الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
UNIVERSITÉ DE BLIDA 1
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master en Mathématiques

Domaine : Mathématiques et informatique

Filiére : Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

Présenté par

TERMELLIL Assia

Sur le thème :

Étude de quelques problèmes aux limites non linéaires

Soutenue publiquement, le 02/07/2024 devant le jury composé de :

Mme. BOUTAOUS Fatiha	MCA	Univ. Blida1	Président
Mr. DILMI Mohamed	MCA	Univ. Blida1	Promoteur
Mr. BERKANE Djamel	MCA	Univ. Blida1	Co-promoteur
Mme. BOUDREBALA Zeyneb	MCB	Univ. Blida1	Examinateur

Année universitaire : 2023/2024

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui m'ont soutenue tout au long de la réalisation de ce mémoire de fin d'études.

Tout d'abord, je remercie mes parents pour leur amour, leur soutien inconditionnel et leurs sacrifices constants. Leur encouragement m'a donné la force et la motivation nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance à mes professeurs et encadrants, en particulier "monsieur **DILMI**", pour leurs conseils avisés, leur patience et leur expertise qui ont été d'une grande aide dans l'accomplissement de ce mémoire.

Un grand merci à mes amis et collègues pour leur soutien moral, leur aide précieuse et les moments de partage et de camaraderie qui ont rendu ce parcours plus agréable et enrichissant.

Enfin, je dédie ce travail à la mémoire de ma tante, de mon grand-père et de ma grand-mère, dont l'esprit bienveillant continue de m'inspirer chaque jour. Merci à tous du fond du cœur.

Dédicace

Ce travail est dédié :

- ♡ À celui qui a donné sans compter et de qui j'ai puisé ma force et ma fierté, à celle qui a fait du paradis un lieu sous ses pieds et qui a facilité mes épreuves par ses prières, à la grande dame qui a toujours souhaité voir ce jour de ses propres yeux, ma chère mère.

- ♡ À mon père qui m'a appris l'importance du travail acharné, de la persévérance et de l'honnêteté, À la mémoire de ma chère tante **Daouia**, ainsi qu'à mes grands-parents bien-aimés **Ali** et **Fatma**, dont l'amour et le soutien continuent de m'inspirer chaque jour. Bien que vous ne soyez plus parmi nous, vos esprits bienveillants et vos précieux conseils résonnent toujours dans mon cœur. Ce travail est dédié à vous, en hommage à tout ce que vous avez fait pour moi. Que vos âmes reposent en paix.

- ♡ À ma sœur merci pour votre soutien constant, votre humour contagieux et votre présence réconfortante. Vous êtes ma source de joie et de bonheur, et je suis fière de vous avoir dans ma vie. Je vous exprime ma reconnaissante pour votre présence et votre soutien qui ont marqué positivement ma vie.

الملخص

هذا العمل يتعلق بشكل أساسي بدراسة وجود وتفرد واستقرار حلول مسألتين حدوديتين غير خطيتين.

♣ الأولى هي مسألة حدودية زائدية شبه خطية التي تصف الاهتزازات الصغيرة في مجال محدود. نُظهر وجود وحدانية الحل الضعيف بالاعتماد على تقريبات غلاركين و نتائج التراص.

♣ الثانية هي نظام يتكون من معادلة زائدية مقترنة بمعادلة مكافئة. يظهر هذا النظام في المرونة الحرارية.

باستخدام تقنيات غلاركين ، نثبت أن النظام يقبل على الأقل حلا واحد. بعد ذلك، نُظهر أن الحلول مستقرة بشكل أسي.

الكلمات المفتاحية : الوجود والتفرد؛ معادلة زائدية؛ طريقة غلاركين؛ استقرار الحل.

Résumé

Ce travail concerne principalement l'étude de l'existence, de l'unicité et de la stabilité des solutions de deux problèmes aux limites non linéaires.

♣ Le premier est un problème aux limites hyperbolique semi-linéaire qui modélise les petites vibrations dans un domaine borné. Nous montrons l'existence et l'unicité de la solution faible en se basant sur les approximations de Galerkin combinées avec les résultats de compacité.

♣ Le deuxième est un système formé par une équation hyperbolique couplée à une équation parabolique. Ce système apparaît en thermoviscoélasticité. En utilisant les techniques de Galerkin, nous prouvons que le système admet au moins une solution. Ensuite, nous montrons que ces solutions sont exponentiellement stables.

Mots clés : *Existence et unicité ; Équation hyperbolique ; Méthode de Galerkin ; Stabilité de la solution*.

Abstract

This work mainly concerns the study of the existence, uniqueness, and stability of solutions to two nonlinear boundary value problems.

♣. The first is a semi-linear hyperbolic boundary value problem that models small vibrations in a bounded domain. We show the existence and uniqueness of the weak solution based on Galerkin approximations combined with compactness results.

♣. The second is a system formed by a hyperbolic equation coupled with a parabolic equation. This system appears in thermoviscoelasticity. Using Galerkin techniques, we prove that the system admits at least one solution. Then, we show that these solutions are exponentially stable.

Keywords : *Existence and uniqueness ; Hyperbolic equation ; Galerkin method ; Solution stability.*

Notation

EDP :	Équation aux dérivées partielles.
$\mathcal{D}(\Omega)$:	Espace des fonctions différentiable et à support compact dans Ω.
$\mathcal{D}'(\Omega)$:	Le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$: L'espace des distributions sur Ω.
$L^p(\Omega)$:	L'espace de Lebesgue.
$:=$	L'égalité par définition (affectation).
$(\cdot,\cdot)$:	Le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.
D^α :	La dérivée d'ordre α au sens des distributions.
$u_n \longrightarrow u$:	La convergence forte de la suite (u_n) vers l'élément u.
$u_n \rightharpoonup u$:	La convergence faible de la suite (u_n) vers l'élément u.
$u_n \rightharpoonup^* u$:	La convergence faible étoile de la suite (u_n) vers l'élément u.
u_t, u_{tt} :	Les dérivations première et seconde de u par rapport au temps.
u_x, $\partial_x u$:	La dérivée partielle première de u par rapport à x.
u_{xx} :	La dérivée partielle de u par rapport à x d'ordre 2.
$C([0,T]\,;X)$:	L'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans X.
$c; C$:	Des constantes génériques strictement positives.
p.p :	Presque partout.

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont un outil extrêmement important pour modéliser des problèmes et phénomènes physiques. Depuis plusieurs décennies, de nombreux phénomènes physiques ont été modélisés par ces équations. On peut citer par exemple l'équation de Navier-Stokes, qui décrit l'écoulement des fluides, l'équation de la chaleur, qui décrit la distribution et la diffusion de la chaleur ou des gaz, et l'équation des ondes. Pour plus de détails sur l'utilisation des équations aux dérivées partielles dans la modélisation des phénomènes physiques, nous renvoyons le lecteur aux références [11] et [12].

La physique, la biologie et les sciences de l'ingénieur nécessitent la capacité de résoudre un large éventail d'équations aux dérivées partielles.

Mathématiquement, de nombreuses méthodes ont été développées pour étudier et trouver des solutions de certaines équations linéaires, telles que la séparation des variables,la méthode des semi-groupes et les transformations de Fourier. Cependant, ces méthodes sont généralement inefficaces dans le cas des équations aux dérivées partielles non linéaires, d'où l'utilisation d'autres méthodes pour étudier l'existence et l'unicité des solutions de ces équations, notamment la méthode du point fixe et la méthode de Galerkin.

La méthode de Galerkin est devenue l'outil de base de la résolution des equations aux dérivées partielles (notamment pour l'étude des problèmes non-linéaires) depuis son introduction au XX^{e} siècle. Cette méthode a été développée dans les années 1970, comme en 1973, où Reed et Hill ont utilisé la méthode de Galerkin pour résoudre des systèmes hyperboliques. L'idée de la méthode est la suivante : Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ.

Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit égale-

ment un procédé constructif d'approximation, voir [9].
Dans la littérature, il existe de nombreuses recherches mathématiques qui visent à étudier l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions aux équations aux dérivées partielles. Nous mentionnons, par exemple, que dans le travail [2], les auteurs utilisent les techniques de Galerkin pour étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites non linéaire de type hyperbolique. Dans l'article [3], un modèle du problème parabolique avec conditions aux limites intégrales a été étudié. L'existence et l'unicité de la solution faible ont été prouvées par la méthode de Galerkin. Dans l'article [8], l'existence des solutions faibles de l'équation thermo-viscoélastique a été étudiée par la méthode Galerkin, puis la stabilité exponentielle des solutions a été prouvée.
Notre objectif dans ce travail consiste à analyser la question de l'existence, de l'unicité et de la stabilité des solutions de quelques problèmes aux limites non linéaires en se basant sur les approximations de Galerkin combinées avec la méthode de l'injaction du compacité. Ces techniques sont utilisées par Lions [10] pour des problèmes similaires.
Plus en détail, dans ce travail nous étudions deux problèmes : le premier problème est du type hyperbolique avec un terme source non linéaire, et le second problème est un problème couplé intervenant en thermoviscoélasticité non linéaire.
Ce mémoire est structuré en trois chapitres :

• Dans le **premier chapitre**, on rappelle quelques résultats d'analyse fonctionnelle (les espaces de Sobolev, topologie faible, application de trace,...) ainsi que quelques concepts de base et définitions sur les équations aux dérivées partielles.

• Dans le **deuxième chapitre**, on étudie le résultat de l'existence et l'unicité de la solution faible d'un problème aux limites hyperbolique semi-linéaire en utilisant la méthode de Galerkin.

• Dans le **dernier chapitre**, on considère un système non linéaire impliquant l'équation thermo-viscoélastique. Nous prouvons l'existence des solutions à l'aide de la méthode de Galerkin, puis nous étudions la stabilité exponentielle des solutions. Ce chapitre est un détail d'un cas particulier de l'article [8], où l'auteur a étudié un problème aux limites pour un système thermo-viscoélastique régi par les deux équations principales suivantes

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\int_0^L |u_x|^2 \, dx\right) u_{xx} - \beta u_{xxt} + \alpha\theta_x + g\left(u_t\right) = 0 \text{ dans } (0,L) \text{ x } (0,T), \\ \theta_t - K\theta_{xx} + \alpha u_{xt} = 0 \text{ dans } (0,L) \text{ x } (0,T). \end{cases}$$

Chapitre 1

Notions préliminaires

Ce chapitre est consacré à rappeler quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans ce mémoire. Pour plus de détails sur ce sujet nous renvoyons le lecteur, par exemple, aux références ([1], [4], [10]). Dans ce chapitre, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3).

1.1 Espaces de Lebesgue $\mathbf{L}^p(\Omega)$

Définition 1.1. *Soit $p \in [1, +\infty[$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble*

$$L^p(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R};\ v \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega |v|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$ et $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ par

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R};\ v \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \sup_{x\in\Omega} ess\, |v(x)| < +\infty \right\},$$

où

$$\sup_{x\in\Omega} ess\, |v(x)| = \inf\{M > 0;\ |v(x)| \leq M \text{ presque partout dans } \Omega\},$$

l'espace $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess\, |v(x)|,$$

est aussi un espace de Banach.

Dans ce qui suit nous allons rappeler quelques propriétés des espaces $L^p(\Omega)$.
Soit $1 < p < \infty$ un réel. On pose $q = \frac{p}{p-1}$ et on dit que q est l'exposant conjugué de p. L'exposant q est caractérisé par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $p = 1$ (resp. $p = \infty$) nous poserons naturellement $q = \infty$ (resp. $q = 1$).

Théorème 1.1. *Soit $p \in [1, +\infty]$, les espaces $L^p(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes.*

1. *Les duaux des espaces $L^p(\Omega)$, pour $p \in [1, +\infty[$, vérifient $(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$.*
2. *Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces réflexifs pour $p \in]1, +\infty[$.*
3. *Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces séparables pour $p \in [1, +\infty[$.*
4. *$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$, c'est-à-dire que pour tout $u \in L^p(\Omega)$ il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

5. *De toute suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout dans Ω.*

Théorème 1.2 (Inégalité de Hölder). *Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$. Alors $u.v \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |u.v|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Remarque 1.1. *Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder. Soient u_1, u_2, ..., u_k, des fonctions telles que*

$$u_i \in L^{p_i}(\Omega),\, 1 \leq i \leq k \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $u = u_1.u_2....u_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|u_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Corollaire 1.1. *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_\Omega u.v dx,\, \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

est un espace de Hilbert. De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder, c'est-à-dire

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.2 Espaces de Sobolev classiques

1.2.1 Distributions

Les espaces $C^k(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, ..., x_n)$ un point générique de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction régulière (ayant des dérivées partielles continues autant qu'il est nécessaire) définie sur Ω. On définit les opérateurs usuels suivants :

- $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$:= dérivée partielle par rapport à x_i
- Le vecteur gradient est donné par $\nabla u := \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$(ou sa transposée).
- L'opérateur Laplacien est donné par : $\Delta := \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

• Pour définir les dérivées d'ordre supérieur, on rappelle qu'un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ est un élément de $\mathbb{N}^n$, sa longueur est

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \text{ (module de } \alpha).$$

L'opérateur d'ordre D^α est donné par

$$D^\alpha = \frac{D^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ....\partial x_n^{\alpha_n}} := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_n}},$$

(on dérive α_i-fois par rapport à x_i).

• On désignera par $C^o(\Omega)$ (resp. $C^1(\Omega)$) l'espace des fonctions continues (resp. continument différentiables) sur Ω à valeurs réels puis, pour $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, on pose

$$C^k(\Omega) = \left\{ u \in C^{k-1}(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega), i = 1, ..., n \right\}.$$

C'est l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On notera enfin

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega),$$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω.

• On note $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) ; \text{ supp}(u) \subset K\}$, où K désigne un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2. *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace défini par*

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty := \{\textit{fonctions de classe } C^\infty \textit{ à support compact } K \subset \Omega\}.$$

Proposition 1.1. *$\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire.*

Définition 1.3. *Soit $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$. On dit que $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ quand $j \to +\infty$ si et seulement si il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $supp(\phi_j) \subset K$ et tel que ϕ_j ainsi que toutes ses dérivées tendent vers 0 uniformément dans K (i.e $\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ $\in \mathbb{N}^n$: $\|D^\alpha(\phi_j)\|_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow 0$ quand $j \to +\infty$). Enfin, on dira que $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers ϕ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si $(\phi_j - \phi)_j$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Il s'agit donc d'une convergence uniforme sur la fonction et toutes ses dérivées partielles, sous la condition d'un support commun. C'est une convergence très stricte.

Il faut bien noter que les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont très pratiques à utiliser : en tant que fonctions continues sur des compacts, elles sont bornées et appartiennent donc à tous les espaces $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Proposition 1.2. *$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^{\infty}(\Omega)$ est dense dans $C_c^0(\Omega)$ au sens de la convergence uniforme.*

Définition 1.4. *Soit $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. On dira que T est continue si et seulement si pour toute suite $(\phi_j)_{j\geq 0}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers 0, la suite de nombres $T(\phi_j)_{j\geq 0}$ tend vers zéro quand j tend vers l'infini.*

Définition 1.5. *On appelle distribution sur Ω toute forme linéaire T continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, on note*

$$T : \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \longmapsto T(\phi) = \langle T, \phi \rangle \in \mathbb{R}.$$

Les $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont en effet une notation classique en dualité.

Notation. On désigne par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 1.6. *On dit qu'une suite de distributions $(T_p)_{p\geq 0}$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers une distribution T si*

$$T_p(\phi) = \langle T_p, \phi \rangle \longrightarrow \langle T, \phi \rangle, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La convergence est dite faible.

i) Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction localement intégrable. L'application

$$T_f : \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f \phi dx,$$

est une distribution d'ordre 0.

ii) Soit $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors

$$T_f = T_g \Longleftrightarrow f \overset{\text{p.p}}{=} g,$$

autrement dit $L^1_{loc}(\Omega)$ peut être injecté dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 1.7. **i)** *Une distribution est dite positive si et seulement si*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \phi \geq 0 \Longrightarrow \langle T, \phi \rangle \geq 0.$$

ii) *On appelle support d'une distribution le complémentaire du plus grand ouvert O tel que*

$$supp(\phi) \subset O \Longrightarrow \langle T, \phi \rangle = 0.$$

Définition 1.8. ***(Dérivation d'une distribution)**. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout j de $\{1, ..., n\}$, on définit la distribution $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ par*

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle,$$

et donc, par récurrence, pour tout multientier $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$$\langle \partial^{\alpha} T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^{\alpha} \phi \rangle.$$

Cette définition a évidemment un sens ; $\mathcal{D}(\Omega)$ est stable par dérivation, la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ implique celle de toutes les fonctions dérivées, et le support d'une fonction est réduit par dérivation.

Lemme 1.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ et soit $f_n(x)$, $f(x)$ deux fonctions réelles dans $L^p(\Omega)$, $(1 \leq p \leq +\infty)$ telle que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$. Alors si $1 \leq p < +\infty$, $(f_n)_n$ admet une sous suite converge presque partout vers f et si $p = +\infty$. Alors $(f_n)_n$ converge presque partout vers f.*

1.2.2 Espace de Sobolev.

Dans ce paragraphe, nous définissons les espaces de Sobolev qui sont les outils fondamentaux de dériver la formulation variationnelle.

Définition 1.9. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \right\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ au sens des distributions.

Proposition 1.3. *Muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_\Omega (u(x).v(x) + \nabla u(x).\nabla v(x))\, dx,$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 1.3 (de densité)**.** *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1, alors $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$, ces espaces sont très utiles pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

Définition 1.10. *L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Autrement dit*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega), \exists v_l \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ telle que } v_l \to u \text{ dans } H^1(\Omega) \right\}.$$

Définition 1.11. *Le dual de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est appelé $H^{-1}(\Omega)$.*

Proposition 1.4. *L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est caractérisé par*

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ u = v_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \text{ avec } v_0, v_1, .., v_n \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Muni de la norme

$$\|\mathcal{L}\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \left| \langle \mathcal{L}, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) H_0^1(\Omega)} \right|,$$

l'espace $H^{-1}(\Omega)$ est un espace de Banach.

On peut aisément généraliser la Définition 1.9 de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ aux fonctions qui sont $m \geq 0$ fois dérivables au sens faible. Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un multi-indice. On note $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ et pour une fonction u,

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_d^{\alpha_d}}(x).$$

Définition 1.12. *Pour un entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m \right\},$$

où la dérivée D^α est à prendre au sens faible.

Proposition 1.5. *Muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u . D^\alpha v dx,$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u . D^\alpha u dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.6. *$H^m(\Omega) \subset H^{m'}(\Omega)$, et l'injection est continue pour $m \geq m'$.*

Définition 1.13. *Pour $m \geq 0$ on désigne par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.*

$$H_0^m(\Omega) = \{ u \in H^m(\Omega), \exists v_l \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ telle que } v_l \to u \text{ dans } H^m(\Omega) \}.$$

Remarque 1.2. 1. *$H_0^m(\Omega)$ est un sous espace fermé de $H^m(\Omega)$.*

2. *En général* $H_0^m(\Omega) \neq H^m(\Omega)$.
3. $H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.
4. *Si* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *, alors on peut montrer que* $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.4. *Si* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *à frontière lipschitzienne, alors* $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ *est dense dans* $H^m(\Omega)$.

Plus généralement, on peut définir des espaces $W^{m,p}(\Omega)$ pour un entier m et pour un réel $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.14. *Pour tout entier* m*, l'espace de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\,; D^\alpha u \in L^p(\Omega)\,, \forall \alpha \text{ } avec \text{ } |\alpha| \leq m\}\,,$$

où la dérivée D^α *est à prendre au sens faible.*

Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. Nous désignons par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \text{ dans } W^{1,p}(\Omega)\,,$$

et par $W^{-1,q}(\Omega)$ le dual topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.2.3 Quelques propriétés et Théorèmes fondamentaux

Dans cette section, nous donnons quelques propriétés de base des espaces de Sobolev sans en donner les preuves qui se trouvent dans tout livre consacré à ces espaces. ([4], [10], [13]).

Définition 1.15. *Soient deux espaces de Banach* X *et* Y *tels que* $Y \subset X$*. On dit que* Y *s'injecte de manière continue dans* X *(en notation* $Y \hookrightarrow X$*) si et seulement si l'opérateur identité*

$$\begin{array}{rccc} Id: & Y & \longrightarrow & X \\ & u & \longmapsto & u, \end{array}$$

est continue. De même on dit que Y *s'injecte de manière compact dans* X *(en notation* $Y \hookrightarrow_c X$*) si et seulement si* Id *est compact.*

Théorème 1.5 (Rellich). *Si Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière continue, alors*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c H^{m-1}(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 1.7 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante $C_{(\Omega)}$ telle que pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}.$$

Dans l'étude des problèmes aux limites linéaires ou non linéaires, l'injection de Sobolev joue un rôle important, car elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et les normes des espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.6 (Injection de Sobolev). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^n$, et $1 \leq p < \infty$, alors on à l'injection*

1. $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $m - \frac{n}{2} \geq -\frac{p}{n}$.
2. $H^m(\Omega) \hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right), \forall m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $m - \frac{n}{2} > 0$.
3. $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $m - \frac{n}{2} > 0$.

Traces

Nous désignerons par Γ la frontière de Ω.
Le but essentiel de cette section est de montrer que la "restreiction" sur Γ (appelée trace) d'une fonction de $H^m(\Omega)$ à un sens même si cette fonction n'est pas continue.

Théorème 1.7 (Définition). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) & \longrightarrow & C(\Gamma) \\ u & \longmapsto & u\,|_\Gamma, \end{array}$$

s'étend en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, appelée opérateur de trace et notée γ_0.

Remarque 1.3. *Si Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, alors*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = 0 \text{ sur } \Gamma\right\}.$$

Convergence faible et convergence faible étoile

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$. On note par X^* l'espace dual de X et par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*X}$ le produit de dualité entre X^* et X.

Définition 1.16. *On dit que la suite $(u_n) \in X$ est converge faiblement vers $u \in X$, et on note $u_n \rightharpoonup u$, si*

$$\lim_{n\to\infty} \langle v, u_n \rangle_{X^*X} = \langle u, v \rangle_{X^*X}, \forall v \in X^*.$$

Dans ce cas u s'appelle limite faible de la suite u_n.

Proposition 1.8. *Soit u_n une suite de X. On a*

1. Si $u_n \to u$ fortement, alors $u_n \rightharpoonup u$ faiblement.
2. Si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement, alors $\|u_n\|_X$ est bornée et $\|u\|_X \leq \liminf \|u_n\|_X$.
3. Si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement et si $v_n \to v$ fortement dans X^*(c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\|_x = 0$), alors $\lim\limits_{n\to\infty} \langle v_n, u_n \rangle_{X^*X} = \langle v, u \rangle_{X^*X}$.

Théorème 1.8 (Compacité faible des bornés du dual d'un espace réflexif)**.** *Soit X un espace réflexif et soit (u_n) une suite bornée de X (c'est-à-dire il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|u_n\|_X \leq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Alors il existe une sous-suite, encore notée (u_n) et $u \in X$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X.*

Définition 1.17. *On dit que la suite $(u_n) \in X^*$ converge faiblement étoile vers un élément $u \in X^*$, et on note $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$, si*

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v \rangle_{X^*X} = \langle u, v \rangle_{X^*X}, \forall v \in X,$$

u s'appelle limite faible étoile de la suite u_n.

Proposition 1.9. *Soit u_n une suite de X^*. On a*

1. *Si $u_n \to u$ fortement, alors $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ faiblement.*
2. *Si $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ faiblement, alors $\|u_n\|_{X^*}$ est bornée et $\|u\|_{X^*} \leq \liminf \|u_n\|_{X^*}$.*
3. *Si $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ faiblement et si $v_n \to v$ fortement dans X (c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\|_X = 0$), alors $\lim\limits_{n\to\infty} \langle u_n, v_n \rangle_{X^*X} = \langle u, v \rangle_{X^*X}$.*

Théorème 1.9 (Compacité faible étoile des bornés du dual d'un espace séparable)**.** *Soit X un espace séparable, et soit (u_n) une suite bornée de X^* (c'est-à-dire il existe $c > 0$ tel que $\|u_n\|_{X^*} \leq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Alors il existe une sous-suite, encore notée (u_n) et $u \in X^*$ telle que $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ dans X^*.*

Une application importante de ce théorème est la suivante : si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et (u_n) est une suite bornée de $L^\infty(\Omega)$, alors il existe une sous-suite encore notée (u_n) et $u \in L^\infty(\Omega)$ telle que $\int\limits_\Omega u_n v dx \to \int\limits_\Omega uvdx$ pour tout $v \in L^1(\Omega)$. En effet, $L^\infty(\Omega)$ est le dual de $L^1(\Omega)$, qui est séparable.

Lemme 1.2. *Supposons que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$,soit $f_n(x)$ une suite bornée dans $L^p(\Omega), (1 \leq p < +\infty)$ telle que f_n converge presque partout vers f. Alors $f \in L^p(\Omega)$, et f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$.*

Théorème de Riesz-Fréchet et Lax-Milgram

Théorème 1.10 (Représentation de Riesz-Fréchet). *Soit X un espace de Hilbert réel et $(\cdot,\cdot)_X$ un produit scalaire de X. Pour tout $v \in X^*$; il existe $u \in X$ unique tel que*

$$\langle v, w\rangle_{X^*X} = (u, w)_X \, , \forall w \in X.$$

De plus on a

$$\|u\|_X = \|v\|_{X^*} \, .$$

Théorème 1.11 (Lax-Milgram). *Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert X. Soit $l(\cdot)$ une forme linéaire continue sur X. Alors il existe un unique $u \in X$ tel que*

$$a(u, v) = l(v) \, , \forall v \in X.$$

1.3 L'espace $L^p(0,T;X)$

Nous allons introduire maintenant d'outils supplémentaires qui sont fondamentaux pour l'étude des problèmes d'évolution. Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel.

Définition 1.18. *Soit X un espace de Banach et T un réel strictement positif. Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(0,T;X)$ l'ensemble des fonctions Lebesgue mesurables définies sur $]0,T[$ et à valeurs dans X, telles que l'application $t \mapsto \|u(t)\|_X$ soit dans $L^p(0,T)$. L'espace $L^p(0,T;X)$ est un espace de Banach pour la norme*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\left\{c > 0 \, ; \|u(t)\|_X \leq c, \; t \in]0,T[\right\}, \text{ si } p = \infty.$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants

Proposition 1.10. *Pour $p \in [1,+\infty[$, on a*

1. *Si X est séparable, alors $L^p(0,T;X)$ est aussi séparable.*
2. *Si X est réflexif, alors $L^p(0,T;X)$ est aussi réflexif.*
3. *Si X et Y désignent deux espaces de Banach, X inclus dans Y, avec injection continue, alors il existe une injection continue de $L^p(0,T;X)$ dans $L^p(0,T;Y)$.*
4. *Si $(X,(\cdot,\cdot)_X)$ est un espace de Hilbert, alors $L^2(0,T;X)$ est aussi un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par*
$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X\,dt.$$
5. *Si X est un espace de Banach réflexif et X^* son dual, alors*
$$L^p(0,T;X)^* = L^q(0,T;X^*),\ 1<p,q<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$
et
$$L^1(0,T;X)^* = L^\infty(0,T;X^*),$$
où $L^p(0,T;X)^*$ représente le dual de l'espace $L^p(0,T;X)$, $1 \le p \le \infty$.

Théorème 1.12 (Bochner)**.** *Une fonction $u:[0,T]\to X$ mesurable est intégrable si et seulement si la fonction $x \mapsto \|u(x)\|_X : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ est intégrable. Dans ce cas*
$$\left\| \int_0^T u(t)\,dt \right\|_X \le \int_0^T \|u(t)\|_X\,dt.$$

Lemme 1.3. *Si $u \in L^p(0,T;X)$ et $u_t \in L^p(0,T;X)$ $(1 \le p \le \infty)$, alors u est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0,T)$, continue de $[0,T] \to X$. C'est-à-dire $u \in C([0,T];X)$, où $C(0,T;X)$ l'ensemble des fonctions continues dans $(0,T)$ à valeurs dans X.*

Théorème 1.13. *Soit $(X,(\cdot,\cdot)_X)$ un espace de Hilbert et soit $u :]0,T[\to X$ une fonction tel que $u \in L^p(0,T;X)$, et $u_t \in L^p(0,T;X)$, alors*

1. *La fonction $t \mapsto \|u(t)\|_X$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0,T[$.*
2. $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|u(t)\|_X^2 = \left(\dfrac{du(t)}{dt}, u(t)\right)_X$*, presque partout dans $]0,T[$.*
3. $\dfrac{1}{2}\|u(t)\|_X^2 = \dfrac{1}{2}\|u(0)\|_X^2 + \int\limits_0^t \left(\dfrac{du(s)}{dt}, u(s)\right)_X ds$*, $\forall t \in]0,T[$.*

1.4 Lemmes de Gronwall

Nous passons maintenant en revue les lemmes de Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes aux limites, en particulier pour établir l'unicité de la solution, ainsi que pour former les estimations a priori. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, le lecteur pourra consulter par exemple ([11]).

Lemme 1.4. *Soient $u, v \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $u(t) \geq 0$ et $v(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$, $a \geq 0$ une constante et $w \in C([0,T];\mathbb{R})$.*

1. *Si*

$$w(t) \leq a + \int_0^t u(s)\,ds + \int_0^t v(s)\,w(s)\,ds,\ \forall t \in [0,T],$$

alors

$$w(t) \leq \left(a + \int_0^t u(s)\,ds\right) \exp\left(\int_0^t v(s)\,ds\right),\ \forall t \in [0,T].$$

2. *Si*

$$w(t) \leq u(s) + a\int_0^t v(s)\,ds,\ \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\int_0^t w(s)\,ds \leq \exp(aT)\int_0^t u(s)\,ds.$$

Dans le cas particulier $u \equiv 0$, la partie (1) de ce lemme devient

Remarque 1.4. *Soit $v \in C([0,T];\mathbb{R})$ tel que $v(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$, $a \geq 0$ une constante, et $w \in C([0,T];\mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$w(t) \leq a + \int_0^t v(s)\,w(s)\,ds,\ \forall t \in [0,T],$$

alors

$$w(t) \leq a\exp\left(\int_0^t v(s)\,ds\right),\ \forall t \in [0,T].$$

Lemme 1.5. *Soient $u, v \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $u(t) \geq 0$ et $v(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$, $a \geq 0$. Soit $w : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}w^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t u(s)\,w(s)\,ds + \int_0^t v(s)\,w^2(s)\,ds,\ \forall t \in [0,T].$$

Alors

$$|w(t)| \leq \left(a + \int_0^t u(s)\,ds\right) \exp\left(\int_0^t v(s)\,ds\right),\ \forall t \in [0,T].$$

1.5 Concepts de base et définitions

Dans cette section, nous introduisons quelques concepts sur les équations aux dérivées partielles. Pour plus de détails, voir ([7], [5]).

1.5.1 Equations aux dérivées partielles

Définition 1.19. *Une equation aux dérivées partielles (EDP) est une equation mathématique de la forme*

$$F\left(x, y, ..., u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} .....\right) = 0, \tag{1.1}$$

où

- $x, y, z, ...$ *les varaibles indépendentes.*
- $u\left(x, y, z, ...\right)$ *la fonction inconnue.*
- $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} .....$ *les dérivées partielles de* u.

Les solutions de l'équation aux dérivées partielles (1.1) sont les fonctions qui vérifient cette équation.

Exemple 1.1. *Soit l'EDP dans* $\mathbb{R}^2$ *suivante*

$$u_{xx} = u_{yy}.$$

Les fonctions $u(x;y) = (x+y)^3$ *et* $u(x;y) = \sin(x-y)$ *sont deux solutions de cette équation.*

Définition 1.20 (L'ordre d'une (EDP))**.** *On appelle ordre d'une (EDP) lordre le plus élevé des dérivées partielles.*

Exemple 1.2. *On a*

1. $u_x - u_y = 0$, *est une EDP d'ordre 1.*
2. $xu_{xx} - xy\left(u_y\right)^4 = 2y$, *est une EDP d'ordre 2.*
3. $x\left(u_{xxy}\right) - xyu_{yy} = y + x$, *est une EDP d'ordre 3.*

Définition 1.21 (Linéarité et homogénéité)**.** *Soient* D *un domaine de* $\mathbb{R}^n$ *et*

$$\begin{aligned} L : D &\longrightarrow D \\ u &\longmapsto L\left(u\right), \end{aligned}$$

un opérateur. On dit que $L(\cdot)$ *est linéaire si et seulement si* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in D$

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v).$$

Une EDP est dite linéaire si elle est de forme

$$L(u) = f(x, y, ...),$$

où

- $L(\cdot)$ *un opérateur linéaire.*
- $f(x, y, ...)$ *est une fonction à plusieurs varaibles.*
- $u(x, y, ...)$ *la fonction inconnue.*

De plus si $f(x, y, ...) = 0$, *on dit que l'équation est linéaire homogène, si non elle est dite non hamogène.*

Exemple 1.3. *Soit l'équation*

$$u + xu_{yy} + xyu_{xx} = 2. \tag{1.2}$$

L'équation (1.2) *est une EDP linéaire non homogène. Dans cette exemple on a*

$$L(u) = u + xu_{yy} + xyu_{xx} \text{ et } f(x, y) = 2.$$

$L(\cdot)$ *est un opérateur linéaire en effet, pour toute* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $v, u \in D$, *on a*

$$\begin{aligned} L(\alpha u + \beta v) &= \alpha u + \beta v + x(\alpha u + \beta v)_{yy} + xy(\alpha u + \beta v)_{xx} \\ &= (\alpha u + \alpha x u_{yy} + \alpha xy u_{xx}) + (\beta v + \beta x v_{yy} + \beta xy v_{xx}) \\ &= \alpha L(u) + \beta L(v). \end{aligned}$$

et par suite l'équation (1.2)*est linéaire.*

Définition 1.22 (Équation aux dérivée partielle non-linéaire)**.** *Une équation aux dérivées partielles est dite complètement non linéaire si son terme de l'ordre le plus élevé est non linéaire.*

Exemple 1.4. *Soit l'équation*

$$(u_y)(u_{yy}) + u_{xx} = e^y. \tag{1.3}$$

L'équation (1.3)*est une EDP non linéaire et non homogène.*

En effet $L(u) = (u_y)(u_{yy}) + u_{xx}$ *et* $f(x, y) = e^y$, *l'opérateur* $L(u)$ *n'est pas un opérateur linéaire, en prendre par exemple* $\alpha = \beta = 1$ *et* $u(x, y) = v(x, y) = y^2$, *nous obtenons* $L(u + v) = 16y$ *et* $L(u) + L(v) = 8y$, *donc* $L(u + v) \neq L(u) + L(v)$.

Définition 1.23 (Équation aux dérivée partielle quasi-linéaire). *Une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé de la fonction u.*

1.5.2 Equation aux dérivées partielles du premiàre ordre

Définition 1.24. *Un EDP linéaire première d'ordre de deux variable est sous la forme*

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y + c(x, y) u = f(x, y),$$

car $L(u) = a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y + c(x, y) u$ est linéaire par rapport de u.

Un EDP semi-linéaire première ordre de deux variable est sous la forme

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u). \tag{1.4}$$

1.5.3 Equation aux dérivées partielles du deuxième ordre

Définition 1.25. *Soient a, b et c des fonctions définies dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et F une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.*

On appelle EDP semi-linéaire du second ordre d'inconnue u, une equation de la forme

$$a(x, y) u_{xx} + b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y). \tag{1.5}$$

Classification des EDPs de deuxième ordre.

Soit

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

L'équation (1.5) est dit

— Parapolique si

$$\Delta = 0.$$

— Hyperpolique si

$$\Delta > 0.$$

— Eliptique si

$$\Delta < 0.$$

Exemple 1.5. *On a*

1. *L'équation de la chaleur*
$$u_t = ku_{xx},$$
est une équation parabolique.

2. *L'équation des ondes*
$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$
est une équation hyperbolique.

3. *L'équation de Laplace*
$$u_{xx} + u_{xy} = 0,$$
est équation eliptique.

1.5.4 Les conditions initiales et conditions aux limites

Pour trouver des solutions particulières d'une EDP, à partir de la soluion générale, on va imposer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions.

1. Conditions initiales.

Soit $u(x,t)$ est une fonction tel que $(x,t) \in \mathbb{R}^n$ x $\mathbb{R}$. La condition initiale donnée par la forme

$$u(x, t_0) = f(x),$$

où

$$u_{\underbrace{\text{tt..t}}_{p \text{ fois}}}(x, t_0) = f_p(x) \text{ tel que } p \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.6.

1. *Équation de la chaleur*
$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, \quad k > 0, x \in]a,b[, t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x, t_0 = 0) = e^{-x^2}. \end{cases}$$

2. *L'équation des ondes*
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, x \in]a,b[, t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x, t_0 = 0) = f(x); u_t(x, t_0 = 0) = g(x), \end{cases}$$
on a deux conditions initiales.

2. Conditions aux limites.

Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ tel que $\partial\Omega$ sa frontièr. Soit $u(x,t)$ une fonction définie de $\Omega\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

i**. Condition de Dirichlet.**

On appelle condition de Dirichlet une condition où on impose la valeur de la fonction recherchée $u(x,t)$ sur le bord $\partial\Omega$, c'est-à-dire $u(x,t) = g(x,t)$ sur $\partial\Omega$.

Exemple 1.7.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & k > 0, x \in]1,2[, t \in \mathbb{R}_+, \\ u(1,t) = \varphi(t), & u(2,t) = \psi(t). \end{cases}$$

ii. **Condition de Neumann**.

On appelle condition de Neumann une condition où on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée $u(x,t)$ sur le bord $\partial\Omega$, c'est-à-dire $u_x.n = g(x,t)$ sur $\partial\Omega$.

Exemple 1.8.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & k > 0, x \in]1,2[, t \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(1,t) = \varphi(t), & u_x(2,t) = \psi(t). \end{cases}$$

iii. **Condition de Robin** (**mixte**) .

On appelle condition de Robin (mixte) une condition où on impose une relation entre la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée et sa valeur sur le bord $\partial\Omega$, c'est-à-dire

$$a(x)\,u + b(x)\,u_x.n = g(x,t) \text{ sur } \partial\Omega.$$

CHAPITRE 2

ÉTUDE D'UN PROBLÈME DE DIRICHLET POUR UNE CLASSE DES ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES SEMI-LINÉAIRES

Dans ce chapitre, nous allons considérer un problème aux limites hyperbolique semi linéaire avec des conditions aux limites de Dirichlet. Après avoir montré que ce problème, sous certaines conditions est équivalent au problème variationnel, en utilisant les techniques de Galerkin combinées avec la méthode de l'injection du compacité on démontre l'existence et l'unicité de la solution faible.

2.1 Description du problème

Soit $\Omega = (0, L)$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. On note par $Q = \Omega$ x $(0, T)$ le domaine de $\mathbb{R}_x$ x $\mathbb{R}_+$ avec $0 < T < +\infty$. On considère dans Q le problème suivant
Problème $\mathcal{P}$. Trouver $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que

$$\begin{cases} u_{tt} - \partial_x \left(\alpha(x,t) u_x\right) + \partial_x \left(\beta(x,t) u_{xt}\right) + g\left(u\right) = f(x,t), \quad \forall (x,t) \in Q, \\ \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi\left(x\right), \quad \forall x \in (0,L), \\ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où

- $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ représente la fonction inconnue.
- f représente la densité des forces extérieures.
- $\varphi\left(\cdot\right)$, $\psi\left(\cdot\right)$ sont des fonctions données.
- α, $\beta \in C^1(Q)$.
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui satisfait les hypothèses suivantes

$$\left|g\left(w\right)\right| \leq c_g \left|w\right|, \forall w \in \mathbb{R},$$

où c_g est une constante positive.
Il existe une constante $c_{g'} > 0$, telle que

$$\left|g'\left(w\right)\right| \leq c_{g'}, \forall w \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Exemples sur la fonction $g\left(\cdot\right)$.

1. $g\left(u\right) = \cos\left(u\right) + \arctan\left(u\right)$.
2. $g\left(u\right) = u \exp\left(-u^2\right)$.
3. $g\left(u\right) = \frac{1}{1+u^2}$.

Remarque 2.1. *D'après la condition* (2.2) *la fonction* $g\left(\cdot\right)$ *est lipschitzienne de rapport* k*, c'est-à-dire*

$$\left|g\left(u\right) - g\left(v\right)\right| \leq k \left|u - v\right|, \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

En effet, si $\left|g'\left(w\right)\right| \leq c_{g'}$*, alors*

$$-c_{g'} \leq g'\left(w\right) \leq c_{g'}, \forall w \in \mathbb{R}.$$

En intégrant de v à u, on obtient

$$-\int_v^u c_{g'} dw \leq \int_v^u g'(w)\, dw \leq \int_v^u c_{g'} dw,$$

ce qui implique que

$$-c_{g'}(u-v) \leq g(u) - g(v) \leq c_{g'}(u-v).$$

D'où le résultat.

Le problème (2.1) représente un problème hyperbolique semi-linéaire à coefficients variables avec un terme source non linéaire $g(\cdot)$. Ce problème modélise de nombreux phénomènes physiques. permettant par exemple de modéliser la déformation d'un mince fil visqueux, l'écoulement des fluides dans un tube poreux, ainsi que les phenomènes de vibration d'une corde ou les ondes.
Notre objectif est d'étudier l'existence et l'unicité de la fonction $u = u(x,t)$, qui satisfait le problème (2.1) par la méthode de Galerkin. Pour cela, nous devons dériver la formulation variationelle de ce problème.

2.2 Formulation variationnelle

Définition 2.1. *La solution faible du problème (2.1) est une fonction $u(x,t)$ qui vérifie*

— $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$.

— *u admet une dérivée $u_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.*

— $u(0) = \varphi(x),\ u_t(0) = \psi(x)$.

— *L'identité*

$$\int_\Omega u_{tt}.vdx - \int_\Omega \partial_x(\alpha(x,t)u_x).vdx - \int_\Omega \partial_x(\beta(x,t)u_{xt}).vdx + \int_\Omega g(u).vdx$$
$$= \int_\Omega f.vdx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \forall t \in [0,T].$$

Pour obtenir la formulation faible on définit l'espace fonctionnel V par

$$V = H_0^1(\Omega).$$

Rappelons que l'espace V muni de la norme $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert et séparable.
En multipliant l'équation

$$u_{tt} - \partial_x(\alpha(x,t)u_x) - \partial_x(\beta(x,t)u_{xt}) + g(u) = f,$$

par un élément $v \in H^1(\Omega)$, en l'intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega u_{tt}.vdx - \int_\Omega \partial_x \left(\alpha(x,t)u_x\right).vdx - \int_\Omega \partial_x \left(\beta(x,t)u_{xt}\right).vdx + \int_\Omega g\left(u\right).vdx = \int_\Omega f.vdx. \quad (2.3)$$

En utilisant la formule de Green, (2.3) devient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_{tt}.vdx + \int_\Omega \alpha(x,t)u_x.v_xdx - \left[\alpha(x,t)u_x.v\right]_0^L + \int_\Omega \beta(x,t)u_{xt}.v_xdx \\ &- \left[\beta(x,t)u_{xt}.v\right]_0^L + \int_\Omega g\left(u\right).vdx \\ &= \int_\Omega f.vdx. \end{aligned}$$

Grâce les conditions aux limites, on obtient le problème variationnel suivant
Problème $\mathcal{P}_V$. Trouver $u \in V$, tel que

$$(u_{tt}, v) + \mathcal{A}_\alpha(u,v) + \mathcal{A}_\beta(u_t,v) + \left(g\left(u\right), v\right) = (f,v), \quad \forall v \in V,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire en $L^2(\Omega)$ et

$$\mathcal{A}_c(u,v) = \int_\Omega c(x,t)u_x.v_xdx, \text{ pour } u,v \in V \text{ et } c \in C^1\left(Q\right).$$

L'application $\mathcal{A}_c : VV \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et coercive. En effet :

- Bilinéarité : elle est bilinéaire de la linéarité de l'intégrale.
- Continuité : $\forall u, v \in V$ on a

$$|\mathcal{A}_c(u,v)| \leq \max_{(x,t)\in Q} |c(x,t)| \int_\Omega |u_x| \, . \, |v_x| \, dx,$$

  d'après l'inégalité de Cauchy Shwartz on trouve

$$|\mathcal{A}_c(u,v)| \leq \max_{(x,t)\in Q} |c(x,t)| \, \|u\|_V . \|v\|_V.$$

- Coércivité : $\exists c_0 > 0, \forall u \in V$ telle que

$$\mathcal{A}_c(u,v) \geq c_0 \int_\Omega |u_x|^2 \, dx,$$

  où $c_0 = \min\limits_{(x,t)\in Q} c(x,t)$, d'après l'inégalité de Poincaré il existe une constante $\mu > 0$ telle que

$$\mathcal{A}_c(u,u) \geq c_0 \mu \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

2.3 L'existence et l'unicité de la solution

2.3.1 L'existence de la solution

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses*

$$f, \partial_t f \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \tag{2.4}$$

$$\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Alors, le problème (2.1) *admet une solution* u *vérifiant*

$$u \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right),$$

$$u_t \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right),$$

$$u_{tt} \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right).$$

Démonstration. La démonstration de ce Théorème est basée sur la méthode de Galerkin qui consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

— Recherche de solutions approchées.

— On établit sur ces solutions approchées des estimations à priori.

— On passe à la limite, grâce aux propriétés de compacité (dans le terme non-linéaire).

Etape 1. Construire des solutions approchées.

L'espace V est séparable, alors il existe une suite $w_1, w_2, \ldots, w_m$, ayant les propriétés suivantes

$$\begin{cases} w_i \in V \quad \forall i = \{1, 2, ..., m\}, \\ \\ \forall m,\ w_1, w_2, \ldots, w_m. \quad \text{sont linéairement indépendants,} \\ V_m = \langle \{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \rangle, \quad \text{est dense dans } V. \end{cases}$$

L'approximation de Galerkin consiste à chercher pour tout entier $m \geq 1$, une fonction

$$t \mapsto u^m(x, t) = \sum_{i=1}^{m} \eta_{im}(t) w_i(x),$$

avec η_{im} est une fonction qui ne dépend que du temps, tel que $u^m(x, t)$ vérifiant

$$\begin{cases} u^m(t) \in V_m, \quad \forall t \in [0, T], \\ \\ \left(u_{tt}^m(t), w_k\right) + \mathcal{A}_\alpha\left(u^m(t), w_k\right) + \mathcal{A}_\beta\left(u_t^m(t), w_k\right) \\ + \left(g\left(u^m(t)\right), w_k\right) = \left(f(t), w_k\right) \quad \forall k = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.5}$$

On a

$$\begin{aligned}
\left(u_{tt}^{m}\left(t\right), w_k\right) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \eta_{im}''(t) w_i(x), w_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(w_i(x), w_k\right) \eta_{im}''(t),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\alpha\left(u^m(t), w_k\right) &= \mathcal{A}_\alpha\left(\sum_{i=1}^{m} \eta_{im}(t) w_i(x), w_k\right) \\
&= \int_\Omega \alpha\left(x,t\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{m} \eta_{im}(t) w_i(x)\right) \frac{\partial w_k\left(x\right)}{\partial x} dx \\
&= \sum_{i=1}^{m} \eta_{im}(t) \int_\Omega \alpha\left(x,t\right) \frac{\partial w_i(x)}{\partial x} . \frac{\partial w_k\left(x\right)}{\partial x} dx \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}_\alpha\left(w_i(x), w_k\left(x\right)\right) \eta_{im}(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\beta\left(u_t^m(t), w_k\right) &= \mathcal{A}_\beta\left(\sum_{i=1}^{m} \eta_{im}'(t) w_i(x), w_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}_\beta\left(w_i(x), w_k\left(x\right)\right) \eta_{im}'(t).
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
u^m(x,0) &= \sum_{i=1}^{m} \eta_{im}(0) w_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \zeta_{im} w_i(x) \longrightarrow \varphi \text{ lorsque } m \longrightarrow +\infty,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

et

$$\begin{aligned}
u_t^m(x,0) &= \sum_{i=1}^{m} \eta_{im}'(0) w_i(x) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \chi_{km} w_k \longrightarrow \psi \text{ lorsque } m \longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

On obtient un système d'équations différentielles non-linéaires du deuxièume ordre

$$\left\{\begin{array}{l}
\sum\limits_{i=1}^{m} \left(w_i, w_k\right) \frac{d^2\eta_{im}}{dt^2}(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}_\alpha\left(w_i, w_k\right) \eta_{im}(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}_\beta\left(w_i, w_k\right) \frac{d\eta_{im}}{dt}(t) \\
+ \left(g\left(u^m(t)\right), w_k\right) = \left(f(t), w_k\right), \\
\\
\eta_{im}(0) = \zeta_{im}, \quad \eta_{im}'(0) = \chi_{im}, \ \forall i = 1, \ldots, m.
\end{array}\right. \tag{2.7}$$

On considère les fonctions $\eta_m = (\eta_{1m}(t), \ldots, \eta_{mm}(t))$, $F_m = ((f, w_1), \ldots, (f, w_m))$, $C_m = (g(u^m(t)), w_j)_{1\leq j\leq m}$ et les matrices $D_m = ((w_i, w_j))_{1\leq i,j\leq m}$, $A_m = (\mathcal{A}_\alpha(w_i, w_j))_{1\leq i,j\leq m}$ et $B_m = (\mathcal{A}_\beta(w_i, w_j))_{1\leq i,j\leq m}$.
On écrit le problème (2.7) sous forme matricielle, on trouve

$$\begin{cases} D_m \frac{d^2\eta_{im}}{dt^2}(t) + A_m \eta_m(t) + B_m \frac{d\eta_{im}}{dt}(t) + C_m = F_m, \\ \eta_m(0) = (\zeta_{im})_{1\leq i\leq m}, \quad \eta'_{im}(0) = (\chi_{im})_{1\leq i\leq m}. \end{cases}$$

Comme les entrées de la matrice D_m sont linéairement indépendantes alors $\det(D_m) \neq 0$ donc elle est inversible, alors η_m est la solution de

$$\begin{cases} \frac{d^2\eta_{im}}{dt^2}(t) + D_m^{-1} A_m \eta_m(t) + D_m^{-1} B_m \frac{d\eta_m}{dt}(t) + D_m^{-1} C_m = D_m^{-1} f_m, \\ \eta_m(0) = (\zeta_{im})_{1\leq i\leq m}, \quad \eta'_{im}(0) = (\chi_{im})_{1\leq i\leq m}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Grâce à la méthode des itérations usuelles de Picard utilisée pour les équations différentielles ordinaires, on peut conclure qu'il existe un t_m dépend de m tel que dans l'intervalle $[0, t_m]$ le problème (2.8) admet une solution locale unique.

Etape 2. Estimations à priori.

Estimation (I).

On multiplie l'équation de (2.5) par $\eta'_{km}(t)$ et on somme sur k, on trouve

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m} (u_{tt}^m(t), w_k).\eta'_{km}(t) + \sum_{k=1}^{m} \mathcal{A}_\alpha(u^m(t), w_k).\eta'_{km}(t) \\ &\sum_{k=1}^{m} \mathcal{A}_\beta(u_t^m(t), w_k).\eta'_{km}(t) + \sum_{k=1}^{m} (g(u^m(t)), w_k).\eta'_{km}(t) \\ &= \sum_{k=1}^{m} (f(t), w_k).\eta'_{km}(t), \end{aligned}$$

puis, on trouve

$$\begin{aligned} &(u_{tt}^m(t), u_t^m(t)) + \mathcal{A}_\alpha(u^m(t), u_t^m(t)) + \mathcal{A}_\beta(u_t^m(t), u_t^m(t)) \\ &+ (g(u^m(t)), u_t^m(t)) \\ &= (f(t), u_t^m(t)), \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{A}_\alpha(u^m(t), u_t^m(t)) + \mathcal{A}_\beta(u_t^m(t), u_t^m(t)) + (g(u^m(t)), u_t^m(t)) \\ &= (f(t), u_t^m(t)). \end{aligned} \tag{2.9}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{A}_\alpha\left(u^m(t),u^m(t)\right) &= \int_\Omega \frac{d}{dt}\alpha\left(x,t\right)u^m(t).u^m(t)dx\\ &= \int_\Omega \alpha'\left(x,t\right)u_x^m(t).u_x^m(t)dx+2\mathcal{A}_\alpha\left(u^m(t),u_t^m(t)\right),\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{A}_\alpha\left(u^m(t),u_t^m(t)\right)=\frac{d}{dt}\mathcal{A}_\alpha\left(u^m(t),u^m(t)\right)-\frac{1}{2}\int_\Omega \alpha'\left(x,t\right)u_x^m(t).u_x^m(t)dx. \tag{2.10}$$

Moyennant (2.9), (2.10), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t^m\left(t\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{d}{dt}\mathcal{A}_\alpha\left(u^m(t),u^m(t)\right)+\mathcal{A}_\beta\left(u_t^m\left(t\right),u_t^m\left(t\right)\right)\\ &\leq \left(f(t),u_t^m\right)+\frac{1}{2}\int_\Omega \alpha'\left(x,t\right)u_x^m(x,t).u_x^m(x,t)dx-\left(g\left(u^m(t)\right),u_t^m\left(t\right)\right).\end{aligned}$$

Par intégration de 0 à t on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|u_t^m\left(t\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\mathcal{A}_\alpha\left(u^m(t),u^m(t)\right)+\int_0^t \mathcal{A}_\beta\left(u_t^m\left(s\right),u_t^m\left(s\right)\right)ds\\ &\leq \int_0^t \left(f(s),u_t^m\right)ds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \alpha'\left(x,s\right)u_x^m(x,s).u_x^m(x,s)dxds-\int_0^t\left(g\left(u^m(s)\right),u_t^m\left(s\right)\right)ds\\ &+\frac{1}{2}\left\|\psi\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\alpha_1\left\|\varphi_x\right\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}$$

où $\alpha_1=\max\limits_{(x,t)\in Q}\left|\alpha\left(x,t\right)\right|.$

En utilisant l'inégalité de Young, ainsi que la coercivité de $\mathcal{A}_\alpha\left(\cdot,\cdot\right)$ et $\mathcal{A}_\beta\left(\cdot,\cdot\right)$, il résulte

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|u_t^m\left(t\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\alpha_0\left\|u_x^m\left(t\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\beta_0\int_0^t\left\|u_{xt}^m\left(s\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2ds \\ &\leq 2\int_0^t\left\|f(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2ds+\frac{1}{2}\int_0^t\left\|u_t^m\left(s\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2ds\\ &+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega\alpha'\left(x,s\right)\left(u_x^m\left(x,s\right)\right)^2dxds-\int_0^t\left(g\left(u^m(s)\right),u_t^m\left(s\right)\right)ds\\ &+\frac{1}{2}\left\|\psi\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\alpha_1\left\|\varphi_x\right\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned} \tag{2.11}$$

D'après les hypothèses sur $\alpha\left(x,t\right)$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega\alpha'\left(x,s\right)\left(u_x^m\left(x,s\right)\right)^2dxds\leq\frac{1}{2}\max_{(x,t)\in Q}\left|\alpha'\left(x,s\right)\right|\int_0^t\left\|u_x^m\left(s\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2ds. \tag{2.12}$$

En utilisant les propriétés de la fonction $g\left(\cdot\right)$, il vient

$$\int_0^t\left(g\left(u^m(s)\right),u_t^m\left(s\right)\right)ds\leq 2\left(c_g\right)^2\int_0^t\left\|u^m(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2ds+\frac{1}{2}\int_0^t\left\|u_t^m\left(s\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2ds. \tag{2.13}$$

En insérant les formules (2.12) et (2.13) dans (2.11), on déduit l'existence d'une constante

$$C_* = \frac{1}{2} \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_1 \|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)} + 2 \|f(s)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

indépendante de m telle que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|u^m_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_0 \|u^m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \beta_0 \int_0^t \|u^m_t(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \\ &\leq C_* + \int_0^t \|u^m_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \left(c_\alpha + 2(c_g)^2\right) \int_0^t \|u^m(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

On conclut donc en particulier que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|u^m_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_0 \|u^m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ &\leq C_* + \max\left(1, c_\alpha + 2(c_g)^2\right) \int_0^T \left(\|u^m_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u^m(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right) ds. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$\|u^m_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u^m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq C, \text{ où } C \text{ constante independante de } m.$$

Ainsi, on obtient

$$\|u^m_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u^m\|^2_{L^\infty\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right)} + \|u^m_t\|^2_{L^2\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right)} \leq C_1, \tag{2.14}$$

où C_1 constante indépendante de m.

Estimation $(\mathbf{II})$. **(La régularité).**

Dérivons l'´equation (2.5) en t et multiplions par $\eta''_{km}(t)$, on obtient, après sommation en k

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u^m_{tt}(t), u^m_{tt}(t)\right) + \mathcal{A}_\alpha\left(u^m_t(t), u^m_{tt}(t)\right) + \mathcal{A}_\beta\left(u^m_{tt}(t), u^m_{tt}(t)\right) \\ &+ \left(g'(u^m(t))\, u^m_t(t), u^m_{tt}(t)\right) \\ &= \left(\partial_t f(t), u^m_{tt}(t)\right) - \int_\Omega \alpha'(x,t)\, u^m_x(x,t) . u^m_{xtt}(x,t)\, dx - \int_\Omega \beta'(x,t)\, u^m_{xt}(x,t) . u^m_{xtt}(x,t)\, dx, \end{aligned}$$

puis, en utilisant le fait que

$$\mathcal{A}_\alpha\left(u^m_t(t), u^m_{tt}(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{A}_\alpha\left(u^m_t(t), u^m_t(t)\right) - \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha'(x,t)\, u^m_{xt}(x,t) . u^m_{xt}(x,t) dx,$$

on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(u^m_{tt}(t), u^m_{tt}(t)\right) + \mathcal{A}_\alpha\left(u^m_t(t), u^m_t(t)\right)\right] + \mathcal{A}_\beta\left(u^m_{tt}(t), (u^m)_{tt}\right) \\ &= \left(\partial_t f(t), u^m_{tt}(t)\right) - \int_\Omega \alpha'(x,t) \left[u^m_x(x,t) . u^m_{xtt}(x,t) - \frac{1}{2}\left(u^m_{xt}(x,t)\right)^2\right] dx \\ &- \int_\Omega \beta'(x,t)\, u^m_{xt}(x,t) . u^m_{xt}(x,t)\, dx - \left(g'(u^m(t))\, u^m_t(t), u^m_{tt}(t)\right), \end{aligned}$$

Par intégration de 0 à t, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|u_{tt}^{m}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\alpha_0}{2}\left\|u_{t}^{m}(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\beta_0\int_0^t\left\|u_{tt}^{m}(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \qquad (2.15)\\
&\leq \int_0^t\left|\left(\partial_t f(s),u_{tt}^{m}(s)\right)\right| ds\\
&+\int_0^t\int_\Omega\left|\alpha'(x,s)\right|\left[\left|u_{x}^{m}(x,s).u_{xtt}^{m}(x,s)\right|+\frac{1}{2}\left|u_{xt}^{m}(x,s)\right|^2\right]dxds\\
&+\int_0^t\int_\Omega\left|\beta'(x,s)\right|\left|u_{xt}^{m}(x,s)\right|\left|u_{xtt}^{m}(x,s)\right|dxds+\int_0^t\left|\left(g'\left(u^m(s)\right)u_{t}^{m}(s),u_{tt}^{m}(s)\right)\right|ds\\
&+\frac{1}{2}\left\|u_{tt}^{m}(0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\alpha_1\left\|\psi\right\|_{H^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Nous passons maintenant à majorer le deuxième membre d'inégalité ci-dessus.
Pour le premier terme, on a

$$\int_0^t\left|\left(\partial_t f(s),u_{tt}^{m}(s)\right)\right| ds\leq\int_0^t\left\|\partial_t f(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds+\int_0^t\left\|u_{tt}^{m}(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2. \qquad (2.16)$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy Schwartz et l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_\Omega\left|\alpha'(x,s)\right|\left[\left|u_{x}^{m}(x,s)\,u_{xtt}^{m}(x,s)\right|+\frac{1}{2}\left|u_{xt}^{m}(x,s)\right|^2\right]dxds \qquad (2.17)\\
&\leq C_{\alpha'}\int_0^t\left\|u^{m}(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds+C_{\alpha'}\int_0^t\left\|u_{tt}^{m}(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds+C_{\alpha'}\int_0^t\left\|u_{t}^{m}(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds,
\end{aligned}$$

où $C_{\alpha'}=\max\limits_{(x,t)\in Q}\left|\alpha'(x,t)\right|$.
De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_\Omega\left|\beta'(x,s)\right|\left|u_{xt}^{m}(x,s)\right|\left|u_{xtt}^{m}(x,s)\right|dxds \qquad (2.18)\\
&\leq C_{\beta'}\int_0^t\left\|u_{t}^{m}(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds+C_{\beta'}\int_0^t\left\|u_{tt}^{m}(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds,
\end{aligned}$$

telle que $C_{\beta'}=\max\limits_{(x,t)\in Q}\left|\beta'(x,t)\right|$.
Par la condition (2.2), on trouve

$$\int_0^t\left|\left(g'\left(u^m(s)\right)u_{t}^{m}(s),u_{tt}^{m}(s)\right)\right|ds\leq c_{g'}\int_0^t\left\|u_{t}^{m}(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds+c_{g'}\int_0^t\left\|u_{tt}^{m}(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds. \qquad (2.19)$$

Enfin, il faut estimer le terme $\left\|u_{tt}^{m}(0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$. Posons $t=0$ dans l'´equation (2.5), on trouve

$$\begin{aligned}
\left(u_{tt}^{m}(0),w_k\right)&=-\mathcal{A}_\alpha\left(u^m(0),w_k\right)-\mathcal{A}_\beta\left(u_t^m(0),w_k\right)\\
&\quad-\left(g\left(u^m(0)\right),w_k\right)+\left(f(0),w_k\right),\ \forall k=1,\ldots,m,
\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\left(u_{tt}^{m}(0), w_k\right) = \int_{\Omega} \partial_x \left(\alpha(x,0) u_x^m(0)\right).w_k(x)\,dx + \int_{\Omega} \partial_x \left(\beta(x,0) u_{xt}^m(0)\right).w_k(x)\,dx$$
$$-\left(g\left(u^m(0)\right), w_k\right) + \left(f(0), w_k\right), \quad \forall k = 1, \dots, m,$$

en multipliant par $\eta_{km}''(0)$ et sommant en k, on conclut que

$$\left(u_{tt}^{m}(0), u_{tt}^{m}(0)\right) = \int_{\Omega} \partial_x \left(\alpha(x,0) u_x^m(0)\right).u_{tt}^m(0)\,dx + \int_{\Omega} \partial_x \left(\beta(x,0) u_{xt}^m(0)\right).u_{tt}^m(0)\,dx$$
$$-\left(g\left(u^m(0)\right), u_{tt}^m(0)\right) + \left(f(0), u_{tt}^m(0)\right),$$

D'après (2.4) et le lemme 1.3, on déduit que $f(0) \in L^2(\Omega)$. Donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient

$$\left\|u_{tt}^m(0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(c_\alpha \|\varphi\|_{H^2(\Omega)} + c_\beta \|\psi\|_{H^2(\Omega)} + c_g \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|f(0)\|_{L^2(\Omega)}\right) \left\|u_{tt}^m(0)\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc, il vient

$$\left\|u_{tt}^m(0)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0, \tag{2.20}$$

telle que

$$C_0 = c_\alpha \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + c_\beta \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + c_g \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|f(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

En remplaçant (2.16),(2.17),(2.18), (2.19) et (2.20) dans (2.15), on trouve

$$\frac{1}{2}\left\|u_{tt}^m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha_0}{2}\left\|u_t^m(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \beta_0 \int_0^t \left\|u_{tt}^m(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds$$
$$\leq \left(1 + C_{\alpha'} + C_{\beta'} + c_{g'}\right) \int_0^t \left\|u_{tt}^m(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \left(C_{\alpha'} + C_{\beta'} + c_{g'}\right) \int_0^t \left\|u_t^m(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds$$
$$+ \alpha_0 \|\psi\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_0^t \left\|\partial_t f(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2}C_0 + C_{\alpha'} \int_0^t \left\|u^m(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds.$$

D'autre part, d'après l'estimation (2.14), on déduit l'existence d'une constante C_1 indépendante de m telle que

$$C_{\alpha'} \int_0^t \left\|u^m(s)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \leq C_1.$$

Maintenant, nous appliquons le lemme de Gronwall, on obtient

$$\left\|u_{tt}^m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|u_t^m(t)\right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C.$$

Ainsi on obtient

$$\left\|u_{tt}^m\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \left\|u_{tt}^m\right\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}^2 + \left\|u_t^m\right\|_{L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}^2 \leq C, \tag{2.21}$$

où C une constante indépendante de m.

On suppose que $t_m = T$. D'après (2.14) et (2.21), en déduit

$$\begin{cases} u^m \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ u_t^m \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ u_{tt}^m \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right). \end{cases} \tag{2.22}$$

Etape 3. Passage à la limite.

On déduit de (2.22) qu'on peut extraire des sous-suites convergentes u^d, u_t^d et u_{tt}^d de u^m, u_t^m et u_{tt}^m respectivement telles que

$$\begin{cases} u^d \rightharpoonup^* u \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ u_t^d \rightharpoonup^* u_t \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ u_{tt}^d \rightharpoonup^* u_{tt} \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ u_{tt}^d \rightharpoonup u_{tt} \quad \text{dans} \quad L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \end{cases} \tag{2.23}$$

lorsque $d \longrightarrow +\infty$.

En particulier, il résulte de (2.14) que

$$\begin{aligned} &u^d \text{ est bornée dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ &u_t^d \text{ est bornée dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right). \end{aligned}$$

On sait que d'après le Théorème de Lions [10] l'injection de l'espace

$$H_1 = \left\{v : v \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \text{ et } v_t \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right\},$$

dans $L^2\left(\Omega\left(0,T\right)\right)$ est compacte. Donc

$$u^d \longrightarrow u \text{ dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \text{ fortement et presque par tout dans } \Omega\left(0,T\right). \tag{2.24}$$

Comme

$$\left\|g\left(u^d\right)\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_g \left\|u^d\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))},$$

on déduire que

$$g\left(u^d\right) \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Ceci implique que $g\left(u^d\right) \rightharpoonup^* \varsigma$, mais d'après (2.24) on trouve $\varsigma = g\left(u\right)$.

Maintenant on peut passer à la limite dans l'équation (2.5) pour $m = d$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque et $d > k$; on a

$$\begin{aligned} &\left(u_{tt}^d(t), w_k\right) + \mathcal{A}_\alpha\left(u^d(t), w_k\right) + \mathcal{A}_\beta\left(u_t^d(t), w_k\right) + \left(g\left(u^d(t)\right), w_k\right) \\ &= \left(f(t), w_k\right). \end{aligned}$$

D'après le resultat de convergence (2.23), on déduit que

$$\begin{aligned}&(u_{tt}(t), w_k) + \mathcal{A}_\alpha (u(t), w_k) + \mathcal{A}_\beta (u_t(t), w_k) + (g(u(t)), w_k) \\ &= (f(t), w_k).\end{aligned}$$

Comme V_m est dense dans V, on obtient pour tout $v \in V$

$$(u_{tt}(t), v) + \mathcal{A}_\alpha (u(t), v) + \mathcal{A}_\beta (u_t(t), v) + (g(u(t)), v) = (f(t), v).$$

D'où u satisfait le problème variationnel (2.3), et par suite satisfait la première équation dans (2.1).

Étape 4. Vérifications des conditions initiales.

Reste à montrer que la solution u vérifie les conditions initiales. On a

$$\begin{aligned} u^d(t) &\rightharpoonup u(t) \text{ dans } L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \\ u_t^d(t) &\rightharpoonup u_t(t) \text{ dans } L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right). \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.3, on déduite que la fonction $u^d(t)$ est continue sur $[0, T]$, alors continue en 0 donc

$$u^d(x, 0) \rightharpoonup u(x, 0).$$

Grâce à (2.6), on obtient

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Par la même téchnique on vérifie que

$$u_t(x, 0) = \psi(x).$$

□

2.3.2 Unicité de la solution.

Dans ce paragraphe, on démontre l'unicité de la solution du problème (2.1).

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, la solution obtenue est unique.*

Démonstration. Soient u^1 et u^2 deux solutions, au sens du Théorème 2.1. Donc on obtient

$$\left(u_{tt}^1, v\right) + \mathcal{A}_\alpha(u^1, v) + \mathcal{A}_\beta(u_t^1, v) + \left(g\left(u^1\right), v\right) = (f, v), \quad \forall v \in V, \tag{2.25}$$

et

$$\left(u_{tt}^2, v\right) + \mathcal{A}_\alpha(u^2, v) + \mathcal{A}_\beta(u_t^2, v) + \left(g\left(u^2\right), v\right) = (f, v), \quad \forall v \in V, \tag{2.26}$$

En soustrayant l'équation (2.25) de l'équation (2.26), nous trouvons

$$\left(u_{tt}^1 - u_{tt}^2, v\right) + \mathcal{A}_\alpha(u^1 - u^2, v) + \mathcal{A}_\beta(u_t^1 - u_t^2, v) + \left(g\left(u^1\right) - g\left(u^2\right), v\right) = 0, \forall v \in V.$$

Maintenant, on pose $U = u^1 - u^2$, donc U vérifie

$$\begin{aligned} &(U_{tt}(t), v) + \mathcal{A}_\alpha\left(U(t), v\right) + \mathcal{A}_\beta\left(U_t(t), v\right) + \left(g\left(u^1(t)\right) - g\left(u^2(t)\right), v\right) \\ &= 0, \quad \forall v \in H_0^1\left(\Omega\right). \end{aligned}$$

Comme U_t appartient à $H_0^1\left(\Omega\right)$, on peut remplacer v par U_t. Donc on obtient

$$(U_{tt}(t), U_t(t)) + \mathcal{A}_\alpha\left(U(t), U_t(t)\right) + \mathcal{A}_\beta\left(U_t(t), U_t(t)\right) + \left(g\left(u^1(t)\right) - g\left(u^2(t)\right), U_t(t)\right) = 0.$$

En utilisant le fait que $\mathcal{A}_\beta\left(U_t(t), U_t(t)\right) \geq 0$, nous arrivons à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|U_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mathcal{A}_\alpha\left(U(t), U(t)\right)\right) \\ &\leq \left(g\left(u^1(t)\right) - g\left(u^2(t)\right), U_t(t)\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha'\left(x, t\right) U_x(t).U_x(t)dx. \end{aligned} \tag{2.27}$$

D'autre part, comme $g\left(\cdot\right)$ est lipschitzienne, on trouve

$$\left|\left(g\left(u^1(t)\right) - g\left(u^2(t)\right), U_t(t)\right)\right| \leq k\left\|U\right\|_{L^2(\Omega)} \cdot \left\|U_t(t)\right\|_{L^2(\Omega)},$$

grâce aux inégalités de Poincaré et Young, on conclut que

$$\left|\left(g\left(u^1(t)\right) - g\left(u^2(t)\right), U_t(t)\right)\right| \leq c\left\|U(t)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \left\|U_t(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{2.28}$$

On a aussi

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \alpha'\left(x, t\right) U_x\left(x, t\right).U_x\left(x, t\right) dx \leq C_{\alpha'}\left\|U(t)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \tag{2.29}$$

En remplaçant (2.28) et (2.29) dans (2.27) puis en intégrant sur $(0, t)$, il résulte

$$\frac{1}{2}\left\|U_t(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_0\left\|U(t)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq (c + C_{\alpha'})\int_0^t \left\|U(s)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \left\|U_t(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Nous utilisons le lemme de Gronwall pour déduire de l'inégalité précédente que

$$\left\|U_t(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_0\left\|U(t)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Ceci implique que

$$u^1 = u^2.$$

D'où l'unicité de la solution. $\square$

Chapitre 3

Étude de l'existence et la stabilité exponentielle des solutions d'un système thermoviscoélastique

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et établissons la stabilité asymptotique des solutions d'un système non linéaire unidimensionnel décrivant la déformation d'une membrane viscoélastique en présence de chaleur. On va montrer que le système est exponentiellement stable.

3.1 Formulation du problème

Soit $(0, L)$ un intervalle ouvert et bornée de $\mathbb{R}$. Pour $t \in (0, T)$, on note $Q = (0, L)$ x $(0, T)$. Dans Q on considère le système thermo-viscoélastique suivant
Problème $\mathcal{P}$: Trouve le déplacement $u : Q \to \mathbb{R}$ et la température $\theta : Q \to \mathbb{R}$, tel que

$$u_{tt} - \delta u_{xx} - \beta u_{xxt} + \alpha\theta_x + g(u_t) = 0 \text{ dans } Q, \tag{3.1}$$

$$\theta_t - K\theta_{xx} + \alpha u_{xt} = 0 \text{ dans } Q, \tag{3.2}$$

$$u(0, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0 \text{ pour } t > 0, \tag{3.3}$$

$$-\delta u_x(L, t) - \beta u_{xt}(L, t) = h(t)u_t(L, t) \text{ pour } t \geq 0, \tag{3.4}$$

$$h_t(t) = ru_t^2(L, t) \text{ pour } t \geq 0, \quad h(0) = h_0 > 0, \quad r > 0, \tag{3.5}$$

$$u(x, 0) = \vartheta_0(x),\ u_t(x, 0) = \vartheta_1(x),\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \text{ pour } x \in [0, L]. \tag{3.6}$$

Où δ, β, α et K sont des constantes positives et $h(t)$ est une fonction de classe $C^1(0, +\infty)$. Le système (3.1) -(3.6) représente la déformation d'un matériau viscoélastique, qui conduit à une génération de chaleur due à la dissipation d'énergie.
Le système thermo-viscoélastique (3.1)-(3.6) permet de modéliser et de comprendre le comportement complexe de matériaux soumis simultanément à des contraintes mécaniques et thermiques. Ce système apparaît dans de nombreuses applications. Il permet par exemple de comprendre le comportement des matériaux de construction exposés aux changements de température, comme les ponts ou les routes. Il peut également être utilisé pour analyser les matériaux utilisés dans les structures aéronautiques soumises à d'importants changements de température, en plus de gérer les contraintes thermiques dans les composants électroniques pour éviter les défaillances dues à des cycles thermiques répétés.
Dans ce travail nous étudierons le problème ci-dessus, sous les hypothèses suivantes :
(H_1)

$$-\delta\vartheta_0'(L) - \beta\vartheta_1'(L) = h_0\vartheta_1(L).$$

(H_2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et il existe des constantes positives μ_1 et μ_2 telle que

$$\mu_1|s| \leq |g(s)| \leq \mu_2|s|, \forall s \in \mathbb{R}.$$

En plus

$$g(s)s \geq 0.$$

(H_3) On suppose que $\alpha \leq 2K$ et $2(\alpha + \mu_2)\lambda \leq \delta$, où $\lambda > 0$ une constante telle que $||u||^2_{L^2(0,L)} \leq \lambda||u_x||^2_{L^2(0,L)}$.

3.2 Problème variationnel

Pour dériver la formulation faible du problème, nous définissons le sous-espace fermé de $H^1(0,L)$

$$\mathcal{V}=\left\{u\in H^1(0,L):u(0)=0\right\}.$$

Remarque 3.1. *L'espace $\mathcal{V}$ est séparable et $\mathcal{D}(0,L)$ est dense dans $\mathcal{V}$, c'est à dire*

$$\mathcal{V}=\overline{\mathcal{D}(0,L)};\ \textit{telle que }:\forall v\in\mathcal{V};\exists v_n\in\mathcal{D}(0,L):v_n\longrightarrow v\textit{ dans }\mathcal{V}.$$

Soit (u,θ) une solution du problème (3.1)-(3.6). En multipliant l'équation(3.1) par une fonction test $\varphi\in H^1(0,L)$; et intégrons sur $(0,L)$; on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^L u_{tt}\varphi dx-\delta\int_0^L u_{xx}\varphi dx-\beta\int_0^L u_{xxt}\varphi dx\\&+\alpha\int_0^L\theta_x\varphi dx+\int_0^L g\left(u_t\right)\varphi dx\\&=0,\end{aligned}$$

grâce à la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned}&\int_0^L u_{tt}\varphi dx+\delta\int_0^L u_x\varphi_x dx+\beta\int_0^L u_{xt}\varphi_x dx\\&-\left[\delta u_x(L,t)+\beta u_{xt}(L,t)\right]+\left[u_x(0,t)+\beta u_{xt}(0,t)\right]\\&+\alpha\int_0^L\theta_x\varphi dx+\int_0^L g\left(u_t\right)\varphi dx\\&=0.\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant la condition aux limites (3.4), il vient que

$$\begin{aligned}&\int_0^L u_{tt}\varphi dx+\delta\int_0^L u_x\varphi_x dx+\beta\int_0^L u_{xt}\varphi_x dx\\&+h\left(t\right)u_t(L,t)\varphi\left(L\right)+\left[u_x(0,t)+\beta u_{xt}(0,t)\right]\varphi\left(0\right)\\&+\alpha\int_0^L\theta_x\varphi dx+\int_0^L g\left(u_t\right)\varphi dx\\&=0,\end{aligned}$$

si nous prenons $\varphi\in\mathcal{V}$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^L u_{tt}\varphi dx+\delta\int_0^L u_x\varphi_x dx+\beta\int_0^L u_{xt}\varphi_x dx\\&+\alpha\int_0^L\theta_x\varphi dx+\int_0^L g\left(u_t\right)\varphi dx+h\left(t\right)u_t(L,t)\varphi\left(L\right)\\&=0,\ \forall\varphi\in\mathcal{V}.\end{aligned}$$

D'autre part, en multipliant l'équation (3.2) par une fonction test $\psi \in H^1(0,L)$; et intégrons sur $(0,L)$; on obtient

$$\int_0^L \theta_t \psi dx - K \int_0^L \theta_{xx} \psi dx + \alpha \int_0^L u_{xt} \psi dx = 0.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_0^L \theta_t \psi dx + K \int_0^L \theta_x \psi dx + \alpha \int_0^L u_{xt} \psi dx = 0,$$

pour tout $\psi \in H_0^1(0,L)$.

On peut alors poser le problème variationnel de la façon suivante

Problème $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$. Trouver $(u,\theta) \in \mathcal{V}xH_0^1(0,L)$ tel que

$$\begin{aligned}&(u_{tt},\varphi) + \delta\,(u_x,\varphi_x) + \beta\,(u_{xt},\varphi_x) + \alpha\,(\theta_x,\varphi) + (g\,(u_t)\,,\varphi)\\&+ h\,(t)\,u_t(L,t)\varphi\,(L)\\&= 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{V},\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$(\theta_t,\psi) + K\,(\theta_x,\psi_x) + \alpha\,(u_{xt},\psi) = 0,\quad \psi \in H_0^1(0,L). \tag{3.8}$$

Où $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire dans $L^2(0,L)$.

Remarque 3.2. *Pour tous $\psi \in H_0^1(0,L)$, on a*

$$\begin{aligned}(u_{xt},\psi) &= \int_0^L u_{xt}\,(x)\,\psi\,(x)\,dx\\&= -\int_0^L u_t\,(x)\,\psi_x\,(x)\,dx + [u_t\,(x)\,\psi\,(x)]_0^L\\&= -\,(u_t,\psi_x)\,.\end{aligned}$$

3.3 Résultat de l'existence des solutions

Théorème 3.1. *Supposons que*

$$\left.\begin{aligned}&u_0 \in \mathcal{V} \cap H^2(0,L),\\&u_1 \in \mathcal{V},\\&\theta_0 \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L).\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Alors, il existe une solution du systéme (3.1) -(3.6) *satisfaisant*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \\ u_t &\in L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \\ u_{tt} &\in L^2(0,T;\mathcal{V}), \\ \theta &\in L^2(0,T;H_0^1(0,L)), \\ \theta_t &\in L^2(0,T;H_0^1(0,L)). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous utilisons la méthode de Galerkin.

Premiére étape. On cherche des solutions approchées.

Soit $\mathcal{V}_m = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ l'éspace engendré par la famille $\{w_i\}_{i=1}^m$ est dense dans $\mathcal{V} \cap H^2(0,L)$ et $\mathcal{H}_m = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ l'éspace engendré par la famille $\{v_i\}_{i=1}^m$ est dense dans $H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$. Ensuite, nous définissons la solution approchée (u^m, θ^m) par

$$u^m(x,t) = \sum_{i=1}^m \chi_{im}(t) w_i(x),\ \theta^m(x,t) = \sum_{i=1}^m \eta_{im}(t) v_i(x).$$

Donc les coefficients χ_{im} et η_{im} satisfaisant le système

$$\begin{aligned} &(u_{tt}^m, w_i) + \delta(u_x^m, w_{ix}) + \alpha(\theta_x^m, w_i) + \beta(u_{xt}^m, w_{ix}) \\ &+ (g(u_t^m), w_i) + h^m(t) u_t^m(L,t) w_i(L) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$(\theta_t^m, v_i) + K(\theta_x^m, v_{ix}) + \alpha(u_{xt}^m, v_i) = 0, \tag{3.11}$$

$$h_t^m(t) = r\left[\sum_{i=1}^m \chi'_{im}(L,t) w_i(L)\right]^2 = r[u_t^m(L,t)]^2,\ h^m(0) = h_0 > 0, \tag{3.12}$$

$$u^m(0) = \vartheta_0^m \to \vartheta_0 \text{ dans } \mathcal{V} \cap H^2(0,L),\ \vartheta_t^m(0) = \vartheta_1^m \to \vartheta_1 \text{ dans } \mathcal{V}, \tag{3.13}$$

$$\theta^m(0) = \theta_0^m \to \theta_0 \text{ dans } H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L). \tag{3.14}$$

Par les méthodes standard des équations différentielle, nous pouvons prouver l'existance d'une solution locale de (3.10)-(3.14)sur un certain intervalle $[0, t_m]$, ou $t_m = T$.

Dans la suite, c désigne une constante générique positive.

Deuxième étape. Les estimations a priori.

Estimation I. En multipliant l'équation (3.10) par χ'_{im} et sommons sur i. On aura

$$\begin{aligned} &(u_{tt}^m, u_t^m) + \delta(u_x^m, u_{xt}^m) + \alpha(\theta_x^m, u_t^m) + \beta(u_{xt}^m, u_{xt}^m) + (g(u_t^m), u_t^m) \\ &+ h^m(t)\left[u_t^m(L,t)\right]^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant (3.12), nous arrivons à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||u_t^m||^2_{L^2(0,L)}+\delta||u_x^m||^2_{L^2(0,L)}+\frac{1}{r}|h^m(t)|^2\right)\\&+(g(u_t^m),u_t^m)+\alpha(\theta_x^m,u_t^m)+\beta||u_{xt}^m||^2_{L^2(0,L)}\\&=0.\end{aligned}\tag{3.15}$$

D'autre part, en multipliant l'équation (3.11) par η_{im} et sommation sur i, on déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\theta^m||^2_{L^2(0,L)}+K||\theta_x^m||^2_{L^2(0,L)}-\alpha(\theta_x^m,u_t^m)=0.\tag{3.16}$$

En combinant (3.15) et (3.16) et en utilisant le fait que $(g(u_t^m),u_t^m)\geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[||u_t^m||^2_{L^2(0,L)}+\delta||u_x^m||^2_{L^2(0,L)}+||\theta^m||^2_{L^2(0,L)}+\frac{1}{r}|h^m(t)|^2\right]\\&+\beta||u_{xt}^m||^2_{L^2(0,L)}+K||\theta_x^m||^2_{L^2(0,L)}\\&\leq 0.\end{aligned}\tag{3.17}$$

En intégrant (3.17) sur $(0,t)$ et en utilisant (3.9), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[||u_t^m||^2_{L^2(0,L)}+||u_x^m||^2_{L^2(0,L)}+||\theta^m||^2_{L^2(0,L)}+\frac{1}{r}|h^m(t)|^2\right]\\&+\beta||u_{xt}^m||^2_{L^2(0,L)}+K||\theta_x^m||^2_{L^2(0,L)}\\&\leq c,\end{aligned}\tag{3.18}$$

où

$$c=||u_1||^2_{L^2(0,L)}+\delta||u_0||^2_{H^1(0,L)}+||\theta_0||^2_{L^2(0,L)}+\frac{1}{r}|h_0|^2.$$

Estimation II. Tout d'abord, en dérive (3.10) et (3.11), pour obtenir

$$\begin{aligned}&(u_{tt\,t}^m,w_i)+\delta(u_{xt}^m,w_{ix})+\alpha(\theta_{xt}^m,w_i)+\beta(u_{xtt}^m,w_{ix})+(g'(u_t^m)\,u_{tt}^m,w_i)\\&+h_t^m(t)u_t^m(L,t)w_i(L)+h^m(t)u_{tt}^m(L,t)w_i(L)\\&=0,\end{aligned}$$

et

$$(\theta_{tt}^m,v_i)+K(\theta_{xt}^m,v_{ix})+\alpha(u_{xtt}^m,v_i)=0.$$

Maintenant, en multipliant la première équation par χ''_{im} et la deuxième équation par η_{im}, puis en additionnant les résultats, on obtient

$$\begin{aligned}&(u_{tt\,t}^m,u_{tt}^m)+\delta(u_{xt}^m,u_{xtt}^m)+\alpha(\theta_{xt}^m,u_{tt}^m)+\beta(u_{xtt}^m,u_{xtt}^m)+(g'(u_t^m)\,u_{tt}^m,u_{tt}^m)\\&+(\theta_{tt}^m,\theta_t^m)+K(\theta_{xt}^m,\theta_{xt}^m)-\alpha(u_{tt}^m,\theta_{xt}^m)+h_t^m(t)u_t^m(L,t)u_{tt}^m(L,t)+h^m(t)\left[u_{tt}^m(L,t)\right]^2\\&=0,\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{2dt}\left[\|u_{tt}^m\|_{L^2(0,L)}^2+\delta\|u_{xt}^m\|_{L^2(0,L)}^2+\|\theta_t^m\|_{L^2(0,L)}^2+\frac{r}{2}\left[u_t^m(L,t)\right]^4\right]\\&+\beta\|u_{xtt}^m\|_{L^2(0,L)}^2+\left(g'\left(u_t^m\right)u_{tt}^m,u_{tt}^m\right)+K\|\theta_{xt}^m\|_{L^2(0,L)}^2\\&=0.\end{aligned}$$

En intégrant cette formule sur $(0,t)$, on arrive à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\|u_{tt}^m\|_{L^2(0,L)}^2+\delta\|u_{xt}^m\|_{L^2(0,L)}^2+\|\theta_t^m\|_{L^2(0,L)}^2+\frac{r}{2}\left[u_t^m(L,t)\right]^4\right]+\beta\int_0^t\|u_{xtt}^m(t)\|_{L^2(0,L)}^2\\&+\int_0^t\left(g'\left(u_t^m\right)u_{tt}^m,u_{tt}^m\right)ds+K\int_0^t\|\theta_{xt}^m\|_{L^2(0,L)}^2\,ds+\int_0^t h^m(s)\left[u_{tt}^m(L,s)\right]^2ds\\&=||u_{tt}^m(0)||_{L^2(0,L)}^2+||\theta_t^m(0)||_{L^2(0,L)}^2+||\vartheta_1||_{H^1(0,L)}^2+\frac{r}{4}|\vartheta_1(L,0)|^4.\end{aligned} \tag{3.19}$$

En utilisant la conditions (H_2), on voit que

$$\left|\int_0^t\left(g'\left(u_t^m\right)u_{tt}^m,u_{tt}^m\right)ds\right|\leq c\int_0^t||u_{tt}^m(s)||_{L^2(0,L)}^2ds.$$

En insérant ce estimation dans (3.19) et puis on utilise le fait que $\int_0^t h^m(s)|u_{tt}^m(L,s)^2|ds>0$, on conclut que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}||u_{tt}^m||_{L^2(0,L)}^2+\frac{\delta}{2}||u_{xt}^m||_{L^2(0,L)}^2+\frac{r}{4}|u_t^m(L,t)|^4\\&+\frac{1}{2}||\theta_t^m||_{L^2(0,L)}^2+\frac{\beta}{2}\int_0^t||u_{xtt}^m||_{L^2(0,L)}^2ds+K\int_0^t||\theta_{xt}^m||_{L^2(0,L)}^2ds\\&\leq c\int_0^t||u_{tt}^m(t)||_{L^2(0,L)}^2ds+||u_{tt}^m(0)||_{L^2(0,L)}^2+||\theta_t^m(0)||_{L^2(0,L)}^2+||\vartheta_1||_{H^1(0,L)}^2+\frac{r}{4}|\vartheta_1(L,0)|^4.\end{aligned}$$

Maintenant, il faut estimer les termes $||u_{tt}^m(0)||_{L^2(0,L)}^2$ et $||\theta_t^m(0)||_{L^2(0,L)}^2$. En choisissant $w_i=u_{tt}^m(0)$ et $v_i=\theta_t^m(0)$ dans (3.10) et (3.11), respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned}||u_{tt}^m(0)||_{L^2(0,L)}^2\;\leq\;&\big(\delta||u_{xx}^m(0)||_{L^2(0,L)}+\alpha||\theta_t^m(0)||_{L^2(0,L)}\\&+\beta\|u_{xxt}^m(0)\|_{L^2(0,L)}+||g(u_t^m(0))||_{L^2(0,L)}\big).||u_{tt}^m(0)||_{L^2(0,L)},\end{aligned}$$

et

$$||\theta_t^m(0)||_{L^2(0,L)}^2\leq\left(K||\theta_{xx}^m(0)||_{L^2(0,L)}+\alpha||u_{xt}^m(0)||_{L^2(0,L)}\right).||\theta_t^m(0)||_{L^2(0,L)}.$$

Grâce à les hypothèses (3.9), on trouve

$$||u_{tt}^m(0)||_{L^2(0,L)}\leq c\;\text{ et }\;||\theta_t^m(0)||_{L^2(0,L)}\leq c.$$

Donc, nous concluons

$$\frac{1}{2}||u_{tt}^m||_{L^2(0,L)}^2 + \frac{\delta}{2}||u_{xt}^m||_{L^2(0,L)}^2 + \frac{r}{4}|u_t^m(L,t)|^4 + \frac{1}{2}||\theta_t^m||_{L^2(0,L)}^2 \tag{3.20}$$
$$+ \frac{\beta}{2}\int_0^t |||u_{xtt}^m||_{L^2(0,L)}^2 ds + k\int_0^t ||\theta_{xt}^m||_{L^2(0,L)}^2 ds \leq c\int_0^t ||u_{tt}^m\,(t)\,||_{L^2(0,L)}^2 ds + c,$$

avec

$$c = ||u_{tt}^m\,(0)\,||_{L^2(0,L)}^2 + ||\theta_t^m(0)||_{L^2(0,L)}^2 + ||\vartheta_1||_{H^1(0,L)}^2 + \frac{r}{4}|\vartheta_1(L,0)|^4.$$

Maintenant, en appliquant le lemme de Gronwall dans (3.20), on obtient l'estimation

$$||u_{tt}^m||_{L^2(0,L)}^2 + ||u_{xt}^m||_{L^2(0,L)}^2 + |u_t^m(L,t)|^4 + ||\theta_t^m||_{L^2(0,L)}^2 \tag{3.21}$$
$$+ \int_0^t |||u_{xtt}^m||_{L^2(0,L)}^2 ds + \int_0^t ||\theta_{xt}^m||_{L^2(0,L)}^2 ds$$
$$\leq c,$$

où C est une constante indépendante de m.

Troisième étape. Passage à la limite.

D'après (3.18) et (3.21), il existe des sous-suites de (u^m) et (θ^m), notées également par (u^m) et (θ^m), tel que

$$\begin{cases} u^m \rightharpoonup^* u \text{ dans } L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \\ u_t^m \rightharpoonup^* u_t \text{ dans } L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \\ u_{tt}^m \rightharpoonup^* u_{tt} \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(0,L)), \\ u_{tt}^m \rightharpoonup u_{tt} \text{ dans } L^2(0,T;\mathcal{V}), \\ \theta^m \rightharpoonup^* \theta \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)), \\ \theta_t^m \rightharpoonup^* \theta_t \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)), \\ h^m \rightharpoonup^* h \text{ dans } L^\infty(0,T), \\ h_t^m \rightharpoonup^* h_t \text{ dans } L^\infty(0,T), \\ u_t^m(L,t) \rightharpoonup^* u_t(L,t) \text{ dans } L^\infty(0,T). \end{cases} \tag{3.22}$$

On sait que l'injection $L^2(0,T;\mathcal{V}) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,L))$ est compacte, donc nous avons

$$u_t^m \to u_t \text{ fortement dans } L^2(0,T;L^2(0,L)).$$

En utilisant l'estimation (3.18) et (H_2) pour conclure

$$\|g(u_t^m)\|_{L^2(0,L)}^2 \leq c,$$

donc on obtient

$$g(u_t^m) \rightharpoonup^* g(u_t) \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(0,L).$$

Maintenant, on montre que les fonctions u et θ vérifient les équations (3.7)-(3.8).
On pose $m = m_k$ et on fixe i tel que $m_k > i$, on trouve

$$\begin{aligned}
&(u_{tt}^{m_k}, w_i) + (u_x^{m_k}, w_{ix}) + \alpha(\theta_x^{m_k}, w_i) + \beta(u_{xt}^{m_k}, w_{ix}) \\
&+ (g(u_t^{m_k}), w_i) + h^{m_k}(t)u_t^{m_k}(L,t)w_i(L) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et

$$(\theta_t^{m_k}, v_i) + K(\theta_x^{m_k}, v_{ix}) + \alpha(u_{xt}^{m_k}, v_i) = 0,$$

Par passage à la limite quand $m_k \to \infty$, on conclut que

$$\begin{aligned}
&(u_{tt}, w_i) + \delta(u_x, w_{ix}) + \alpha(\theta_x, w_i) + \beta(u_{xt}, w_{ix}) \\
&+ (g(u_t), w_i) + h(t)u_t(L,t)w_i(L) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et

$$(\theta_t, v_i) + K(\theta_x, v_{ix}) + \alpha(u_{xt}, v_i) = 0,$$

En utilisant la densité de $\mathcal{V}_m$ dans l'espace séparable $\mathcal{V}$ et la densité de $\mathcal{H}_m$ dans l'espace $H_0^1(0,L)$ on deduit que

$$\begin{aligned}
&(u_{tt}, \varphi) + \delta(u_x, \varphi_x) + \alpha(\theta_x, \varphi) + \beta(u_{xt}, \varphi_x) + (g(u_t), \varphi) \\
&+ h(t)u_t(L,t)\varphi(L) \\
&= 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{V},
\end{aligned}$$

et

$$(\theta_t, \psi) + K(\theta_x, \psi_x) + \alpha(u_{xt}, \psi) = 0, \quad \forall \psi \in H_0^1(0,L).$$

Finalement, nous choisissons $\varphi, \psi \in D(0,L)$ puis on utilisons la formule de Green, on obtient (u,θ) satisfait

$$\begin{cases}
u_{tt} - \delta u_{xx} + \alpha\theta_x + \beta u_{xt} + g(u_t) = 0, \\
\theta_t + K\theta_x + \alpha u_{xt} = 0.
\end{cases} \quad \text{p.p dans } Q.$$

Quatrième étape. Vérifications des conditions initiales.

D'après les résultats de convergence (3.22), nous concluons que

$$u^m \rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty(0,T;\mathcal{V}),$$

et

$$u_t^m \rightharpoonup u_t \text{ dans } L^\infty(0,T;\mathcal{V}).$$

Grâce le lemme 1.3 il résulte que (u^m) est continue sur $[0,T]$ alors continue en 0 et on a

$$u^m(x,0) \longrightarrow u(x,0).$$

D'auter part, selon (3.13), on a

$$u^m(x,0) \longrightarrow \vartheta_0(x).$$

Donc, on déduit que

$$u(x,0) = \vartheta_0(x).$$

Par la même technique on vérifie que

$$u_t(x,0) = \vartheta_1(x),$$

et

$$\theta(x,0) = \theta_0(x).$$

□

3.4 Stabilité exponentielle

Dans cette section, nous montrons la stabilité exponentielle des solutions du système (3.1)-(3.6). Pour cela, nous définissons la fonction de l'énergie $E(t)$ du système (3.1)-(3.6) par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |u_t(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L |\theta(t)|^2 dx + \frac{\delta}{2}\int_0^L |u_x(t)|^2 dx.$$

Lemme 3.1. *La fonction de l'énergie est décroissante et sa dérivée est donnée par*

$$E'(t) = -\beta||u_{xt}(t)||^2_{L^2(0,L)} - K||\theta_x(t)||^2_{L^2(0,L)} - (g(u_t(t),u_t(t)) - h(t)[u_t(L,t)]^2 \leq 0.$$

Démonstration. En choisissant $\varphi = u_t$ dans la formule (3.7) et $\psi = \theta$ dans la formule (3.8), nous trouvons l'équation

$$\begin{aligned}
&(u_{tt},u_t) + \delta(u_x,u_{xt}) + \beta(u_{xt},u_{xt}) + \alpha(\theta_x,u_t) + (g(u_t),u_t) \\
&+ h(t)\,u_t(L,t)u_t(L,t) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et

$$(\theta_t,\theta)+K(\theta_x,\theta_x)-\alpha(u_t,\theta_x)=0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{2dt}\left[\|u_t\|^2_{L^2(0,L)}+\delta\|u_x\|^2_{L^2(0,L)}\right]+\beta\|u_{xt}\|_{L^2(0,L)}+\alpha(\theta_x,u_t)\\&+(g(u_t),u_t)+h(t)(u_t(L,t))^2\\&=0,\end{aligned}$$

et

$$\frac{d}{2dt}\|\theta\|^2_{L^2(0,L)}+k\|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)}-\alpha(u_t,\theta_x)=0.$$

En additionnant les deux formules ci-dessus, on trouve

$$\frac{d}{dt}\left[\overbrace{\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(0,L)}+\frac{\delta}{2}\|u_x\|^2_{L^2(0,L)}+\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(0,L)}}^{E(t)}\right]=\underbrace{-\beta\|u_{xt}\|_{L^2(0,L)}-(g(u_t),u_t)-h(t)u_t^2(L,t)}_{\leq 0}.$$

Par conséquent

$$E'(t)\leq 0.$$

Donc la fonction de l'énergie $E(t)$ est décroissante. □

Pour étudier la stabilité exponentielle, nous définissons la fonction de l'énergie perturbée par

$$E_\epsilon(t)=E(t)+\epsilon\psi(t), \tag{3.23}$$

où $\epsilon>0$ est un petit paramètre et

$$\psi(t)=(\theta(t),\theta(t))+(u_t(t),u(t)). \tag{3.24}$$

Proposition 3.1. *Il existe $C_1>0$ tel que*

$$|E_\epsilon(t)-E(t)|\leq\epsilon C_1E(t),\forall t\geq 0, \tag{3.25}$$

Démonstration. On a

$$E_\epsilon(t)=E(t)+\epsilon\psi(t),$$

ceci implique que

$$|E_\epsilon(t)-E(t)|=\epsilon|\psi(t)|.$$

Comme

$$\psi(t)=(\theta(t),\theta(t))+(u_t(t),u(t)),$$

en déduire que

$$|E_\epsilon(t) - E(t)| \leq \epsilon\, |(\theta(t), \theta(t))| + \epsilon\, |(u_t(t), u(t))| \, .$$

En utilisant les inégalités de Young et de Poincaré , on trouve

$$\begin{aligned} |E_\epsilon(t) - E(t)| &\leq \epsilon \left(\|\theta(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \|u(t)\|^2_{L^2(0,L)} \right) \\ &\leq \epsilon \left(\|\theta(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \lambda \|u_x(t)\|^2_{L^2(0,L)} \right), \end{aligned}$$

nous concluons

$$|E_\epsilon(t) - E(t)| \leq \epsilon \max\left(2, \frac{2\lambda}{\delta}\right) \left(\underbrace{\frac{1}{2} \|\theta(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \frac{1}{2} \|u_t(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \frac{\delta}{2} \|u_x(t)\|^2_{L^2(0,L)}}_{E(t)} \right).$$

Donc, en déduire que, il existe $C_1 > 0$ tel que

$$|E_\epsilon(t) - E(t)| \leq \epsilon C_1 E(t).$$

□

Proposition 3.2. *La fonction ψ satisfait l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(t) &\leq -E\,(t) + \left(2\alpha + \frac{1}{2}\right) \|\theta(t)\|^2_{L^2(0,L)} + 2\alpha \|u_{xt}(t)\|^2_{L^2(0,L)} \\ &\quad + \left(\frac{3}{2} + \mu_2\right) \|u_t(t)\|^2_{L^2(0,L)} - u(L,t)h(t)u_t(L,t). \end{aligned}$$

Démonstration. En dérivant la formule (3.24), nous obtenous

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = 2\,(\theta(t), \theta_t(t)) + (u(t), u_{tt}(t)) + \|u_t(t)\|^2_{L^2(0,L)} \, .$$

En utilisant le fait que

$$2\,(\theta(t), \theta_t(t)) = -2k \,\|\theta_x(t)\|^2 - 2\alpha\,(\theta(t), u_{xt}(t))\,,$$

et

$$\begin{aligned} (u(t), u_{tt}(t)) &= -\delta \,\|u_x(t)\|^2_{L^2(0,L)} - \beta\,(u_x(t), u_{xt}(t)) \\ &\quad -\alpha\,(u(t), \theta_x(t)) - (g\,(u_t(t))\,, u(t)) - u(L,t)h(t)u_t(L,t), \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(t) &= -2k \,\|\theta_x(t)\|^2_{L^2(0,L)} - 2\alpha\,(\theta(t), u_{xt}(t)) - \delta\,\|u_x(t)\|^2_{L^2(0,L)} - \alpha\,(u(t), \theta_x(t)) \\ &\quad - (g\,(u_t(t))\,, u(t)) - u(L,t)h(t)u_t(L,t) + \|u_t(t)\|^2 \, . \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalités de Young et l'inégalité de poincaré, nous déduisons

$$|-2\alpha\left(\theta(t), u_{xt}(t)\right)| \leq 2\alpha\|\theta(t)\|^2_{L^2(0,L)} + 2\alpha\left\|u_{xt}(t)\right\|^2_{L^2(0,L)}, \tag{3.26}$$

et

$$|-\alpha\left(u(t), \theta_x(t)\right)| \leq \alpha\|\theta_x(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \alpha\lambda\left\|u_x(t)\right\|^2_{L^2(0,L)}. \tag{3.27}$$

On a aussi par le hypothèse (H_2)

$$|-\left(g\left(u_t(t)\right), u(t)\right)| \leq \mu_2\left\|u_t(t)\right\|^2_{L^2(0,L)} + \mu_2\lambda\left\|u_x(t)\right\|^2_{L^2(0,L)}. \tag{3.28}$$

En se basant sur (3.26) $-$ (3.28), on arrive à

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\psi(t) \leq{}& (-2k+\alpha)\left\|\theta_x(t)\right\|^2 + \left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\|\theta(t)\|^2_{L^2(0,L)} + 2\alpha\left\|u_{xt}(t)\right\|^2_{L^2(0,L)} \\
&+ \left((\alpha\lambda+\mu_2\lambda)-\frac{\delta}{2}\right)\left\|u_x(t)\right\|^2_{L^2(0,L)} \\
&- \Bigg[\underbrace{\frac{\delta}{2}\left\|u_x(t)\right\|^2_{L^2(0,L)} + \frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \frac{1}{2}\left\|u_t(t)\right\|^2_{L^2(0,L)}}_{E(t)}\Bigg] \\
&- u(L,t)h(t)u_t(L,t) + \left(\frac{3}{2}+\mu_2\right)\left\|u_t(t)\right\|^2_{L^2(0,L)}.
\end{aligned}$$

Nous avons $(\alpha\lambda+\mu_2\lambda)-\frac{\delta}{2} \leq 0$ et $-2k+\alpha \leq 0$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\psi(t) \quad\leq\quad & -E\left(t\right) + \left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\|\theta(t)\|^2_{L^2(0,L)} + 2\alpha\left\|u_{xt}(t)\right\|^2_{L^2(0,L)} \\
&+ \left(\frac{3}{2}+\mu_2\right)\left\|u_t(t)\right\|^2_{L^2(0,L)} - u(L,t)h(t)u_t(L,t).
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3. *Il existe une constante positive C_2 tel que*

$$\frac{d}{dt}E_\epsilon(t) \leq -\epsilon E(t) + \epsilon C_2 h(t)[u(L,t)]^2, \quad \forall t \geq 0, \quad \epsilon \in (0, \epsilon_1],$$

où

$$\epsilon_1 = \min\left\{\frac{\beta}{\left(\left(\frac{3}{2}+\mu_2\right)\lambda+2\alpha\right)}, \frac{K}{\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\lambda}, 2\right\}.$$

Démonstration. En dérivant la formule (3.23), nous obtenous

$$\frac{dE_\epsilon(t)}{dt} = \frac{dE(t)}{dt} + \frac{d\psi(t)}{dt}.$$

En utilisant le résultat du proposition 3.2, nous trouvons

$$\begin{aligned}\frac{dE_\epsilon(t)}{dt} &= \frac{dE(t)}{dt}\\ &+\epsilon\left(-E(t)+\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\|\theta(t)\|^2_{L^2(0,L)}+2\alpha\|u_{xt}(t)\|^2_{L^2(0,L)}\right.\\ &\left.+\left(\frac{3}{2}+\mu_2\right)\|u_t(t)\|^2_{L^2(0,L)}-u(L,t)h(t)u_t(L,t)\right).\end{aligned}$$

D'un autre côté nous avons

$$\frac{dE(t)}{dt}=E'(t)=-\beta||u_{xt}(t)||^2_{L^2(0,L)}-\kappa||\theta_x(t)||^2_{L^2(0,L)}-(g(u_t(t),u_t(t))-h(t)[u_t(L,t)]^2.$$

Alors, on déduit que

$$\begin{aligned}\frac{dE_\epsilon(t)}{dt} &= -\beta||u_{xt}(t)||^2_{L^2(0,L)}-\kappa||\theta_x(t)||^2_{L^2(0,L)}-(g(u_t(t),u_t(t))-h(t)[u_t(L,t)]^2\\ &+-\epsilon E(t)+\epsilon\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\|\theta(t)\|^2_{L^2(0,L)}+2\alpha\epsilon\|u_{xt}(t)\|^2_{L^2(0,L)}\\ &+\left.\left(\frac{3}{2}+\mu_2\right)\epsilon\|u_t(t)\|^2_{L^2(0,L)}-\epsilon u(L,t)h(t)u_t(L,t)\right),\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $-(g(u_t(t),u_t(t))\leq 0$ et l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{dE_\epsilon(t)}{dt} &\leq -\beta||u_{xt}(t)||^2_{L^2(0,L)}-K||\theta_x(t)||^2_{L^2(0,L)}-h(t)[u_t(L,t)]^2\\ &-\epsilon E(t)+\epsilon\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\lambda\|\theta_x(t)\|^2_{L^2(0,L)}+2\alpha\epsilon\|u_{xt}(t)\|^2_{L^2(0,L)}\\ &+\left.\left(\frac{3}{2}+\mu_2\right)\epsilon\lambda\|u_{tx}(t)\|^2_{L^2(0,L)}+\frac{1}{2}\epsilon h(t)[u(L,t)]^2+\frac{h(t)}{2}[u_t(L,t)]^2\right),\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}\frac{dE_\epsilon(t)}{dt} &\leq -\epsilon E(t)+\left(-\beta+\epsilon\left(\left(\frac{3}{2}+\mu_2\right)\lambda+2\alpha\right)\right)||u_{xt}(t)||^2_{L^2(0,L)}\\ &+\left(-K+\epsilon\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\lambda\right)||\theta_x(t)||^2_{L^2(0,L)}-\left(1-\frac{1}{2}\epsilon\right)h(t)[u_t(L,t)]^2\\ &+\frac{h(t)}{2}[u_t(L,t)]^2.\end{aligned}$$

Maintenant, si nous prenons

$$\epsilon_1=\min\left\{\frac{\beta}{\left(\left(\frac{3}{2}+\mu_2\right)\lambda+2\alpha\right)},\frac{K}{\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\lambda},2\right\},$$

et en considérant que $\epsilon\in[0,\epsilon_1]$, nous obtenons

$$\frac{dE_\epsilon(t)}{dt}\leq-\epsilon E(t)+\frac{\epsilon}{2}h(t)(u(L,t))^2,\forall t\geq 0.$$

La preuve de la proposition 3.3 est terminée. □

Maintenant, nous sommes en mesure de donner le résultat de la stabilité exponentielle.

Théorème 3.2. *Soit* (u, θ) *la solution faible du système* (3.1)-(3.6), *alors il existe des constantes* $\kappa > 0$ *et* $\nu > 0$ *dépendant des données initiales telles que*

$$E(t) \leq \kappa \exp\left(-\nu t\right), \forall t \geq 0.$$

Démonstration. D'après la proposition 3.3, on a

$$\frac{d}{dt}E_\epsilon(t) \leq -\epsilon E(t) + \frac{\epsilon}{2}h(t)(u(L,t))^2, \forall t \geq 0. \tag{3.29}$$

D'autre part, d'après la proposition 3.1, on a

$$|E_\epsilon(t) - E(t)| \leq \epsilon C_1 E(t),$$

ceci implique que

$$-\epsilon C_1 E(t) \leq E_\epsilon(t) - E(t) \leq \epsilon C_1 E(t),$$

alors, on déduit que

$$\left(1 - \epsilon C_1\right) E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq \left(1 + \epsilon C_1\right) E(t). \tag{3.30}$$

Par conséquent

$$-E(t) \leq -\frac{E_\epsilon(t)}{(1 + \epsilon C_1)}, \tag{3.31}$$

Maintenant, en utilisant (3.31) puis en intégrant l'inégalité 3.29 sur $(0, t)$, il résulte que

$$E_\epsilon(t) \leq \frac{-\epsilon}{1 + \epsilon C_1}\int_0^t E_\epsilon(s)ds + E_\epsilon(0) + \frac{\epsilon}{2}\sup|h(t)|\int_0^t (u(L,s))^2 ds, \forall t \geq 0,$$

et en utilisant le fait que $\int_0^t (u(L,\tau))^2 d\tau \leq M$, puis en utilisant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$E_\epsilon(t) \leq \left(\kappa_1 + E_\epsilon(0)\right) \exp\left(-\frac{\epsilon}{\left(\frac{1}{2} + \epsilon C_1\right)}t\right), \forall t \geq 0, \tag{3.32}$$

avec

$$\kappa_1 = \frac{1}{2}\sup|h(t)|\, M.$$

D'après (3.30), on a

$$E(t) \leq \frac{E_\epsilon(t)}{(1 - \epsilon C_1)}. \tag{3.33}$$

Donc, pour ϵ suffisamment petit, en utilisant (3.32) et (3.33), on trouve

$$E(t) \leq \frac{1}{1 - \epsilon C_1}E_\epsilon(t) \leq \left(\kappa_1 + E_\epsilon(0)\right) \exp\left(-\nu t\right), \forall t \geq 0.$$

Par conséquent

$$E(t) \leq \kappa \exp\left(-\nu t\right), \forall t \geq 0,$$

où

$$\kappa = \frac{\kappa_1 + E_\epsilon(0)}{1 - \epsilon C_1} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon C_1}.$$

$\square$

Conclusion

Ce mémoire était consacrée à l'étude de certains problèmes aux limites non linéaires.
Dans ce travail, nous avons traité les deux problèmes suivants :

✓ Le **premier problème** est d'analyser la question de l'existence et de l'unicité de la solution d'un problème hyperbolique semi-linéaire. Sous certaines conditions sur les données, nous avons prouvé que le problème admet une solution unique, basée sur les approximations de Galerkin et la méthode de compacité.

✓ Pour le **deuxième problème**, nous avons étudié un système décrivant la déformation d'une membrane visqueuse en présence de chaleur (système thermoviscoélastique). En utilisant la méthode de Galerkin, nous avons prouvé que le problème admet au moins une solution. Nous avons ensuite démontré la stabilité exponentielle des solutions.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, NewYork, 1975.

[2] Y. Boukhatem, B. Benyattou and R. Abita, *Méthode de Faedo-Galerkin pour un problème aux limites non-linéaire*. Analele Universităţii Oradea. Fasc. Matematica, Tom XVI 167–181(2009).

[3] A. Bouziani, N. Merazga and S. Benamira, *Galerkin method applied to a parabolic evolution problem with nonlocal boundary conditions*. Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications, 69(5-6) (2008), 1515-1524.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson. Parie.New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[5] D. Claire et G. Pierre, *Équations aux dérivées partielles, cours et exercices corrigés*. 2éme édition. Dunod-Sciences-Sup 19 Août 201. Paris, 2015.

[6] S. J. Farlow, *Partial differential equations for scientists and engineers*. Courier Corporation, (1993).

[7] B. Helffer, *Cours edp-roumanie-2014, introduction aux équations aux dérivées partielles, analyse de fourier et introduction aux distributions*. Université Paris sud, version pour la Roumanie, Février 2014.

[8] Y. H. Kang, *Existence and exponential stability for a thermoviscoelastic equation with boundary output feedback control*. Kyungpook Mathematical Journal, 56(2)(2016), 517-527.

[9] H. Le Dret, *La méthode de Galerkin. In : Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires*. Mathématiques et Applications, vol 72. Springer, Berlin, Heidelberg, (2013).

[10] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*. Dunod, Paris, 1969.

[11] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action. From Moddeling to Theory*. Third Edition, Springer International Publishing Switzerland 2016.

[12] A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*. Academic press, (1949).

[13] M. Willem, *Analyse convexe et optimisation*. By CIACO s.c. ISBN : 2-87085-124-3, 1987.