j=1}^n w_j \mu_{ij}$$

où  $w_j$  est le poids du critère  $j$  et  $\mu_{ij}$  est la fonction d'appartenance de l'option  $i$  pour le critère  $j$ .

### 3.9.2 Exemple Pratique

Supposons qu'un décideur accorde plus d'importance au critère de sécurité qu'au critère de coût pour choisir un fournisseur. Si les poids des critères sont définis comme suit :  $w_{\text{sécurité}} = 0.7$  et  $w_{\text{coût}} = 0.3$ , la fonction de décision pour chaque fournisseur  $i$  pourrait être calculée comme :

$$D(i) = 0.7 \cdot \mu_{\text{sécurité},i} + 0.3 \cdot \mu_{\text{coût},i}$$

où  $\mu_{\text{sécurité},i}$  et  $\mu_{\text{coût},i}$  sont les valeurs de pertinence floues pour le fournisseur  $i$  en termes de sécurité et de coût, respectivement.

### 3.9.3 Avantages et Inconvénients

**Avantages :**

- Flexible et personnalisable selon les préférences du décideur.
- Permet de focaliser sur les critères les plus pertinents pour le contexte spécifique.

**Inconvénients :**

- Peut introduire un biais si les poids ne sont pas correctement définis.
- Nécessite une bonne connaissance des priorités du décideur, ce qui peut ne pas être toujours clair.

## 3.10 Robust Ranking Technique – Algorithm

Afin de résoudre le problème, nous utilisons une méthode de classement des nombres floue pour défuser les nombres floue. Une méthode de classement solide [50] qui répond aux critères de compensation, de linéarité et d'additivité, et offre des résultats qui correspondent aux perceptions humaines. En fournissant un nombre floue convexe  $\tilde{a}$ , on définit l'indice de classement robuste par :

$$R(\tilde{a}) = \int_0^1 \frac{1}{2} (a_\alpha^L + a_\alpha^U) d\alpha$$

Où  $(a_\alpha^L, a_\alpha^U)$  est le niveau  $\alpha$  – cut du nombre flou  $\tilde{a}$ .

Dans ce document, nous utilisons cette méthode pour le classement des nombres flou.

L'indice de classement robuste  $R(\tilde{a})$  donne la valeur représentative du nombre flou  $\tilde{a}$ . Il satisfait à la propriété linéaire et additive.

### 3.10.1 Avantages et Inconvénients de la Technique de Classification Robuste

#### Avantages [34]

1. **Résistance aux Valeurs Aberrantes :**

- Moins influencées par les valeurs extrêmes.
- Estimations plus fiables malgré les erreurs de mesure.

2. **Meilleure Généralisation :**

- Évitent le sur-ajustement aux données d'entraînement.
- Produisent des prédictions et des coefficients plus stables.

3. **Performance dans des Environnements Bruyants :**

- Utilisent des méthodes d'optimisation moins sensibles aux fluctuations.
- Offrent des estimations consistantes même avec des données imparfaites.

4. **Réduction du Sur-Ajustement :**

- Utilisation de pertes non-quadratiques (comme la perte  $L_1$ ).
- Réduisent l'impact des points de données influents.

5. **Interprétabilité Améliorée :**

- Paramètres estimés reflètent mieux la tendance centrale des données.
- Moins de distorsions dues aux valeurs aberrantes.

#### Inconvénients [46]

1. **Complexité Computationnelle :**

- Algorithmes plus intensifs en calcul, nécessitant plus de temps et de ressources.
- Optimisation non-convexe plus difficile à résoudre.

2. **Ajustement des Paramètres :**

- Dépendance aux choix de paramètres nécessitant une validation croisée minutieuse.
- Performance variable selon les méthodes de sélection de paramètres.

3. **Réduction Potentielle de Sensibilité :**

- Ignorent parfois des variations légitimes cruciales pour certaines applications.
- Risque de perdre des informations précieuses.

4. **Défis de Mise en Œuvre :**

- Nécessitent des connaissances avancées en mathématiques et optimisation.

- Moins de bibliothèques et ressources disponibles.

#### 5. Problèmes de Scalabilité :

- Moins adaptées aux très grands ensembles de données.
- Exigent plus de mémoire et de puissance de traitement.

### 3.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré diverses méthodes de classement floues, chacune ayant ses propres avantages et inconvénients. Le choix de la méthode de classement flou dépend du contexte, incluant la nature des données, le type d'incertitude et les exigences de performance. La Méthode de l'Abscisse du Centre de Gravité(COG) est largement utilisée en raison de sa simplicité et de sa précision, tandis que la Méthode de Classement des Alpha-cuts segmente la fonction d'appartenance en plusieurs niveaux de confiance, permettant une évaluation plus détaillée. La Méthode des Moments est adaptée aux données complexes en utilisant les moments de la fonction d'appartenance pour obtenir une valeur précise. La Méthode de Comparaison des Centres de Gravité compare directement les centres de gravité de différentes fonctions d'appartenance, offrant une approche simple mais limitée par les mêmes contraintes que la méthode COG. La Méthode de Dominance Stochastique évalue les options en termes de probabilités cumulées, offrant une perspective robuste pour le classement sous incertitude probabiliste, tandis que le Critère Spécifique utilise une connaissance experte pour évaluer les options en fonction de critères préétablis. La Technique de Classement Robuste combine des méthodes pour gérer l'incertitude et les variations des données de manière plus efficace, en cherchant à minimiser l'impact des erreurs sur le classement final. Il est essentiel de comparer les méthodes et de choisir celle qui répond le mieux aux besoins spécifiques de l'application, et de les valider sur des données réelles avant de les utiliser dans des applications critiques.

En conclusion, le choix de la méthode de classement floue doit être guidé par les caractéristiques spécifiques du problème à résoudre, les exigences de précision, la complexité computationnelle et la nature des informations disponibles.

Dans le chapitre suivant, nous mettrons en œuvre la méthode de classification robuste pour une application numérique spécifique, illustrant son efficacité pour gérer l'incertitude et les variations des données, en fournissant des résultats fiables et robustes.

# APPLICATION : LA FILE D'ATTENTE $FM/FM/1$ AVEC PRIORITÉ

## 4.1 Introduction

LES modèles de files d'attente sont appliqués dans divers domaines tels que le génie des transports, l'industrie des services, la production, les systèmes de communication, les soins de santé et les systèmes de traitement de l'information. Bien que la discipline d'attente où les clients sont servis selon leur ordre d'arrivée soit courante, de nombreux systèmes de files d'attente réels suivent un modèle de priorité. Ce mécanisme de priorité permet à différents types de clients de recevoir des niveaux de performance différents et est facile à mettre en œuvre. Les files d'attente à priorité ont de nombreuses applications, notamment dans les réseaux de communication, les centres d'appels et les hôpitaux. Il existe deux types de priorités : la préemptive et la non-préemptive. Dans le cas de la priorité préemptive, un client de haute priorité peut entrer en service immédiatement, même si un client de priorité inférieure est déjà en service, ce qui est utile pour l'évaluation des performances dans la production, la fabrication, les contrôles d'inventaire et les systèmes informatiques.

Les modèles de files d'attente floues, qui intègrent l'incertitude à l'aide de la théorie des ensembles flous, sont plus réalistes que les modèles classiques. Contrairement au modèle classique où les arrivées suivent un processus de Poisson et les temps de service sont exponentiellement distribués, les taux d'arrivée dans de nombreuses conditions réelles sont souvent plus possibilistes que probabilistes. Bellman et Zadeh ont introduit l'idée de flou pour résoudre les problèmes de prise de décision avec des informations imprécises. De

nombreux chercheurs ont étudié les files d'attente floues en utilisant le principe d'extension de Zadeh. Par exemple, Kao et al. ont développé une approche de programmation linéaire paramétrique pour dériver les fonctions d'appartenance des systèmes de files d'attente flous.

Les travaux récents sur les nombres flous par variables aléatoires permettent d'analyser les systèmes de files d'attente. La conversion des files d'attente floues en files d'attente classiques a également été largement discutée, avec des méthodes telles que la méthode de classement robuste. Les études précédentes ont principalement porté sur les files d'attente à priorité non-préemptive.

Ce chapitre vise à aborder la défuzzification des mesures de performances dans un système de files d'attente floues (FM/FM/1 avec priorité) en utilisant la technique de classification robuste. Pour ce faire, nous avons utilisé le langage de programmation Python pour analyser les données et implémenter les algorithmes nécessaires, permettant ainsi une étude approfondie des comportements de file d'attente dans des conditions réelles.

## 4.2 Description du modèle avec priorité

### 4.2.1 $\alpha$ -cut d'un nombre flou

La  $\alpha$ -cut d'un nombre flou  $A(x)$  est définie comme suit :  $A(\alpha) = \{x : \mu(x) \geq \alpha, \alpha \in [0, 1]\}$ .

L'addition de deux nombres flous triangulaires peut être effectuée comme suit :  $(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ .

### Nombre flou triangulaire

Un nombre flou triangulaire peut être représenté par  $\tilde{A}(a, b, c)$  où  $a < b < c$  avec une fonction d'appartenance  $\mu(x)$  donnée par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si } x = b, \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } b \leq x \leq c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Nombre flou trapézoïdal

Un nombre flou trapézoïdal peut être représenté par  $\tilde{A}(a, b, c, d)$  où  $a < b < c < d$  avec

une fonction d'appartenance  $\mu(x)$  donnée par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si } b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c \leq x \leq d, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Définition 15

Un ensemble flou  $\tilde{A}$  est un sous-ensemble convexe de  $Z$  si et seulement si

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2))$$

pour tout  $x_1, x_2 \in X$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .

### Indice de classement de Yager

Le problème flou est résolu en reformulant en un problème crisp en utilisant l'Indice de classement de Yager. Pour résoudre le problème, les nombres flous sont défloutés en nombres crisp par la méthode de classement. Yager a suggéré l'index suivant pour ordonner les nombres flous :

$$Y(\tilde{a}) = \int_0^1 \frac{1}{2}(a_\alpha^L + a_\alpha^U) d\alpha$$

$Y(\tilde{a})$  possède les propriétés de linéarité et d'additivité.

#### 4.2.2 Formulation mathématique

Un système de file d'attente  $FM/FM/1$  avec un serveur unique et trois files d'attente prioritaires est étudié. Les temps d'inter-arrivée  $\tilde{A}_i$  pour les files d'attente de première, deuxième et troisième priorité, ainsi que les temps de service, sont approximativement connus et sont donnés par les ensembles flous.

$$\tilde{A}_i = \{(x, \mu_{\tilde{A}_i}(x)/x \in X\}, \quad (4.1)$$

$$\tilde{S} = \{(y, \mu_{\tilde{S}}(y)/y \in Y\}, \quad (4.2)$$

Où  $X$  et  $Y$  sont des ensembles universels crisp des temps d'arrivée et des temps de service respectivement, et  $\mu_{\tilde{A}_i}(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$  et  $\mu_{\tilde{S}}(y)$  sont les fonctions d'appartenance respectives. En utilisant l' $\alpha$ -cut, les temps d'arrivée et les temps de service peuvent être représentés par différents niveaux d'intervalles de confiance  $\alpha \in [0, 1]$ . Par conséquent, une file d'attente à priorité préemptive floue peut être reformulée en une famille de files d'attente crisp avec différents  $\alpha$ -cuts. En utilisant la notion d' $\alpha$ -cut, la file d'attente  $FM/FM/1$  avec trois files d'attente prioritaires est reformulée en une file d'attente  $M/M/1$  avec des

clients de trois priorités ayant des taux de service égaux, c'est-à-dire  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ .

De plus,

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}, \quad \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3}$$

et

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{tel que} \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

, donc  $\rho = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\mu}$ ,  $\sigma_k = \sum_{i=1}^{i=k} \rho_i$ ,  $\sigma_0 = 0$ .

Sans perte de généralité, supposons les mesures de performance pour les trois files d'attente prioritaires.

D'après la théorie classique des files d'attente, le temps d'attente dans la file est

$$W_q^{(i)} = \frac{\frac{1}{\mu}}{(1 - \sigma_{i-1})(1 - \sigma_i)} - \frac{1}{\mu}$$

D'où nous pouvons déduire que

$$W_q^{(1)} = \frac{1}{\mu - \lambda_1} - \frac{1}{\mu}$$

$$W_q^{(2)} = \frac{\mu}{(\mu - \lambda_1)(\mu - (\lambda_1 + \lambda_2))} - \frac{1}{\mu}$$

$$W_q^{(3)} = \frac{\mu}{(\mu - \lambda)(\mu - (\lambda_1 + \lambda_2))} - \frac{1}{\mu}$$

La longueur moyenne de la file d'attente est

$$L_q^{(i)} = \lambda_i * W_q^{(i)}$$

D'où nous pouvons déduire que

$$L_q^{(1)} = \frac{\lambda_1}{(\mu - \lambda_1)} - \frac{\lambda_1}{\mu}$$

$$L_q^{(2)} = \frac{\lambda_2}{\mu(1 - \frac{\lambda_1}{\mu})(1 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\mu})} - \frac{\lambda_2}{\mu}$$

$$L_q^{(3)} = \frac{\lambda_3}{\mu(1 - \frac{\lambda}{\mu})(1 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\mu})} - \frac{\lambda_3}{\mu}$$

Où  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  sont les taux d'arrivée des unités de première, deuxième et troisième priorité respectivement et  $\mu$  est le taux de service.

### 4.3 Application numérique

#### 4.3.1 Description du Problème

Temps d'attente prévu et nombre prévu de clients en queue pour la queue  $FM/FM/1$  avec 3 classes prioritaires préemptives.

#### 4.3.2 Pour le nombre Flou trapézoïdal

Les taux de première, deuxième et troisième priorités avec les mêmes taux de service sont représentés par des nombres flous trapézoïdaux notés respectivement  $[3, 4, 6, 7]$ ,  $[5, 6, 8, 9]$ ,  $[7, 8, 10, 11]$  et  $[20, 21, 23, 24]$  par heure. L' $\alpha$ -cut des fonctions d'appartenance  $\mu_{\tilde{A}_1}(\alpha)$ ,  $\mu_{\tilde{A}_2}(\alpha)$ ,  $\mu_{\tilde{A}_3}(\alpha)$  et  $\mu_{\tilde{S}}(\alpha)$  sont calculer ci-dessous.

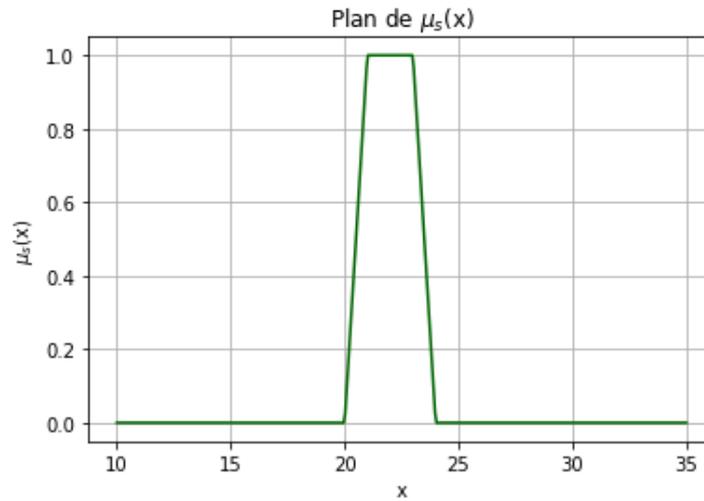
##### 4.3.2.1 Calcul des fonctions d'adhésion

1. L' $\alpha$ -cut de la fonction d'appartenance de  $\tilde{S}$

$$\mu_{\tilde{S}}(x) = \begin{cases} \frac{x-20}{1} & \text{si } 20 \leq x \leq 21, \\ 1 & \text{si } 21 \leq x \leq 23, \\ \frac{24-x}{1} & \text{si } 23 \leq x \leq 24, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

tels que

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\alpha &= [\tilde{S}^L(\alpha), \tilde{S}^U(\alpha)] \\ &= [a + \alpha(b - a), d - \alpha(d - c)] \\ &= [20 + \alpha, 24 - \alpha] \end{aligned}$$

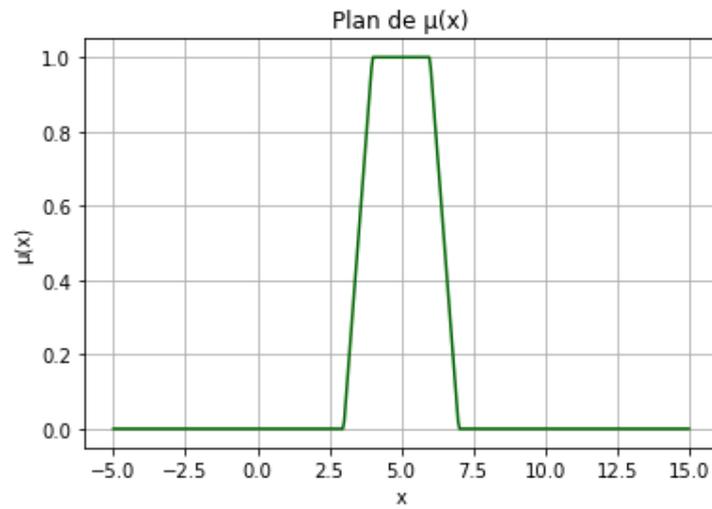
FIGURE 4.1 – Fonction d'appartenance de  $\tilde{S}$ 

2. L' $\alpha$ -cut de la fonction d'appartenance de  $\tilde{A}_1$

$$\mu_{\tilde{A}_1}(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{1} & \text{si } 3 \leq x \leq 4, \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \leq 6, \\ \frac{6-x}{1} & \text{si } 6 \leq x \leq 7, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

tels que

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1\alpha} &= [\tilde{A}_1^L(\alpha), \tilde{A}_1^U(\alpha)] \\ &= [a + \alpha(b - a), d - \alpha(d - c)] \\ &= [3 + \alpha, 7 - \alpha] \end{aligned}$$

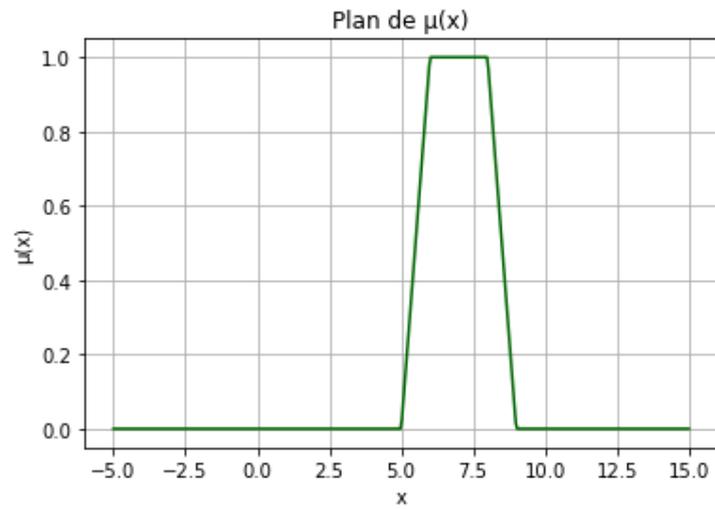
FIGURE 4.2 – Fonction d'appartenance de  $\tilde{A}_1$ 

3. L' $\alpha$ -cut de la fonction d'appartenance de  $\tilde{A}_2$

$$\mu_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{1} & \text{si } 5 \leq x \leq 6, \\ 1 & \text{si } 6 \leq x \leq 8, \\ \frac{8-x}{1} & \text{si } 8 \leq x \leq 9, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

tels que

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{2\alpha} &= [\tilde{A}_2^L(\alpha), \tilde{A}_2^U(\alpha)] \\ &= [a + \alpha(b - a), d - \alpha(d - c)] \\ &= [5 + \alpha, 9 - \alpha] \end{aligned}$$

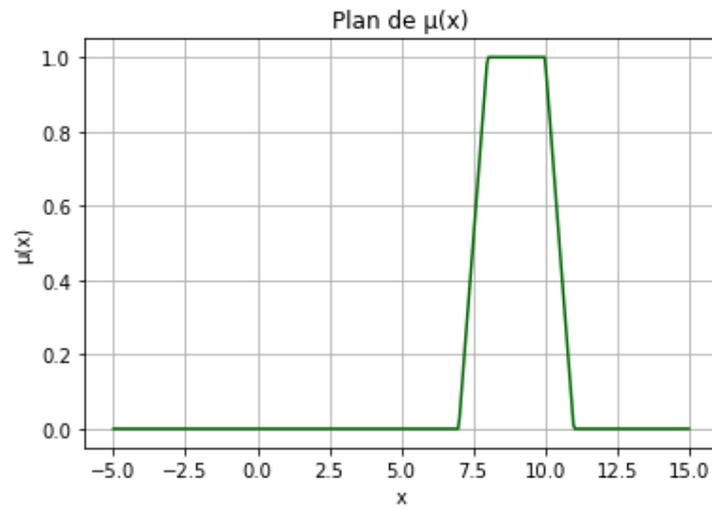

 FIGURE 4.3 – Fonction d'appartenance du  $\tilde{A}_2$ 

4. L' $\alpha$ -cut de la fonction d'appartenance de  $\tilde{A}_3$

$$\mu_{\tilde{A}_3}(x) = \begin{cases} \frac{x-7}{1} & \text{si } 7 \leq x \leq 8, \\ 1 & \text{si } 8 \leq x \leq 10, \\ \frac{11-x}{1} & \text{si } 10 \leq x \leq 11, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

tels que

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{3\alpha} &= [\tilde{A}_3^L(\alpha), \tilde{A}_3^U(\alpha)] \\ &= [a + \alpha(b - a), d - \alpha(d - c)] \\ &= [7 + \alpha, 11 - \alpha] \end{aligned}$$

FIGURE 4.4 – Fonction d'appartenance de  $\tilde{A}_3$ 

On calcule  $Y(\tilde{A}_1)$  en appliquant la méthode de classement de Yager :

$$\begin{aligned}
 Y(\tilde{A}_1) &= R(3, 4, 6, 7) \\
 &= \int_0^1 0.5(a_\alpha^L + a_\alpha^U) d\alpha \\
 &= \int_0^1 0.5(3 + \alpha + 7 - \alpha) d\alpha \\
 &= \int_0^1 0.5(10) d\alpha \\
 &= 5 \implies \lambda_1 = 5
 \end{aligned}$$

On calcule  $Y(\tilde{A}_2)$  en appliquant la méthode de classement de Yager :

$$\begin{aligned}
 Y(\tilde{A}_2) &= R(5, 6, 8, 9) \\
 &= \int_0^1 0.5(a_\alpha^L + a_\alpha^U) d\alpha \\
 &= 7 \implies \lambda_2 = 7
 \end{aligned}$$

On calcule  $Y(\tilde{A}_3)$  en appliquant la méthode de classement de Yager :

$$\begin{aligned}
 Y(\tilde{A}_3) &= R(7, 8, 10, 11) \\
 &= \int_0^1 0.5(a_\alpha^L + a_\alpha^U) d\alpha \\
 &= 9 \implies \lambda_3 = 9
 \end{aligned}$$

On calcule  $Y(\tilde{S})$  en appliquant la méthode de classement de Yager :

$$\begin{aligned} Y(\tilde{S}) &= R(20, 21, 23, 24) \\ &= \int_0^1 0.5(a_\alpha^L + a_\alpha^U) d\alpha \\ &= 22 \implies \mu = 22 \end{aligned}$$

#### 4.3.2.2 Calcul des mesures de performance

Le temps d'attente moyen des unités de première priorité dans la file d'attente est :

$$\begin{aligned} W_q^{(1)} &= \frac{1}{\mu - \lambda_1} - \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{1}{22 - 5} - \frac{1}{22} \\ &= 0.013368 \end{aligned}$$

Le temps d'attente moyen des unités de deuxième priorité dans la file d'attente est :

$$\begin{aligned} W_q^{(2)} &= \frac{\mu}{(\mu - \lambda_1)(\mu - (\lambda_1 + \lambda_2))} - \frac{1}{\mu} \\ &= 0.083957 \end{aligned}$$

Le temps d'attente moyen des unités de troisième priorité dans la file d'attente est :

$$\begin{aligned} W_q^{(3)} &= \frac{\mu}{(\mu - \lambda)(\mu - (\lambda_1 + \lambda_2))} - \frac{1}{\mu} \\ &= 2.154545 \end{aligned}$$

La longueur moyenne d'attente de première priorité :

$$\begin{aligned} L_q^{(1)} &= \frac{\lambda_1}{(\mu - \lambda_1)} - \frac{\lambda_1}{\mu} \\ &= 0.066844 \end{aligned}$$

La longueur moyenne d'attente de deuxième priorité :

$$\begin{aligned} L_q^{(2)} &= \frac{\lambda_2}{\mu(1 - \frac{\lambda_1}{\mu})(1 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\mu})} - \frac{\lambda_2}{\mu} \\ &= 0.587700 \end{aligned}$$

La longueur moyenne d'attente de troisième priorité :

$$\begin{aligned} L_q^{(3)} &= \frac{\lambda_3}{\mu(1 - \frac{\lambda_1}{\mu})(1 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\mu})} - \frac{\lambda_3}{\mu} \\ &= 19.390909 \end{aligned}$$

### 4.3.3 Pour le nombre flou triangulaire

Soient les taux de première, deuxième et troisième priorité avec les mêmes taux de service des nombres flous triangulaires notés par  $\tilde{A}_1 = [3, 6, 8]$ ,  $\tilde{A}_2 = [4, 7, 9]$ ,  $\tilde{A}_3 = [5, 8, 10]$ ,  $\tilde{S} = [20, 23, 25]$  par heure respectivement. Les fonctions d'adhésion sont  $\mu_{\tilde{A}_1}(\alpha)$ ,  $\mu_{\tilde{A}_2}(\alpha)$ ,  $\mu_{\tilde{A}_3}(\alpha)$  et  $\mu_{\tilde{S}}(\alpha)$  sont calculer ci-dessous.

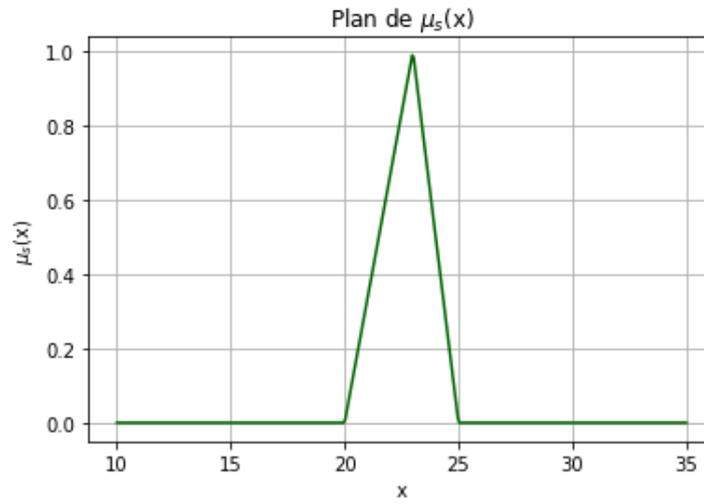
#### 4.3.3.1 Calcul des fonctions d'adhésion

1. L' $\alpha$ -cut de la fonction d'appartenance de  $\tilde{S}$

$$\mu_{\tilde{S}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 20}{1} & \text{si } 20 \leq x \leq 23, \\ 1 & \text{si } x = 23, \\ \frac{25 - x}{25 - 23} & \text{si } 23 \leq x \leq 25, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

tels que

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\alpha &= [\tilde{S}^L(\alpha), \tilde{S}^U(\alpha)] \\ &= [a + \alpha(b - a), c + \alpha(c - b)] \\ &= [20 + 3\alpha, 25 + 2\alpha] \end{aligned}$$

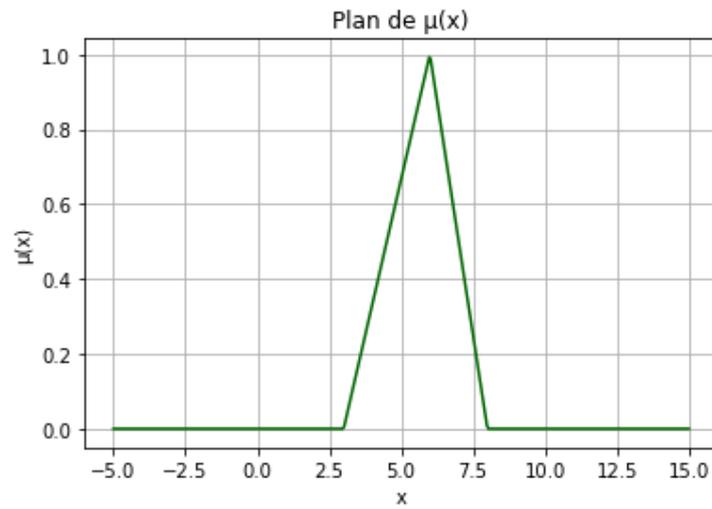
FIGURE 4.5 – Fonction d'appartenance de  $\tilde{S}$ 

2. L' $\alpha$ -cut de la fonction d'appartenance de  $\tilde{A}_1$

$$\mu_{\tilde{A}_1}(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{3} & \text{si } 3 \leq x \leq 6, \\ 1 & \text{si } x = 6, \\ \frac{8-x}{2} & \text{si } 6 \leq x \leq 8, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

tels que

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1\alpha} &= [\tilde{A}_1^L(\alpha), \tilde{A}_1^U(\alpha)] \\ &= [a + \alpha(b - a), c + \alpha(c - b)] \\ &= [3 + 3\alpha, 8 - 2\alpha] \end{aligned}$$

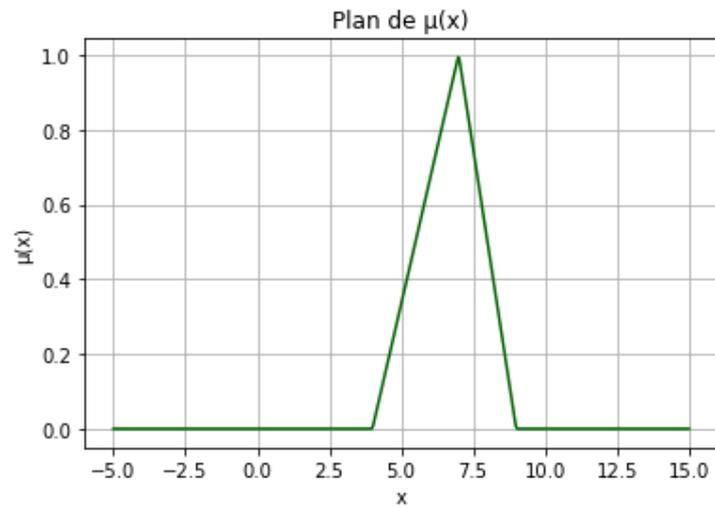
FIGURE 4.6 – Fonction d'appartenance de  $\tilde{A}_1$ 

3. L' $\alpha$ -cut de la fonction d'appartenance de  $\tilde{A}_2$

$$\mu_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{3} & \text{si } 4 \leq x \leq 7, \\ 1 & \text{si } x = 7, \\ \frac{9-x}{2} & \text{si } 7 \leq x \leq 9, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

tels que

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{2\alpha} &= [\tilde{A}_2^L(\alpha), \tilde{A}_2^U(\alpha)] \\ &= [a + \alpha(b - a), c + \alpha(c - b)] \\ &= [4 + 3\alpha, 9 - 2\alpha] \end{aligned}$$

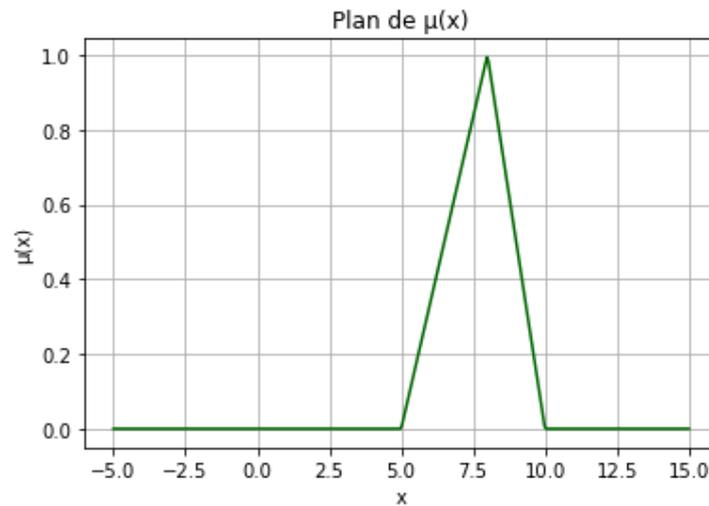
FIGURE 4.7 – Fonction d'appartenance de  $\tilde{A}_2$ 

4. L' $\alpha$ -cut de la fonction d'appartenance de  $\tilde{A}_3$

$$\mu_{\tilde{A}_3}(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{3} & \text{si } 5 \leq x \leq 8, \\ 1 & \text{si } x = 8, \\ \frac{10-x}{2} & \text{si } 8 \leq x \leq 10, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

tels que

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{3\alpha} &= [\tilde{A}_3^L(\alpha), \tilde{A}_3^U(\alpha)] \\ &= [a + \alpha(b - a), c + \alpha(c - b)] \\ &= [5 + 3\alpha, 10 - 2\alpha] \end{aligned}$$

FIGURE 4.8 – Fonction d'appartenance de  $\tilde{A}_3$ 

On calcule  $Y(\tilde{A}_1)$  en appliquant la méthode de classement de Yager :

$$\begin{aligned}
 Y(\tilde{A}_1) &= R(3, 6, 8) \\
 &= \int_0^1 0.5(a_\alpha^L + a_\alpha^U) d\alpha \\
 &= \int_0^1 0.5(3 + 3\alpha + 8 - 2\alpha) d\alpha \\
 &= \int_0^1 0.5(11 + \alpha) d\alpha \\
 &= 5,75 \implies \lambda_1 = 5,75
 \end{aligned}$$

On calcule  $Y(\tilde{A}_2)$  en appliquant la méthode de classement de Yager :

$$\begin{aligned}
 Y(\tilde{A}_2) &= R(4, 7, 9) \\
 &= \int_0^1 0.5(a_\alpha^L + a_\alpha^U) d\alpha \\
 &= 6,75 \implies \lambda_2 = 6,75
 \end{aligned}$$

On calcule  $Y(\tilde{A}_3)$  en appliquant la méthode de classement de Yager :

$$\begin{aligned}
 Y(\tilde{A}_3) &= R(5, 8, 10) \\
 &= \int_0^1 0.5(a_\alpha^L + a_\alpha^U) d\alpha \\
 &= 7,75 \implies \lambda_3 = 7,75
 \end{aligned}$$

On calcule  $Y(\tilde{S})$  en appliquant la méthode de classement de Yager :

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(\tilde{S}) &= R(20, 23, 25) \\ &= \int_0^1 0.5(a_\alpha^L + a_\alpha^U) d\alpha \\ &= 22,75 \implies \mu = 22,75\end{aligned}$$

#### 4.3.3.2 Calcul des mesures de performances

Le temps d'attente moyen des unités de première priorité dans la file d'attente est :

$$\begin{aligned}W_q^{(1)} &= \frac{1}{\mu - \lambda_1} - \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{1}{22,75 - 5,75} - \frac{1}{22,75} \\ &= 0.014867\end{aligned}$$

Le temps d'attente moyen des unités de deuxième priorité dans la file d'attente est :

$$\begin{aligned}W_q^{(2)} &= \frac{\mu}{(\mu - \lambda_1)(\mu - (\lambda_1 + \lambda_2))} - \frac{1}{\mu} \\ &= 0.086603\end{aligned}$$

Le temps d'attente moyen des unités de troisième priorité dans la file d'attente est :

$$\begin{aligned}W_q^{(3)} &= \frac{\mu}{(\mu - \lambda)(\mu - (\lambda_1 + \lambda_2))} - \frac{1}{\mu} \\ &= 0.843848\end{aligned}$$

La longueur moyenne d'attente de première priorité :

$$\begin{aligned}L_q^{(1)} &= \frac{\lambda_1}{(\mu - \lambda_1)} - \frac{\lambda_1}{\mu} \\ &= 0.085488\end{aligned}$$

La longueur moyenne d'attente de deuxième priorité :

$$\begin{aligned} L_q^{(2)} &= \frac{\lambda_2}{\mu(1 - \frac{\lambda_1}{\mu})(1 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\mu})} - \frac{\lambda_2}{\mu} \\ &= 0.584573 \end{aligned}$$

La longueur moyenne d'attente de troisième priorité :

$$\begin{aligned} L_q^{(3)} &= \frac{\lambda_3}{\mu(1 - \frac{\lambda}{\mu})(1 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\mu})} - \frac{\lambda_3}{\mu} \\ &= 6.539828 \end{aligned}$$

#### 4.4 Conclusion

Les files d'attente à priorité préemptive floue sont représentées de manière plus précise et les résultats sont dérivés. Des exemples numériques pour les nombres triangulaires et trapézoïdaux sont expliqués de manière efficace pour vérifier la validité du modèle proposé.

La méthode de classement utilisée dans ce chapitre est plus efficace pour transformer les files d'attente floues en files d'attente classiques, et la  $\alpha$ -cut est utilisée pour réduire les files d'attente floues en files d'attente classiques. La longueur moyenne de la file d'attente et le temps d'attente moyen sont calculés.

Les travaux futurs pourraient porter sur l'examen de l'efficacité de cette technique pour d'autres modèles de file d'attente et sur l'application de différentes méthodes pour trouver les mesures de performance dans les files d'attente préemptives floues.

# L'ANNEXE

## TRAPÉZOÏDALE

```
[1]: # -*- coding: utf-8 -*-
      """
      Created on Sun Jun  2 18:37:10 2024

      @author: mehno
      """

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def get_vector():
    """Invite l'utilisateur à saisir 4 nombres séparés par des espaces
    →et les renvoie sous forme de liste."""
    while True:
        try:
            # Get user input for the vector
            vector_str = input("Entrez quatre chiffres séparés par des
            →espaces (p. ex., 1 2 3 4).: ")
            vector = [float(num) for num in vector_str.split()] # Convert to
            →float list
            if len(vector) == 4:
                return vector
            else:
                print("Entrée non valide. Veuillez entrer exactement 4 chiffres
                →séparés par des espaces.")
        except ValueError:
            print("Entrée non valide. Veuillez entrer des nombres séparés par
            →des espaces")
```

```

# write s
print("écrire le vecteur S")
vector_a = get_vector()
print("vous avez saisi:", vector_a)

def get_n_vectors(n):
    """
        Cette fonction invite l'utilisateur à entrer n vecteurs, chacun
        → avec 4 nombres.

        Args:
            n: Le nombre de vecteurs à obtenir.

        Retours:
            Une liste de listes, où chaque liste intérieure représente un
            → vecteur avec 4 nombres.
    """
    vectors = []
    for _ in range(n):
        while True:
            try:
                # Get user input for a single vector
                vector_str = input("Entrez quatre chiffres séparés par des
                → espaces (p. ex., 1 2 3 4).: ")
                vector = [float(num) for num in vector_str.split()] # Convert
                → to float list
            
```

```

        if len(vector) == 4:
            break
        else:
            print("Entrée non valide. Veuillez entrer exactement 4
↳chiffres séparés par des espaces.")
            except ValueError:
                print("Entrée non valide. Veuillez entrer des nombres séparés
↳par des espaces.")
                vectors.append(vector)
    return vectors

# demand n
n = int(input("Entrez le nombre de vecteurs (n): "))
all_vectors = get_n_vectors(n)
# input vectors
print("Vous avez saisi les vecteurs suivants:")
for vector in all_vectors:
    print(vector)

# Define mu(x) conditional statements based on vector ranges
for vec in all_vectors:
    print(f" μ(x) fonction pour vecteur ,{vec}:")
    print(" Si ",{vec[0]} , " <= x <= ",{vec[1]}," :")
    print(f" μ(x) = x - {vec[0]} / ({vec[1]} - {vec[0]})")
    print(" Si ", {vec[1]}, "< x <=",{vec[2]}, " :") # Using f-strings
↳for clarity
    print("    μ(x) = 1")
    print(" Si ",{vec[2]}," <= x <=" ,{vec[3]}," :")
    print(f"    μ(x) = ({vec[3]} - x )/ ({vec[3]} - {vec[2]})")
    print("Sinon μ(x)=0")

# display function mu _s
print(f" μs(x) fonction pour vecteur ,{vector_a}:")
print(" Si ",{vector_a[0]} , " <= x <= ",{vector_a[1]}," :")

```

```

print(f"  $\mu_s(x) = x - \{vector\_a[0]\} / (\{vector\_a[1] - vector\_a[0]\})$ ")
print(f" Si ", {vector_a[1]}, "< x <=", {vector_a[2]}, ":") # Using
    → f-strings for clarity
print("  $\mu_s(x) = 1$ ")
print(f" Si ", {vector_a[2]}, " <= x <=" , {vector_a[3]}, ":")
print(f"  $\mu_s(x) = (\{vector\_a[3]\} - x) / (\{vector\_a[3] - vector\_a[2]\})$ ")
print("Sinon mu(x)=0")
print(f" (als.aus)= {vector_a[0]} + alfa * {vector_a[1] - vector_a[0]},
    → {vector_a[3]} - alfa * {vector_a[3] - vector_a[2]}")
#calcul valour mu
print(f"μ pour ce, {vector_a}:")
val_μ=sum(vector_a)/4
print(val_μ)

#display the lower and uper band
for vec in all_vectors:

    print(f" (al.au)= {vec[0]} + alfa * {vec[1] - vec[0]}, {vec[3]} -
    → alfa * {vec[3] - vec[2]}")

# lamda is vector of lamda and lamd is valor

lamda=[]
for vec in all_vectors:

```

```

    print(f"λ de ,{vec}:")
    lamd=sum(vec)/4
    lamda.append(lamd)
    print(lamd)
#calcul ro vector
ro=[]
for val in lamda:
    ro.append(val/val_μ)
print("ρ=",ro)
#ro total
ro_total=sum(ro)
print("ρ total=",ro_total)

#lamda total
lamda_total=sum(lamda)
print("λ total=",lamda_total)

segma = []
segma.append(0) # Append 0 to the list
for val in ro:
    segma.append(segma[-1] + val)
print("σ=",segma)

wq_vec=[]

for j in range(1, n+1):
    wq = ((1/val_μ)/ ((1 - segma[j-1]) * (1 - segma[j]))) - 1/val_μ
    wq_vec.append(wq)

for i in range(n):

```

```

    print("wq",i+1,"=",wq_vec[i])

for i in range(n):
    print("lq",i+1)
    lq=wq_vec[i]*lamda[i]
    print(lq)

def mu(x, a, b, c, d):
    if a <= x <= b:
        return (x - a) / (b - a)
    elif b <= x <= c:
        return 1
    elif c <= x <= d:
        return (d - x) / (d - c)
    else:
        return 0

print(f"μ(x) fonction pour vecteur ,{vector_a}:")

x = np.linspace(10, 35, 400) # generate x values from -1 to 4

y = [mu(xi, vector_a[0], vector_a[1], vector_a[2], vector_a[3]) for xi_
→in x] # calculate y values

plt.plot(x, y, color='#006400') # plot the function
plt.xlabel('x') # label the x-axis
plt.ylabel('μ_s(x)') # label the y-axis
plt.title('Plan de μ_s(x)') # title of the plot
plt.grid(True) # add a grid to the plot
plt.show() # display the plot

for vec in all_vectors:

```

```

print(f"μ(x) fonction pour vecteur ,{vec}:")

x = np.linspace(-5, 15, 400) # generate x values from -1 to 4

y = [mu(xi, vec[0], vec[1], vec[2], vec[3]) for xi in x] #
→calculate y values

plt.plot(x, y, color='#006400') # plot the function
plt.xlabel('x') # label the x-axis
plt.ylabel('μ(x)') # label the y-axis
plt.title('Plan de μ(x)') # title of the plot
plt.grid(True) # add a grid to the plot
plt.show() # display the plot

```

écrire le vecteur S

Entrez quatre chiffres séparés par des espaces (p. ex., 1 2 3 4).: 20   
 →21 23 24

You entered: [20.0, 21.0, 23.0, 24.0]

Entrez le nombre de vecteurs (n): 3

Entrez quatre chiffres séparés par des espaces (p. ex., 1 2 3 4).: 3 4   
 →6 7

Entrez quatre chiffres séparés par des espaces (p. ex., 1 2 3 4).: 5 6   
 →8 9

Entrez quatre chiffres séparés par des espaces (p. ex., 1 2 3 4).: 7 8   
 →10 11

Vous avez saisi les vecteurs suivants:

[3.0, 4.0, 6.0, 7.0]

[5.0, 6.0, 8.0, 9.0]

[7.0, 8.0, 10.0, 11.0]

μ(x) fonction pour vecteur ,[3.0, 4.0, 6.0, 7.0]:

Si {3.0} <= x <= {4.0} :

---

$$\mu(x) = x - 3.0 / (1.0)$$

Si {4.0} < x <= {6.0} :

$$\mu(x) = 1$$

Si {6.0} <= x <= {7.0} :

$$\mu(x) = (7.0 - x) / (1.0)$$

Sinon  $\mu(x)=0$

$\mu_i(x)$  fonction pour vecteur ,[5.0, 6.0, 8.0, 9.0]:

Si {5.0} <= x <= {6.0} :

$$\mu(x) = x - 5.0 / (1.0)$$

Si {6.0} < x <= {8.0} :

$$\mu(x) = 1$$

Si {8.0} <= x <= {9.0} :

$$\mu(x) = (9.0 - x) / (1.0)$$

Sinon  $\mu(x)=0$

$\mu_i(x)$  fonction pour vecteur ,[7.0, 8.0, 10.0, 11.0]:

Si {7.0} <= x <= {8.0} :

$$\mu(x) = x - 7.0 / (1.0)$$

Si {8.0} < x <= {10.0} :

$$\mu(x) = 1$$

Si {10.0} <= x <= {11.0} :

$$\mu(x) = (11.0 - x) / (1.0)$$

Sinon  $\mu(x)=0$

$\mu_s(x)$  fonction pour vecteur ,[20.0, 21.0, 23.0, 24.0]:

Si {20.0} <= x <= {21.0} :

$$\mu_s(x) = x - 20.0 / (1.0)$$

Si {21.0} < x <= {23.0} :

$$\mu_s(x) = 1$$

Si {23.0} <= x <= {24.0} :

$$\mu_s(x) = (24.0 - x) / (1.0)$$

Sinon  $\mu(x)=0$

$$(\text{als.aus}) = 20.0 + \text{alfa} * 1.0, 24.0 - \text{alfa} * 1.0$$

$\mu$  pour ce, [20.0, 21.0, 23.0, 24.0]:

22.0

---

$(al.au) = 3.0 + \text{alfa} * 1.0, 7.0 - \text{alfa} * 1.0$   
 $(al.au) = 5.0 + \text{alfa} * 1.0, 9.0 - \text{alfa} * 1.0$   
 $(al.au) = 7.0 + \text{alfa} * 1.0, 11.0 - \text{alfa} * 1.0$

$\lambda$  de  $, [3.0, 4.0, 6.0, 7.0]$ :  
5.0

$\lambda$  de  $, [5.0, 6.0, 8.0, 9.0]$ :  
7.0

$\lambda$  de  $, [7.0, 8.0, 10.0, 11.0]$ :  
9.0

$\rho = [0.22727272727272727, 0.3181818181818182, 0.4090909090909091]$

$\rho$  total = 0.9545454545454546

$\lambda$  total = 21.0

$\sigma = [0, 0.22727272727272727, 0.5454545454545454, 0.9545454545454546]$

$wq\ 1 = 0.013368983957219256$

$wq\ 2 = 0.08395721925133691$

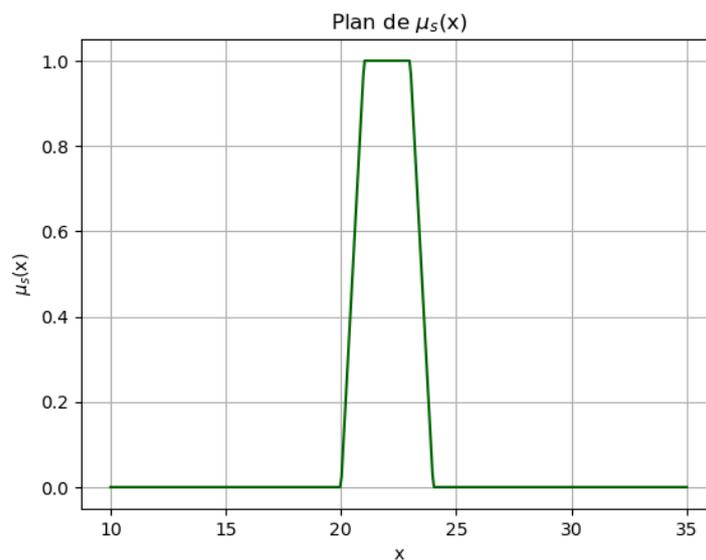
$wq\ 3 = 2.1545454545454565$

$lq\ 1$   
0.06684491978609627

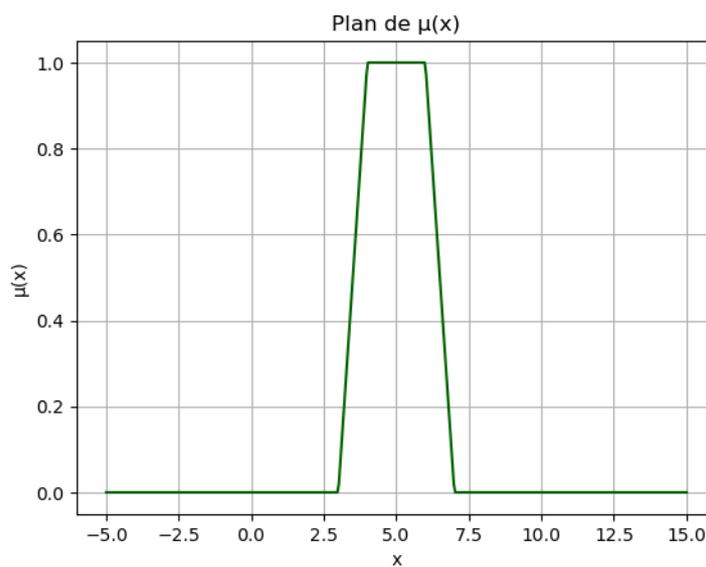
$lq\ 2$   
0.5877005347593584

$lq\ 3$   
19.39090909090911

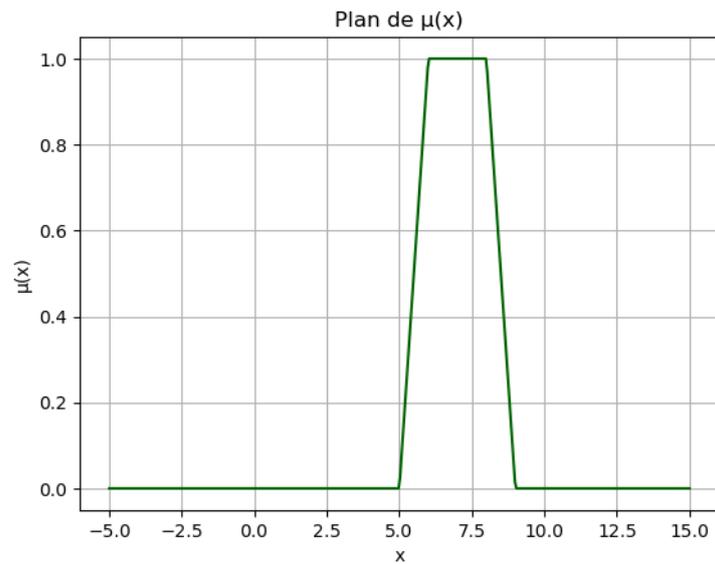
$\mu(x)$  fonction pour vecteur  $, [20.0, 21.0, 23.0, 24.0]$ :



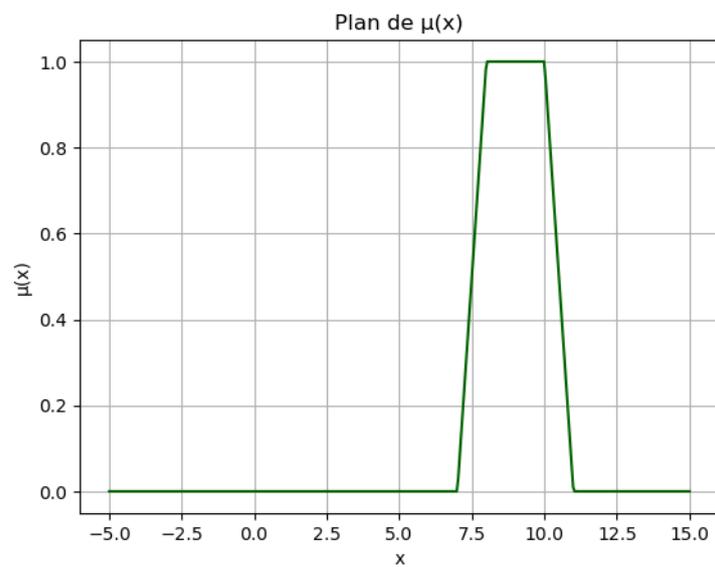
$\mu(x)$  fonction pour vecteur , [3.0, 4.0, 6.0, 7.0]:



$\mu(x)$  fonction pour vecteur , [5.0, 6.0, 8.0, 9.0]:



$\mu(x)$  fonction pour vecteur ,[7.0, 8.0, 10.0, 11.0]:



## TRIANGULAIRE

```
[1]: # -*- coding: utf-8 -*-
      """
      Created on Sun Jun  2 20:01:48 2024

      @author: mehno
      """
```

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def get_vector():
    """Invite l'utilisateur à saisir 3 nombres séparés par des espaces
    →et les renvoie sous forme de liste."""
    while True:
        try:
            # Get user input for the vector
            vector_str = input("Entrer 3 nombres separer par un espace (e.x.,
            →1 2 3): ")
            vector = [float(num) for num in vector_str.split()] # Convert to
            →float list
            if len(vector) == 3:
                return vector
            else:
                print("Entrée non valide. Veuillez entrer exactement 3 chiffres
            →séparés par des espaces.")
        except ValueError:
            print("Entrée non valide. Veuillez entrer des nombres séparés par
            →des espaces.")

# write s
print("écrire le vecteur S")
vector_a = get_vector()
print("vous avez saisi:", vector_a)

```

```

def get_n_vectors(n):
    """
    Cette fonction invite l'utilisateur à entrer n vecteurs, chacun avec
    →3 nombres.

    Args :
        n : Le nombre de vecteurs à obtenir.

    Retours :
        Une liste de listes, où chaque liste intérieure représente un
    →vecteur avec 3 nombres.
    """
    vectors = []
    for _ in range(n):
        while True:
            try:
                # Get user input for a single vector
                vector_str = input("Entrez trois chiffres séparés par des
    →espaces (p. ex., 1 2 3).: ")
                vector = [float(num) for num in vector_str.split()] # Convert
    →to float list
                if len(vector) == 3:
                    break
            else:
                print("Entrée non valide. Veuillez entrer exactement 3
    →chiffres séparés par des espaces.")
            except ValueError:
                print("Entrée non valide. Veuillez entrer des nombres séparés
    →par des espaces.")
                vectors.append(vector)
    return vectors

```

```

# demand n
n = int(input("Entrez le nombre de vecteurs (n): "))
all_vectors = get_n_vectors(n)
# input vectors
print("Vous avez saisi les vecteurs suivants:")
for vector in all_vectors:
    print(vector)

# Define mu(x) conditional statements based on vector ranges
for vec in all_vectors:
    print(f"μ(x) fonction pour vecteur ,{vec}:")
    print(" Si ",{vec[0]} , " <= x <= ",{vec[1]},":")
    print(f" μ(x) = x - {vec[0]} / ({vec[1]} - {vec[0]})")
    print(" Si x =",{vec[1]} , ":") # Using f-strings for clarity
    print(" μ(x) = 1")
    print(" Si ",{vec[1]}," <= x <=" ,{vec[2]},":")
    print(f" μ(x) = ({vec[2]} - x )/ ({vec[2]} - {vec[1]})")
    print("Sinon μ(x)=0")

# display function mu _s
print(f" μs(x) fonction pour vecteur ,{vector_a}:")
print(" Si ",{vector_a[0]} , " <= x <= ",{vector_a[1]},":")
print(f" μs(x) = x - {vector_a[0]} / ({vector_a[1]} - {vector_a[0]})")
print(f" Si x =",{vector_a[1]} , ":") # Using f-strings for clarity
print(" μs(x) = 1")
print(f" Si ",{vector_a[1]}," <= x <=" ,{vector_a[2]},":")
print(f" μs(x) = ({vector_a[2]} - x )/ ({vector_a[2]} - {vector_a[1]})")
print("Sinon μ(x)=0")
print(f" (als.aus)= {vector_a[0]} + alfa * {vector_a[1]} - vector_a[0]} , {vector_a[2]} + alfa * {vector_a[1]} - vector_a[2]}")
#calcul valour mu
print(f"μ pour ce ,{vector_a}:")

```

```

val_μ=(2*vector_a[1]+vector_a[0]+vector_a[2])/4
print(val_μ)

#display the lower and upper band
for vec in all_vectors:

    print(f" (al. au)= {vec[0]} + alfa * {vec[1] - vec[0]}, {vec[2]} +
    ↳alfa * {vec[1] - vec[2]}")

# lamda is vector of lamda and lamd is valor

lamda=[]
for vec in all_vectors:
    print(f"λ de ,{vec}:")
    lamd=(2*vec[1]+vec[0]+vec[2])/4
    lamda.append(lamd)
    print(lamd)
#calcul ro vector
ro=[]
for val in lamda:
    ro.append(val/val_μ)
print("ρ=",ro)
#ro total
ro_total=sum(ro)

```

```

print("ρ total=",ro_total)

#lamda total
lamda_total=sum(lamda)
print("λ total=",lamda_total)

segma = []
segma.append(0) # Append 0 to the list
for val in ro:
    segma.append(segma[-1] + val)
print("σ=",segma)

wq_vec=[]

for j in range(1, n+1):
    wq = ((1/val_μ) / ((1 - segma[j-1]) * (1 - segma[j]))) - 1/val_μ
    wq_vec.append(wq)

for i in range(n):
    print("wq",i+1,"=",wq_vec[i])

for i in range(n):
    print("lq",i+1)
    lq=wq_vec[i]*lamda[i]
    print(lq)

def mu(x, a, b, c):
    if a <= x <= b:

```

```

    return (x - a) / (b - a)
elif x == b:
    return 1
elif b <= x <= c:
    return (c - x) / (c - b)
else:
    return 0

print(f"μ(x) fonction pour vecteur ,{vector_a}:")

x = np.linspace(10, 35, 400) # generate x values from -1 to 4

y = [mu(xi, vector_a[0], vector_a[1], vector_a[2]) for xi in x] #
→ calculate y values

plt.plot(x, y, color='#006400') # plot the function
plt.xlabel('x') # label the x-axis
plt.ylabel('μ_s(x)') # label the y-axis
plt.title('Plan de μ_s(x)') # title of the plot
plt.grid(True) # add a grid to the plot
plt.show() # display the plot
for vec in all_vectors:
    print(f"μ(x) fonction pour vecteur ,{vec}:")

    x = np.linspace(-5, 15, 400) # generate x values from -1 to 4

    y = [mu(xi, vec[0], vec[1], vec[2]) for xi in x] # calculate y
→ values

    plt.plot(x, y, color='#006400') # plot the function
    plt.xlabel('x') # label the x-axis
    plt.ylabel('μ(x)') # label the y-axis
    plt.title('Plan de μ(x)') # title of the plot

```

---

```
plt.grid(True) # add a grid to the plot
plt.show() # display the plot
```

écrire le vecteur S

Entrer 3 nombres separer par un espace (e.x., 1 2 3): 20 23 25

vous avez saisi: [20.0, 23.0, 25.0]

Entrez le nombre de vecteurs (n): 3

Entrez trois chiffres séparés par des espaces (p. ex., 1 2 3).: 3 6 8

Entrez trois chiffres séparés par des espaces (p. ex., 1 2 3).: 4 7 9

Entrez trois chiffres séparés par des espaces (p. ex., 1 2 3).: 5 8 10

Vous avez saisi les vecteurs suivants:

[3.0, 6.0, 8.0]

[4.0, 7.0, 9.0]

[5.0, 8.0, 10.0]

$\mu(x)$  fonction pour vecteur ,[3.0, 6.0, 8.0]:

Si {3.0} <= x <= {6.0} :

$$\mu(x) = x - 3.0 / (3.0)$$

Si x = {6.0} :

$$\mu(x) = 1$$

Si {6.0} <= x <= {8.0} :

$$\mu(x) = (8.0 - x) / (2.0)$$

Sinon  $\mu(x)=0$

$\mu(x)$  fonction pour vecteur ,[4.0, 7.0, 9.0]:

Si {4.0} <= x <= {7.0} :

$$\mu(x) = x - 4.0 / (3.0)$$

Si x = {7.0} :

$$\mu(x) = 1$$

Si {7.0} <= x <= {9.0} :

$$\mu(x) = (9.0 - x) / (2.0)$$

Sinon  $\mu(x)=0$

$\mu(x)$  fonction pour vecteur ,[5.0, 8.0, 10.0]:

Si {5.0} <= x <= {8.0} :

---

$$\mu(x) = x - 5.0 / (3.0)$$

Si  $x = \{8.0\}$  :

$$\mu(x) = 1$$

Si  $\{8.0\} \leq x \leq \{10.0\}$  :

$$\mu(x) = (10.0 - x) / (2.0)$$

Sinon  $\mu(x)=0$

$\mu_S(x)$  fonction pour vecteur ,[20.0, 23.0, 25.0]:

Si  $\{20.0\} \leq x \leq \{23.0\}$  :

$$\mu_S(x) = x - 20.0 / (3.0)$$

Si  $x = \{23.0\}$  :

$$\mu_S(x) = 1$$

Si  $\{23.0\} \leq x \leq \{25.0\}$  :

$$\mu_S(x) = (25.0 - x) / (2.0)$$

Sinon  $\mu(x)=0$

$$(\text{als. aus}) = 20.0 + \text{alfa} * 3.0, 25.0 + \text{alfa} * -2.0$$

$\mu$  pour ce ,[20.0, 23.0, 25.0]:

22.75

$$(\text{al. au}) = 3.0 + \text{alfa} * 3.0, 8.0 + \text{alfa} * -2.0$$

$$(\text{al. au}) = 4.0 + \text{alfa} * 3.0, 9.0 + \text{alfa} * -2.0$$

$$(\text{al. au}) = 5.0 + \text{alfa} * 3.0, 10.0 + \text{alfa} * -2.0$$

$\lambda$  de ,[3.0, 6.0, 8.0]:

5.75

$\lambda$  de ,[4.0, 7.0, 9.0]:

6.75

$\lambda$  de ,[5.0, 8.0, 10.0]:

7.75

$$\rho = [0.25274725274725274, 0.2967032967032967, 0.34065934065934067]$$

$$\rho \text{ total} = 0.8901098901098902$$

$$\lambda \text{ total} = 20.25$$

$$\sigma = [0, 0.25274725274725274, 0.5494505494505495, 0.8901098901098902]$$

$$wq \ 1 = 0.014867485455720753$$

$$wq \ 2 = 0.0866034969334826$$

$$wq \ 3 = 0.8438488340927373$$

---

lq 1

0.08548804137039433

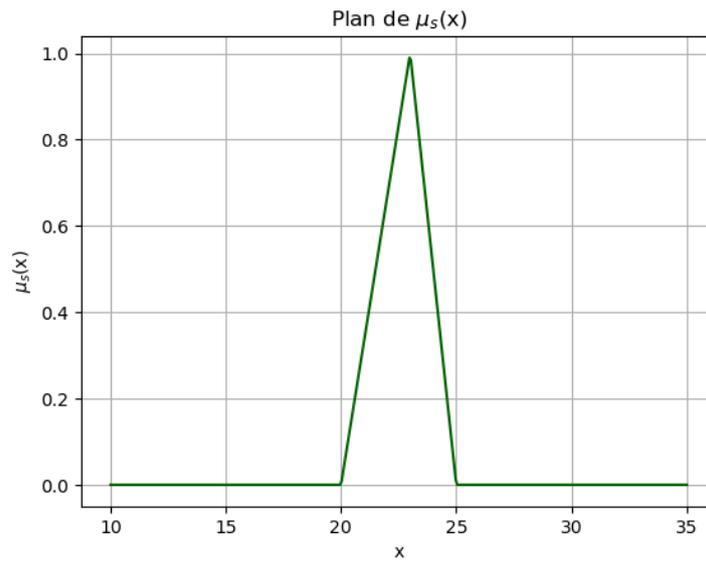
lq 2

0.5845736043010076

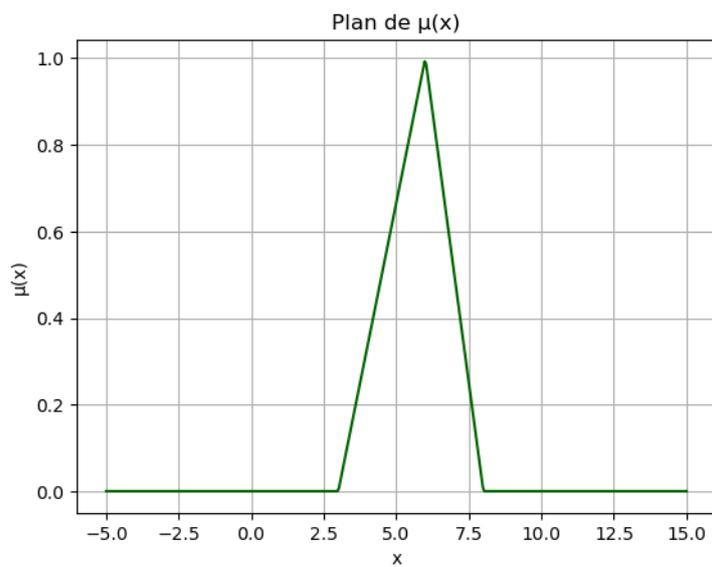
lq 3

6.539828464218714

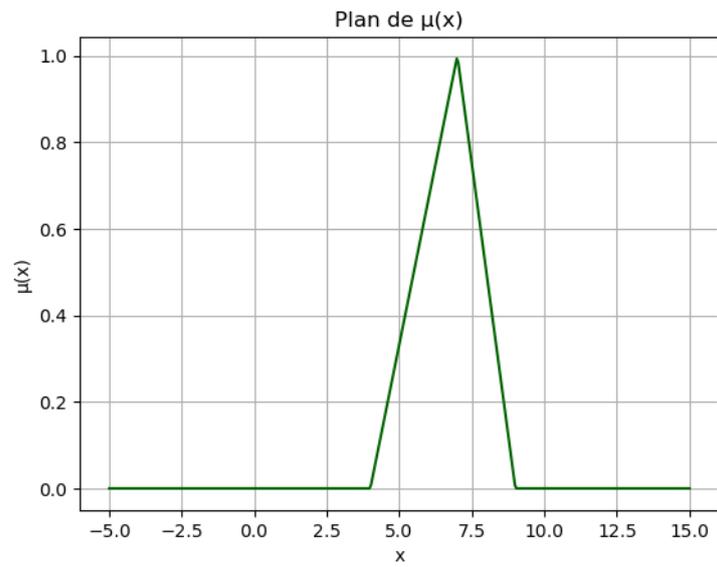
$\mu(x)$  fonction pour vecteur ,[20.0, 23.0, 25.0]:



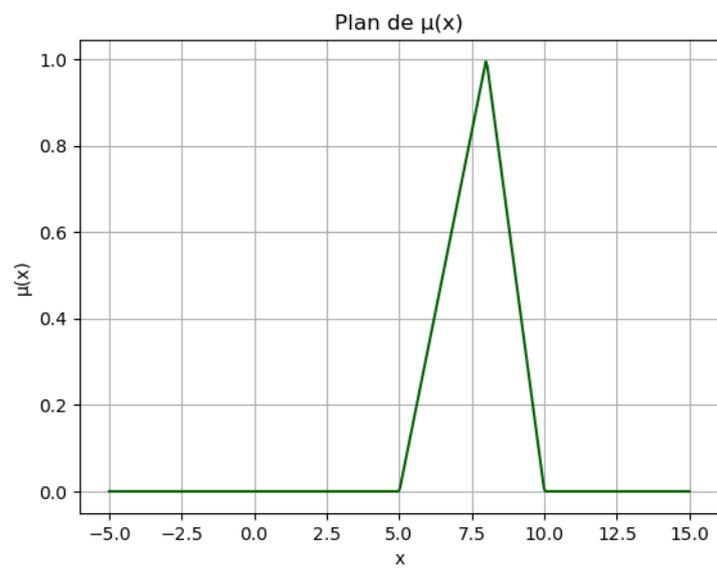
$\mu(x)$  fonction pour vecteur ,[3.0, 6.0, 8.0]:



$\mu(x)$  fonction pour vecteur ,[4.0, 7.0, 9.0]:



$\mu(x)$  fonction pour vecteur , [5.0, 8.0, 10.0]:



# CONCLUSION GÉNÉRALE

En conclusion, cette étude a mis en lumière l'importance cruciale des files d'attente floues dans un large éventail d'applications, allant des systèmes de transport aux réseaux informatiques en passant par les services de santé. En utilisant des techniques de modélisation des files d'attente floues, les chercheurs et les professionnels peuvent obtenir des résultats plus précis et réalistes pour les systèmes d'attente complexes.

Grâce à l'application de la technique de classification robuste sur une file d'attente floue avec priorité, notre recherche a permis d'apporter des solutions novatrices et efficaces pour la modélisation, l'analyse et l'optimisation de ce système, en tenant compte de la complexité et de l'incertitude inhérentes à ces environnements. Les résultats obtenus ont démontré la pertinence et la performance de cette approche pour transformer les files d'attente floues en files d'attente classiques (la défuzzification), offrant ainsi des perspectives prometteuses pour une gestion plus efficace des files d'attente floues dans divers contextes.

Enfin, ce mémoire constitue une ressource précieuse pour les chercheurs, les praticiens et les décideurs intéressés par les files d'attente floues et la classification robuste. En consolidant les connaissances existantes, en proposant de nouvelles méthodes et en ouvrant des pistes de recherche futures, nous espérons avoir un impact significatif sur le développement et l'application de ces concepts dans un large éventail de domaines. Toutefois, il reste encore des défis à relever, notamment en matière de validation empirique et d'implémentation pratique. En poursuivant les recherches dans ce domaine et en explorant de nouvelles avenues, nous pourrions continuer à faire progresser notre compréhension des files d'attente floues et à développer des outils encore plus puissants pour répondre aux besoins croissants de la société moderne.

# Bibliographie

- [1] Bruno Baynat. *La théorie des files d'attente : des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit*. Hermès, 2000.
- [2] Benjamin Bedregal, Claudilene Gomes da Costa, Eduardo Palmeira, and Edmundo Mansilla. Interval probability density functions constructed from a generalization of the moore and yang integral. *arXiv preprint arXiv :2107.01690*, 2021.
- [3] Richard E Bellman and Lotfi Asker Zadeh. Decision-making in a fuzzy environment. *Management science*, 17(4) :B–141, 1970.
- [4] James J Buckley. *Fuzzy probabilities and fuzzy sets for web planning*, volume 135. Springer, 2012.
- [5] James J Buckley and Esfandiar Eslami. *An introduction to fuzzy logic and fuzzy sets*, volume 13. Springer Science & Business Media, 2002.
- [6] James J Buckley, Esfandiar Eslami, and Thomas Feuring. *Fuzzy mathematics in economics and engineering*, volume 91. Physica, 2013.
- [7] Stefan Chanas and Dorota Kuchta. Center of gravity method in multiple criteria decision making. *Control and Cybernetics*, 34(1) :131–151, 2005.
- [8] Laécio Carvalho de Barros. *Sobre sistemas dinâmicos fuzzy : Teoria e Aplicações*. PhD thesis, [sn], 1997.
- [9] Laécio Carvalho de Barros, Rodney Carlos Bassanezi, Weldon Alexander Lodwick, Laécio Carvalho de Barros, Rodney Carlos Bassanezi, and Weldon Alexander Lodwick. The extension principle of zadeh and fuzzy numbers. pages 23–41, 2017.
- [10] Didier Dubois and Henri Prade. A defuzzification procedure for fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 12(2) :167–180, 1984.
- [11] Didier J Dubois. *Fuzzy sets and systems : theory and applications*, volume 144. Academic press, 1980.
- [12] C Duraisamy and B Usha. Another approach to solution of fuzzy differential equations by modified euler’s method. In *2010 International Conference on Communication and Computational Intelligence (INCOCCI)*, pages 52–56. IEEE, 2010.

- 
- [13] Agner Krarup Erlang. The theory of probabilities and telephone conversations. *Nyt. Tidsskr. Mat. Ser. B*, 20 :33–39, 1909.
- [14] C Fotso and LP Fotso. Phénomène d’attente dans un système bancaire ; approximations des mesures des performances des files d’attente. *Université de Yaoundé I*, 2006.
- [15] Tomas Gal. Postoptimal analyses, parametric programming, and related topics. (*No Title*), 1995.
- [16] Roy Goetschel Jr and William Voxman. Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy sets and systems*, 18(1) :31–43, 1986.
- [17] Joseph A Goguen. L-fuzzy sets. *Journal of mathematical analysis and applications*, 18(1) :145–174, 1967.
- [18] Joseph A Goguen. The logic of inexact concepts. *Synthese*, 19(3/4) :325–373, 1969.
- [19] Donald Gross. *Fundamentals of queueing theory*. John wiley & sons, 2008.
- [20] Hami Hagra. Type-2 flcs : A new generation of fuzzy controllers. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2(1) :30–43, 2007.
- [21] Michael Hanss. *Applied fuzzy arithmetic*. Springer, 2005.
- [22] Masuo Hukuhara. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcialaj Ekvacioj*, 10(3) :205–223, 1967.
- [23] Jean-David Kampembe. *Sur la Prise en Compte de l’Imprécision et de l’Incertitude en Programmation Mathématique Multiobjectif*. Thèse de doctorat en sciences mathématiques, Université de Kinshasa, R.D. Congo, 201.
- [24] JP Mukeba Kanyinda. Analysis of retrial fuzzy queue with single server subject to breakdowns and repairs by flexible alpha-cuts method. *Journal of Pure and Applied Mathematics : Advances and Applications*, 22(1) :41–58, 2020.
- [25] JP Mukeba Kanyinda, R Mabela Makengo Matendo, and B Ulungu Ekunda Lukata. computing fuzzy queuing performance measures by lr method. *Journal of fuzzy set valued analysis*, 1 :57–67, 2015.
- [26] Arnold Kaufmann. *Introduction to the theory of fuzzy subsets*. Academic press, 1975.
- [27] Arnold Kaufmann. Éléments théoriques de base. (*No Title*), 1977.
- [28] Ralph L. Keeney and Howard Raiffa. *Decisions with Multiple Objectives : Preferences and Value Tradeoffs*. Wiley, 1976.
- [29] George Klir and Bo Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic*, volume 4. Prentice hall New Jersey, 1995.
- [30] Huibert Kwakernaak. Fuzzy random variables—i. definitions and theorems. *Information sciences*, 15(1) :1–29, 1978.
- [31] R-J Li and ES Lee. Analysis of fuzzy queues. *Computers & Mathematics with Applications*, 17(7) :1143–1147, 1989.
-

- 
- [32] Ebrahim H Mamdani and Sedrak Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International journal of man-machine studies*, 7(1) :1–13, 1975.
- [33] E.H. Mamdani and S. Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7(1) :1–13, 1975.
- [34] Ricardo A Maronna, R Douglas Martin, Victor J Yohai, and Matías Salibián-Barrera. *Robust statistics : theory and methods (with R)*. John Wiley & Sons, 2019.
- [35] JP Mukeba. Analyse des paramètres de performances de réseaux de files d’attente à forme produit, 2012.
- [36] JP Mukeba, R Mabela, and B Ulungu. Sur la multiplication des nombres flous de type lr. *Annals of faculty of sciences, University of Kinshasa*, 1 :33–40, 2014.
- [37] DS Negi and ES Lee. Analysis and simulation of fuzzy queues. *Fuzzy sets and systems*, 46(3) :321–330, 1992.
- [38] Constantin Virgil Negoită and Dan A Ralescu. *Applications of fuzzy sets to systems analysis*. Springer, 1975.
- [39] Witold Pedrycz and Fernando Gomide. *An introduction to fuzzy sets : analysis and design*. MIT press, 1998.
- [40] Henri M Prade. An outline of fuzzy or possibilistic models for queuing systems. *Fuzzy Sets : Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems*, pages 147–153, 1980.
- [41] W Ritha and B Sreelekha Menon. Fuzzy n policy queues with infinite capacity. 2011.
- [42] Heriberto Román-Flores, Laécio C Barros, and Rodney C Bassanezi. A note on zadeh’s extensions. *Fuzzy sets and systems*, 117(3) :327–331, 2001.
- [43] Sheldon M Ross. *Introduction to probability models*. Academic press, 2014.
- [44] Timothy J. Ross. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. McGraw-Hill, 1995.
- [45] Timothy J. Ross. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [46] Peter J Rousseeuw and Annick M Leroy. *Robust regression and outlier detection*. John wiley & sons, 2005.
- [47] IS Shaw and MG Simões. Controle e modelagem fuzzy, editora edgard blucher ltda, 1<sup>a</sup>, 2001.
- [48] Luciano Stefanini. A generalization of hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. *Fuzzy sets and systems*, 161(11) :1564–1584, 2010.
- [49] Jana Talašová and Ondřej Pavlačka. Fuzzy probability spaces and their applications in decision making. *Austrian Journal of Statistics*, 35(2&3) :347–356, 2006.
- [50] Ronald R Yager. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. *Information sciences*, 24(2) :143–161, 1981.
- [51] Miin-Shen Yang and Man-Chun Liu. On possibility analysis of fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems*, 94(2) :171–183, 1998.
-

- 
- [52] Lotfi A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1) :3–28, 1978.
- [53] Lotfi Asker Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3) :338–353, 1965.
- [54] Lotfi Asker Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. *Information sciences*, 8(3) :199–249, 1975.
- [55] Lotfi Asker Zadeh. Pruf—a meaning representation language for natural languages. *International Journal of man-machine studies*, 10(4) :395–460, 1978.
- [56] Hans-Jürgen Zimmermann. *Fuzzy set theory—and its applications*. Springer Science & Business Media, 2011.