

SUP'AERO

J.-F. IMBERT

SUP'AERO

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE

J.-F. IMBERT

**ANALYSE des
STRUCTURES par
ELEMENTS FINIS**

TROISIEME EDITION

GEPADUES-EDITIONS

TABLE DES MATIERES

| | |
|-----------------------------|----|
| Notations principales | 19 |
|-----------------------------|----|

CHAPITRE I

INTRODUCTION AUX METHODES MODERNES DE CALCUL DES STRUCTURES

| | |
|---|----|
| I.1. HISTORIQUE | 24 |
| I.2. MILIEUX CONTINUS ET STRUCTURES DISCRETES : LE CONCEPT D'ELEMENT FINI | 26 |
| I.3. FORMULATIONS MATRICIELLES : LES NIVEAUX ELEMENTAIRE ET GLOBAL .. | 29 |
| I.4. CLASSIFICATION DES TRAITEMENTS..... | 31 |
| I.4.1. Les problèmes linéaires | 33 |
| I.4.2. Les problèmes non-linéaires | 34 |
| I.5. CODES GENERAUX | 35 |
| I.6. APPLICATIONS SPATIALES | 37 |
| REFERENCES | 41 |

CHAPITRE II

THEOREMES DE L'ENERGIE

| | |
|--|----|
| II.1. GENERALITES | 43 |
| II.1.1. Notations | 43 |
| II.1.2. Rappels des équations de la mécanique des solides | 44 |
| II.1.3. Définitions | 48 |
| II.2. APPROCHE CINEMATIQUE (DEPLACEMENTS) | 50 |
| II.2.1. Principe des travaux virtuels | 50 |
| II.2.2. Théorème de l'énergie potentielle totale | 52 |
| II.2.3. Application : poutre en flexion | 55 |
| II.3. APPROCHE EQUILIBRE (CONTRAINTES) | 57 |
| II.3.1. Principe des travaux virtuels complémentaires | 57 |
| II.3.2. Théorème de l'énergie potentielle complémentaire | 59 |
| II.4. ENERGIE DE DEFORMATION | 60 |
| II.4.1. Potentiels de déformation | 60 |
| II.4.2. Cas des matériaux élastiques à comportement linéaire ... | 61 |
| II.4.3. Exemples | 62 |

| | |
|--|----|
| II.5. CONTRAINTES ET DEFORMATIONS INITIALES - THERMOELASTICITE | 64 |
| II.5.1. Energie de déformation | 64 |
| II.5.2. Remarque sur le théorème de l'énergie potentielle totale. | 65 |
| II.6. SYNTHESE DES PRINCIPES VARIATIONNELS | 66 |
| II.6.1. Principe variationnel généralisé | 66 |
| II.6.2. Principe de Reissner | 68 |
| II.6.3. Dualité | 69 |
| II.6.4. Synthèse | 70 |
| II.6.5. Application : poutre en flexion | 72 |
| REFERENCES | 73 |

CHAPITRE III

METHODES MATRICIELLES

| | |
|--|-----|
| III.1. FORMULATION MATRICIELLE DE LA MECANIQUE DES STRUCTURES | 75 |
| III.1.1. Conventions et notations | 75 |
| III.1.2. Equations de base de la mécanique des structures | 77 |
| III.1.3. Exemples | 78 |
| III.1.4. Récapitulation des théorèmes de l'énergie | 83 |
| III.2. PROPRIETES DES STRUCTURES DISCRETES | 84 |
| III.2.1. Notation de structure discrète | 84 |
| III.2.2. Théorèmes de Castigliano | 85 |
| III.2.3. Matrices de rigidité et de flexibilité | 87 |
| III.2.4. Théorème de Maxwell-Betti | 88 |
| III.2.5. Applications | 89 |
| III.2.6. Propriétés des matrices de rigidité | 92 |
| III.2.7. Relation entre les matrices de rigidité de la struc- ture libre et de la structure isostatique associée .. | 94 |
| III.2.8. Matrice de rigidité d'un élément de poutre | 98 |
| III.3. METHODE DES FORCES | 100 |
| III.3.1. Définitions | 100 |
| III.3.2. Notations | 103 |
| III.3.3. Principe | 103 |
| III.3.4. Application à l'analyse d'un treillis | 105 |
| III.4. METHODE DES DEPLACEMENTS | 109 |
| III.4.1. Principe | 109 |
| III.4.2. Application à l'analyse d'un treillis | 113 |
| III.5. CONCLUSION | 117 |
| REFERENCES | 119 |

CHAPITRE IV

FONDEMENTS DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

| | |
|--|-----|
| IV.1. INTRODUCTION | 121 |
| IV.2. RAPPELS SUR LES METHODES D'APPROXIMATION | 121 |
| IV.2.1. Notions générales | 121 |
| IV.2.2. Méthodes d'approximation universelles | 122 |
| IV.2.3. Méthodes variationnelles : Méthode de Ritz | 125 |
| IV.3. LE CONCEPT D'ELEMENT FINI | 133 |
| IV.3.1. Différentes formulations | 133 |
| IV.3.2. Le modèle déplacement | 135 |
| IV.3.3. Application : triangle à champ de déplacement linéaire | 139 |
| IV.3.4. Autres modèles | 144 |
| IV.4. PROPRIETES DES ELEMENTS DE TYPE DEPLACEMENT | 147 |
| IV.4.1. Complétude | 147 |
| IV.4.2. Compatibilité | 149 |
| IV.4.3. Convergence | 151 |
| IV.4.4. Invariance géométrique | 152 |
| REFERENCES | 154 |

CHAPITRE V

TECHNIQUES DE CALCUL AU NIVEAU ELEMENTAIRE

| | |
|--|-----|
| V.1. INTRODUCTION | 155 |
| V.2. MATRICES D'INTERPOLATION | 155 |
| V.2.1. Fonctions d'interpolation | 155 |
| V.2.2. Séries polynomiales | 156 |
| V.2.3. Obtention directe des fonctions d'interpolation | 158 |
| V.3. COORDONNEES INTRINSEQUES | 163 |
| V.3.1. Coordonnées intrinsèques pour les quadrilatères | 163 |
| V.3.2. Coordonnées intrinsèques pour les triangles | 164 |
| V.3.3. Fonctions d'interpolation en coordonnées intrinsèques .. | 166 |
| V.4. ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES | 176 |
| V.4.1. Principe et propriétés | 176 |
| V.4.2. Calcul des éléments isoparamétriques | 178 |
| V.5. INTEGRATION NUMERIQUE | 181 |
| V.5.1. Différentes méthodes : cas unidimensionnel | 181 |
| V.5.2. Intégration numérique pour les problèmes bidimensionnels .. | 183 |
| V.5.3. Choix de l'ordre d'intégration | 185 |

| | |
|---|-----|
| V.6. TRANSFORMATION DE COORDONNEES | 187 |
| V.6.1. Principe | 188 |
| V.6.2. Cas général de la poutre | 189 |
| V.7. TECHNIQUES PARTICULIERES | 191 |
| V.7.1. Condensation | 191 |
| V.7.2. Modes internes | 193 |
| V.7.3. Intégration réduite, intégration sélective | 194 |
| V.7.4. Modes incompatibles | 194 |
| V.8. CALCUL DES CONTRAINTES | 198 |
| REFERENCES | 200 |

CHAPITRE VI

ELEMENTS POUR LES PROBLEMES D'ELASTICITE

| | |
|--|-----|
| VI.1. INTRODUCTION | 201 |
| VI.2. ELASTICITE PLANE | 201 |
| VI.3. PROBLEMES AXISYMETRIQUES | 204 |
| VI.3.1. Equations de base | 204 |
| VI.3.2. Eléments axisymétriques usuels | 205 |
| VI.4. ELASTICITE A 3 DIMENSIONS | 210 |
| VI.4.1. Tétraèdres | 210 |
| VI.4.2. Hexaèdres | 213 |
| REFERENCES | 217 |

CHAPITRE VII

PLAQUES ET COQUES

| | |
|---|-----|
| VII.1. INTRODUCTION | 219 |
| VII.2. THEORIES DES PLAQUES EN FLEXION | 219 |
| VII.2.1. Hypothèses fondamentales | 219 |
| VII.2.2. Définitions et notations générales | 221 |
| VII.2.3. Relations cinématiques | 223 |
| VII.2.4. Equations d'équilibre et conditions aux limites ... | 225 |
| VII.2.5. Energie de déformation, équations constitutives ... | 226 |
| VII.3. ELEMENTS DE PLAQUE EN FLEXION | 231 |
| VII.3.1. Classification | 231 |
| VII.3.2. Eléments basés sur les hypothèses de Kirchoff | 232 |
| VII.3.3. Eléments avec prise en compte du cisaillement transverse | 238 |
| VII.3.4. Techniques d'intégration réduite | 239 |
| VII.3.5. Eléments de volume dégénérés | 249 |
| VII.3.6. Comparaison d'éléments | 253 |

| | |
|---|-----|
| VII.4. COQUES | 256 |
| VII.4.1. Coques axisymétriques | 256 |
| VII.4.2. Coques générales | 259 |
| VII.4.3. Modélisation des coques par des éléments de plaque plane | 260 |
| VII.4.4. Conclusion | 267 |
| REFERENCES | 269 |

CHAPITRE VIII

TECHNIQUES DE CALCUL AU NIVEAU GLOBAL - METHODES DE RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

| | |
|--|-----|
| VIII.1. INTRODUCTION | 271 |
| VIII.2. ASSEMBLAGE | 271 |
| VIII.2.1. Approche énergétique | 271 |
| VIII.2.2. Règle pratique d'assemblage | 274 |
| VIII.3. PRISE EN COMPTE DE CONDITIONS SUR LES DEPLACEMENTS | 274 |
| VIII.3.1. Relations de dépendance linéaire | 274 |
| VIII.3.2. Déplacements imposés | 279 |
| VIII.4. METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES | 280 |
| VIII.4.1. Classification des méthodes de résolution | 280 |
| VIII.4.2. Méthode d'élimination de Gauss pour matrices symétriques | 282 |
| VIII.4.3. Méthode de factorisation de Cholesky | 287 |
| VIII.4.4. Signification physique de l'élimination de Gauss .. | 289 |
| VIII.4.5. Analyse des erreurs | 291 |
| VIII.5. MISE EN OEUVRE PRATIQUE DES METHODES DE RESOLUTION | 295 |
| VIII.5.1. Méthodes de manipulation des grandes matrices | 295 |
| VIII.5.2. Méthodes de résolution pour matrices bandes | 296 |
| VIII.5.3. Améliorations de la mémorisation bande | 300 |
| VIII.5.4. Schéma hypermatriciel - Résolution par blocs | 301 |
| VIII.5.5. Méthode frontale | 302 |
| VIII.6. METHODE DES SOUS-STRUCTURES | 306 |
| VIII.6.1. Généralités | 306 |
| VIII.6.2. Description de la méthode | 308 |
| VIII.6.3. Sous-structures et élimination de Gauss par blocs .. | 313 |
| REFERENCES | 317 |

CHAPITRE IX

LES ELEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE

| | |
|--------------------------|-----|
| IX.1. INTRODUCTION | 319 |
|--------------------------|-----|

| | | |
|---------|---|-----|
| IX.2. | RAPPEL DES NOTIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE DES STRUCTURES ... | 319 |
| IX.2.1. | Principe de Hamilton | 319 |
| IX.2.2. | Equations de Lagrange | 322 |
| IX.2.3. | Propriétés des systèmes discrets | 324 |
| IX.3. | PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE | 330 |
| IX.3.1. | Discrétisation spatiale | 330 |
| IX.3.2. | Formulation élémentaire | 331 |
| IX.3.3. | Formulation globale | 332 |
| IX.4. | MATRICES DE MASSE ELEMENTAIRES | 333 |
| IX.4.1. | Barre | 334 |
| IX.4.2. | Poutre en flexion | 334 |
| IX.4.3. | Membrane triangulaire | 336 |
| IX.5. | EXERCICES : VIBRATIONS PROPRES DE SYSTEMES DE POUTRES | 337 |
| IX.5.1. | Poutre encastrée en ses deux extrémités | 338 |
| IX.5.2. | Poutre libre-libre | 339 |
| IX.6. | EVALUATION NUMERIQUE SUR PROBLEMES-TEST | 341 |
| IX.6.1. | Poutre encastrée | 341 |
| IX.6.2. | Plaque carrée encastrée | 341 |
| IX.7. | REPRESENTATION DES MASSES : RECAPITULATION ET DISCUSSION | 345 |
| | REFERENCES | 349 |

CHAPITRE X

METHODES D'ANALYSE MODALE

| | | |
|--------|--|-----|
| X.1. | INTRODUCTION | 351 |
| X.2. | METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES | 352 |
| X.2.1. | Généralités, classification des méthodes | 352 |
| X.2.2. | Condensation de Guyan | 354 |
| X.2.3. | Passage à la forme classique du problème aux valeurs propres | 359 |
| X.2.4. | Suites de Sturm | 361 |
| X.2.5. | Méthode d'itération directe | 364 |
| X.2.6. | Méthode d'itération inverse | 371 |
| X.2.7. | Méthode d'itération sur sous-espace | 377 |
| X.2.8. | Récapitulation | 380 |
| X.3. | METHODE DES SOUS-STRUCTURES EN DYNAMIQUE | 384 |
| X.3.1. | Généralités | 384 |
| X.3.2. | Classification des méthodes de synthèse modale | 385 |
| X.3.3. | Méthode avec interfaces fixes | 388 |
| X.3.4. | Méthode de substitution modale | 395 |
| X.3.5. | Méthode de MacNeal | 398 |
| X.3.6. | Récapitulation | 401 |
| | REFERENCES | 403 |

CHAPITRE XI

ANALYSE DYNAMIQUE PAR SUPERPOSITION MODALE

| | |
|---|-----|
| XI.1. INTRODUCTION | 407 |
| XI.2. CLASSIFICATION DES METHODES D'ANALYSE DYNAMIQUE | 407 |
| XI.3. PRINCIPE DE LA METHODE DE SUPERPOSITION MODALE | 408 |
| XI.3.1. Prise en compte des amortissements | 408 |
| XI.3.2. Principe de la méthode | 411 |
| XI.3.3. Découplage des équations modales du mouvement | 412 |
| XI.3.4. Excitation par mouvement imposé à la base | 414 |
| XI.3.5. Résolution en régime harmonique | 418 |
| XI.3.6. Résolution en régime transitoire | 419 |
| XI.4. EFFETS DE TRONCATURE MODALE | 420 |
| XI.4.1. Flexibilités effectives et résiduelles | 420 |
| XI.4.2. Masses effectives et résiduelles | 426 |
| XI.4.3. Règles de sommation en dynamique des structures | 437 |
| XI.5. CONCLUSIONS | 438 |
| REFERENCES | 439 |

ANNEXE I

RAPPELS DE CALCUL DES VARIATIONS

| | |
|---|-----|
| I. FONCTIONNELLES | 441 |
| II. CONDITIONS D'EXTREMUM | 442 |
| II.1. Fonctionnelles à une fonction argument d'une variable | 442 |
| II.2. Fonctionnelles à plusieurs fonctions arguments d'une variable | 445 |
| II.3. Fonctionnelles dépendant de plusieurs variables | 446 |
| III. PROBLEMES AVEC CONDITIONS SUBSIDIAIRES | 449 |
| III.1. Conditions subsidiaires de type intégral | 449 |
| III.2. Conditions subsidiaires différentielles | 450 |
| REFERENCES | 452 |

ANNEXE II

RAPPELS DE CALCUL MATRICIEL

| | |
|---|-----|
| I. NOTIONS GENERALES | 455 |
| I.1. Notion de norme | 455 |
| I.1.1. Norme vectorielle | 455 |
| I.1.2. Norme matricielle induite par une norme vectorielle | 456 |
| I.1.3. Conditionnement des matrices | 456 |

| | |
|--|-----|
| I.2: Valeurs propres | 459 |
| I.2.1. Rayon spectral | 459 |
| I.2.2. Notion de matrice convergente | 459 |
| I.2.3. Théorèmes de Gershgorin | 460 |
| I.2.4. Propriétés de mini-max | 461 |
| II. METHODES DIRECTES DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES | 467 |
| II.1. Méthode d'élimination de Gauss | 467 |
| II.1.1. Elimination avec pivotement | 467 |
| II.1.2. Elimination sans pivotement | 469 |
| II.2. Méthode de Cholesky | 470 |
| REFERENCES | 473 |

EXERCICES

| | |
|-----------------|-----|
| ENONCES | 477 |
| SOLUTIONS | 489 |
| INDEX | 501 |