الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET

LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE BLIDA 1

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

Présenté par

TALHA Nesrine

Sur le thème :

Analyse mathématiques de certains problèmes aux limites paraboliques

---

Soutenue publiquement, le 2/07/2024 devant le jury composé de :

Mr. BERKANE Djamel	MCA	Univ. Blida1	Président
Mr. DILMI Mohamed	MCA	Univ. Blida1	Promoteur
Mr. HAOUES Moussa	MCB	Univ. Blida1	Examinateur

Année universitaire : 2023/2024

Remerciements

Ce mémoire représente un moment tres important de ma vie, d'une part, parce qu'elle est l'aboutissement de mon cursus universitaire et d'autre part parce que c'est un de mes réves qui se réalise. Bien entendu, je n'ai pas fait ce travail seul et à ce titre je tiens à remercier tous ceux qui yont contribué.

Je voudrais tout d'abord et avant tout, il est important de rendre grace à **Dieu** pour son soutien et son inspiration dans nos realisations, les defficultes que nous rencontrons en cours de route ne font que renforcer notre persévérance et notre détermination.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui m'ont soutenu tout au long de la réalisation de ce mémoire. Je souhaite remercier sincérement mon superviseur monsieur **DILMI Mohamed** pour ses précieux conseils et son soutien constant je tiens égualement à remercier chaleureuxment ma familles et mes amis pour leur encouragement et leur soutien inconditionnel leur confiance en moi a été une veritable source de motivation. Merci également à **SAHAR Mohamed** et **LARKECHE Islam** , mes collégues d'etudes et les premier de leur promotions pour vos efforts et votre soutien.

Je tiens également à remercier les membres du jury qui ont bien voulu lire et examiner notre travail.

Enfin, je voudrais exprimer ma reconnaissance en vers : tous les participants de mon étude, qui ont generalement partagé leur temps et leur connaissances. Leur contributions à été essentielle pour la reussite de ce mémoire. "Merci à tous"

Dédicace

Je dédie ce travail :

♡ À ma mére, la source de tendresse et la lumiére qui guide mes routes et qui m'emméne aux chemins de la réussite, et pour tous ses sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.

♡ À mon pére que je la remercie énormément pour ses efforts.

♡ À mes grends parents **Hamide et Khedauedj** pour leurs conseils et surveillances.

♡ À ma chére soeure **Yasmine** et chére frére **Mohamed**.

♡ À ma famille.

♡ À moi même.

♡ À tous mes enseignants sons exception.

Enfin, j'offre mes bénédictions à tous ceux qui m'ont soutenu dans l'accomplissement de ce travail.

الملخص

هذه المذكرة مخصصة لتحليل بعض المسائل الحدودية المكافئة. في هذا العمل ندرس التحليل الرياضياتي لمسألتين حدوديتين مكافئتين.

- المسألة الأولى هي نموذج رياضياتي تحكمه معادلة الانتشار في وجود حد غير خطي. في ظل افتراضات معينة، تم إثبات وجود الحل وتفرده باستخدام طريقة فايدو- غلاركين.
- المسألة الثانية هي مسألة حدودية لنظام مكافئ موضوع في مجال رقيق ثنائي الأبعاد Ω^{ε}.

أولاً، استخدمنا طريقة فايدو-غلاركين لاثبات ان المشكلة تقبل حلا. بعد ذلك قمنا بدراسة السلوك المقارب للحل

عندما يصبح سمك المجال ε صغيرًا جدًا.

الكلمات المفتاحية *: التحليل المقارب؛ الوجود و التفرد؛ طريقة فايدو- غلاركين؛ نظام مكافئ.*

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'analyse de certains problèmes aux limites paraboliques. Nous étudions dans ce travail l'analyse mathématique de deux problèmes aux limites paraboliques.

• Le premier problème est un modèle mathématique gouvernée par l'equation de diffusion avec un terme non linéaire. Sous certaines hypothèses, l'existence de la solution a été prouvées par la méthode de Faedo-Galerkin.

• Le second problème est un problème aux limites pour un système parabolique posé dans un domaine mince bidimensionnel Ω^{ε}. Tout d'abord, nous utilisons la méthode de Faedo-Galerkin pour démontrer que le problème admet une solution unique. Ensuite, nous étudions le comportement asymptotique de la solution lorsque l'épaisseur du domaine ε devient très petite.

Mots clés : *Analyse asymptotique ; Existence et unicité ; Méthode de Faedo-Galerkin ; Système parabolique* .

Abstract

This work is devoted to the analysis of certain parabolic boundary problems. In this work we study the mathematical analysis of two parabolic boundary problems.

• The first problem is a mathematical model governed by the diffusion equation with a nonlinear term. Under certain assumptions, the existence of the solution has been proven by the Faedo-Galerkin method.

• The second problem is a boundary problem for a parabolic system posed in a thin two-dimensional domain Ω^ε. First, we use the Faedo-Galerkin method to demonstrate that the problem admits a unique solution. Then, we study the asymptotic behavior of the solution when the thickness of the domain ε becomes very small.

Keywords : *Asymptotic analysis ; Existence and uniqueness ; Faedo-Galerkin method ; Parabolic system.*

Notation

EDP :	Équation aux dérivées partielles.
$:=$:	L'égalité par définition (affectation).
p.p :	Presque partout.
c, C :	Des constantes génériques strictement positives.
Ω :	Un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
Γ, $\partial\Omega$:	Frontière de Ω .
$\frac{\partial}{\partial n}$:	Dérivée normale extérieur.
$D(\Omega)$:	Espace des fonctions différentiable à support compact dans Ω.
$D'(\Omega)$:	Dual topologique de $D(\Omega)$.
D^α :	La dérivée d'ordre α au sens des distributions.
$L^p(\Omega)$:	L'espace de Lebesgue.
$\|\cdot\|_X$:	La norme de l'espace X.
X' :	Espace dual topologique de X.
$(\cdot, \cdot)$:	Le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.
div :	Opérateur divergence.
∇ :	Opérateur gradient.
∂_t :	Les dérivations première de u par rapport au temps.
∂_x :	La dérivée partielle première de u par rapport à x.
$u_n \longrightarrow u$:	La convergence forte de la suite (u_n) vers l'élément u.
$u_n \rightharpoonup u$:	La convergence faible de la suite (u_n) vers l'élément u.
$u_n \rightharpoonup^* u$:	La convergence faible * de la suite (u_n) vers l'élément u.

Table des matières

Introduction

L'équation aux dérivées partielles (en abrégé PDE) est une équation contenant une fonction inconnue u de deux variables ou plus et un nombre fini de dérivées partielles. Les équations aux dérivées partielles sont un outil essentiel pour modéliser de nombreux phénomènes physiques. Par exemple, elles sont utilisées en électromagnétisme (équation de Maxwell), en mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes), en mécanique quantique (équation de Schrödinger), en physique statique : phénomènes vibratoires (équation d'onde) et phénomène de diffusion (équation de la chaleur). . . etc.
Ces dernières années, de nombreux problèmes physiques, mécaniques et biologiques ont été formulés à l'aide d'équations aux dérivées partielles paraboliques, souvent avec des conditions aux limites. Ces problèmes sont appelés problèmes aux limites paraboliques.
Les équations paraboliques, en particulier, sont utilisées pour étudier des phénomènes où le temps est un facteur clé. Elles ont montré leur efficacité dans la description de la dynamique des fluides, thermique et chimique, y compris de nombreuses applications de fonte et de gel de la glace de mer [14], de la coulée continue de l'acier [12] et des batteries lithium-ion [8].
Au cours des cinquante dernières années, de nombreux articles de recherche ont été publiés sur l'étude et l'analyse des problèmes aux limites paraboliques, nous mentionnons par exemple, que les auteurs dans [6] ont utilisé la méthode de Faedo-Galerkin pour prouver l'existence d'une solution généralisée à une classe d'équations parabolique quasi-linéaire avec des conditions aux limites non locales. L'article [4] est consacré à l'étude d'un modèle parabolique mixte avec les conditions aux limites intégrales qui en résultent dans le contexte de la thermoélasticité. L'existence et l'unicité de la solution faible ont été prouvées par la méthode de Faedo-Galerkin. Dans le travail [2], l'existence, l'unicité et l'homogénéité des solutions au problème parabolique non linéaire avec des conditions aux limites dynamiques ont été étudiées. L'article [9] traite du comportement limite des équations de réaction-diffusion stochastiques pilotées par un bruit multiplicatif et des termes déterministes non autonomes définis sur des domaines minces. L'article [3] concerne l'analyse du

comportement asymptotique de solutions de PDE parabolique dans un domaine mince avec un comportement hautement oscillatoire dans sa frontière. Dans l'article [11], l'étude numérique de l'équation de la chaleur avec conditions aux limites non locales a été discutée. Dans la recherche scientifique, la première question à se poser lors de l'analyse des problèmes aux limites est de savoir si les solutions existent et sont uniques. Mathématiquement, cette question peut être répondue en utilisant l'une des méthodes suivantes :

— La méthode des semi-groupes : une approche particulièrement utile pour les problèmes linéaires, utilisant les propriétés des semi-groupes de contractions.

— La méthode de Faedo-Galerkin : cruciales pour traiter des problèmes avec des données moins régulières ou des non-linéarités.

Pour les problèmes qui ne peuvent pas être résolus analytiquement, les méthodes numériques et les méthodes d'analyse asymptotique sont parmi les plus importantes pour traiter ce type de problèmes.
Dans ce mémoire, nous étudierons l'existence, l'unicité ainsi que le comportement asymptotique des solutions de deux problèmes aux limites paraboliques.
Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

• Dans le **premier chapitre**, nous donnons quelques notions et résultats généraux d'analyse fonctionnelle (la topologie faible et faible *, l'injection topologique...etc) ainsi quelques concepts et définitions de base qui vont êtres utilisés dans les chapitres suivants de ce mémoire.

• Dans le **deuxième chapitre**, nous étudions un problème aux limites parabolique avec un terme non linéaire. Ce problème décrit le phénomène de diffusion. Tout d'abord, nous dérivons la formulation faible du problème, puis nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible du problème en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. La contribution de ce chapitre réside dans la forme du terme non linéaire et la manière de le traiter.

• Dans le **troisième chapitre**, nous considérons un système parabolique couplé posé dans un domaine mince Ω^ε avec des conditions aux limites de Dirichlet-Fourier. Nous avons d'abord prouvé l'existence et l'unicité de la solution du problème en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. Ensuite, nous avons étudié le comportement asymptotique des solutions lorsque l'épaisseur ε tend vers zéro. Ce chapitre détaille le travail réalisé dans [7].

Bref historique

FIGURE 1 – Boris Grigoryevich Galerkin (1871-1945)

Boris Grigoryevich Galerkin : Galerkin, de son vrai nom, est né le 20 février 1871 à polotsk, en Bielorussie, et mort le 12 juillet 1945 à Mosen, en Russie c'est un mathématicien et ingénieur resse renommé pour ses contributions dans l'étude des treilis de poutres et des plaques élastiques, il est surtout connu pour sa méthode de résolution approximative des structures élastique ; qui est l'une des bases de la méthode des éléments finis, son premier ouvrage scientifique intitulé "une théorie de la conrbure longetudinale et une experience d'application de la theorie de la courbure longetudinale aux cadres à plusieurs étages, aux cadnes", a été publie dans les "transactions des ustituts. Il a également été déstingue par il Academie russe des sciences avec le prise staline.

FIGURE 2 – Allessandro Faedo (1913-2001)

Allessandro Faedo : Samdrs, miex comme sous ce nom, il est ne' a chiampo, pres de Vicenza, en italie, le 18 novembre 1913 et nous a quittes à pise le 16 juin 2001. Samdro etait un sientifique dont l'activite se consentrait principalement dans le domaine de l'analyse générale et numérique. Ses constributions les plus importantes concerment le calcul des variations la theorie des equations differentielles ordinaires lineaires particulier ses ecrits dans ce domaine se concentrent sur ce qu'il appleant "l'analyse existentielles et quantitative des equation aux dérivées partelles (EDP)", en particulier pour les equations élliptique s et hyperboliques le text le plus important de Faedo, publié en 1949 dans les "Annali della sauola normale superiore di pisa", presente une méthode pour résoudre les equations aux dérivées partielles dépendantes du temps cette methode appelle "Methode des moments" par Faedo, est devennue connue sous le nom de "Methode de Faedo-Galerkin".

Chapitre 1

Notions préliminaires

Ce chapitre est consacré à rappeler quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans ce mémoire. Plus précisément, on va donner quelques notions sur la topologie faible (convergence faible, convergence faible *) et sur les espaces fonctionnels, ainsi on introduit quelques inégalités, lemmes et théorèmes. Extraits de R. A. Adams [1], H. Brezis [5], J.L. Lions[10] et S. Salsa [13]. Dans ce chapiter, on désignera par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1.1 Topologie faible

Soient $(X, \|\cdot\|_X))$ un espace de Banach, X' son dual (topologique) et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le crochet de dualité entre X' et X.

1.1.1 Convergence faible

Définition 1.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X et u un élément de X. On dit que, (u_n) converge faiblement vers u dans X si*

$$f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(u), \forall f \in X',$$

ou encore

$$\langle f, u_n\rangle_{X'\times X} \longrightarrow \langle f, u\rangle_{X'\times X},$$

et on écrit

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X.$$

La suite (u_n) converge fortement vers u dans X si

$$\|u_n - u\|_X \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire la convergence au sens de la norme dans X ce cas on note

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } X.$$

Proposition 1.1. *Si la limite faible d'une suite de X existe, elle est unique.*

1.1.2 Convergence faible *

Soit X'' le bidual topologique muni de la norme

$$\|u\|_{X''} = \sup_{f\in X', \|f\|_{X'}\leq 1} |u(f)|.$$

En effet, pour tout élément $x \in X$, on définit $J_x \in X''$ par

$$J_x(f) = f(x).$$

J_x est bien une forme linéaire continue sur X' puisque

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|_X \|f\|_{X'}.$$

Définition 1.2. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X'$ *et* $u \in X'$. *On dit que* (u_n) *converge vers* u *dans* X' *faible * si*

$$u_n(x) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} u(x), \forall x \in X,$$

ou encore

$$\langle u_n, x\rangle_{X'\times X} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} (u, x)_{X'\times X},$$

et on écrit

$$u_n \rightharpoonup^* u \text{ dans } X'.$$

Remarque 1.1. *Si la limite faible * d'une suite de* X' *existe, elle est unique.*

Proposition 1.2. *Soit* H *un espace de Hilbert pour le produit scalaire* $(\cdot,\cdot)_H$ *et* H' *son dual topologique. Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* H *converge faiblement vers* u *dans* H *si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, v)_H = (u, v)_H , \forall v \in H.$$

1.1.3 Espace réflexif , espace séparable

Soit X un espace de Banach et $J : X \longrightarrow X''$ l'injection canonique de X dans X'', définie par

$$J(f)(x) = f(x),$$

pour tout $x \in X$, $f \in X'$.
L'espace X est dit réflexif, si : $J(X) = X''$. On a le résultat

Théorème 1.1. *Toute suite bornée d'un espace de Banach réflexif* X, *admet au moins une sous suite converge faiblement dans* X.

Définition 1.3 (Espace séparable). *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble* $D \subset X$ *dense et dénomblable.*

On donne le résultat

Théorème 1.2. *Si* X *est un espace de Banach séparable, alors de toute suite bornée de* X' *on peut extraire une sous-suite converge faiblement * dans* X'.

Corollaire 1.1. *Soit* X *est un espace de Banach. Alors* X *est réflexif si et seulement si* X' *est réflexif.*

1.2 Espace de Distributions

Distributions sur Ω

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4. *On note par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles ou complexes sur Ω, indéfiniment dérivables à support compact inclus dans Ω. C'est-à-dire*

$$D(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ et } supp\,(u) \text{ est compact} \subset \Omega\},$$

où

$$Supp(u) = \overline{\{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.5. *L'espace des distributions sur Ω est l'ensemble des formes linéaires et continues sur Ω, c'est à dire les éléménts de $D'(\Omega)$, où*

$$D'(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow K;\ \text{Linéaire et Continue}\}.$$

1.2.1 Distributions sur $(0, T)$ à valeurs dans X

Définition 1.6. *$D(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X, c'est-à-dire*

$$D(0, T; X) = \{u :]0, T[\longrightarrow X; u \in C^\infty(0, T), Supp(u) = K \text{ compact} \subset]0, T[\}.$$

Définition 1.7. *L'espace des distributions sur $(0, T)$ à valeurs dans X, noté par $D'(0, T; X)$, est défini par*

$$D'(0, T; X) = \{u : D(0, T) \longrightarrow X;\ \text{Linéaire et Continue}\},$$

muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de $D(0, T)$.

1.3 Les espaces L^p

1.3.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$.
Pour $1 \leq p < \infty$, on note $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des (classes des) fonctions

$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables de p-ième puissance intégrable (au sens de Lebesgue) sur Ω, c'est-à-dire

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty,$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$, on désigne par $L^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega, R)$ l'espace vectoriel des (classes des) fonctions $u : \Omega \longrightarrow R$ mesurables et essentiellement bornées dans Ω, c'est-à-dire

$$\exists M \geq 0, \text{ telle que : } |u(x)| \leq M, \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

muni de sa norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{Supess}\,_{x\in\Omega}|u(x)| = \inf\{M \geq 0; |u(x)| \leq M, \text{ p.p. } x \in \Omega\}.$$

Propriétés

1. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\right)$ est un espace de Banach ;
2. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable ;
3. Pour $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif, et le dual de $L^p(\Omega)$ s'indentifie avec $L^{p'}(\Omega)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
4. Pour $p = 2$, on obtient l'espace $L^2(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire
$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$
et la norme associée
$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.3.2 Les espaces $L^p(\Gamma)$

Définition 1.8. *Si on note $d\Gamma$ la mesure superficielle sur Γ induite par la mesure de Lebesgue dx, alors on définit $L^p(\Gamma), 1 \leq p < \infty$ comme l'ensemble des fonctions $u : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, $|u|^p$ soit intégrable sur Γ ; muni de la norme*

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |u(x)|^p d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lemme 1.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, h_μ et h des fonctions de $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, telle que*

$$\|h_\mu\|_{L^q(\Omega)} \leq c, \text{ et } h_\mu \to h, \quad p.p.dans\ \Omega.$$

Alors

$$h_\mu \rightharpoonup h \text{ dans } L^q(\Omega).$$

1.3.3 Les espaces $L^p(0,T;X)$

Soit X un espace de Banach, avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.9. *On désigne par $L^p(0,T;X)$ l'espace des (classes des) fonctions u mesurables sur $[0,T]$ à valeurs dans X et telles que*

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty.$$

Pour $p = \infty$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup ess_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Définition 1.10. *Soit X un espace de Banach. On dit que la suite (u_n) converge vers u dans l'espace $L^p(0,T;X)$ faible * si*

$$\int_0^T (u_n(t), g(t))\, dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), g(t))dt, \quad \forall g \in L^q(0,T;X),$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Propriétés. On a

1. Pour $1 \leq p < \infty$, Si X est séparable, alors $L^p(0,T;X)$ est séparable.
2. Pour $1 < p < \infty$, Si X est réflexif, alors $L^p(0,T;X)$ est réflexif.
3. Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(0,T;X)$ est un espace de Banach et en particulier, $L^2(0,T;X)$ est un espace de Hilbert, lorsque X est un espace de Hilbert.
4. Pour $1 \leq q \leq r \leq \infty$
$$L^r(0,T;X) \hookrightarrow_{\text{Continue}} L^q(0,T;X).$$
5. L'espace dual de $L^p(0,T;X)$ est $L^{p'}(0,T;X')$, pour $1 < p < \infty$; où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
6. Si X et Y sont deux espaces de Banach tels que : $X \hookrightarrow_{\text{Continue}} Y$, alors
$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow_{\text{Continue}} L^p(0,T;Y) \text{ pour } 1 \leq p \leq \infty.$$

7. $D(0,T;X)$ est dense dans $L^p(0,T;X)$, c'est à dire $L^p(0,T;X) = \overline{D(0,T;X)}$. On peut identifier le dual $L^{p'}(0,T;X)$ de $L^p(0,T;X)$ à un espace des distributions sur $(0,T)$ à valeurs dans X, pour $1 < p \leq \infty$, on a

$$D(0,T;X) \hookrightarrow \overline{D(0,T;X)} = L^p(0,T;X) \subset L^{p'}(0,T;X) \subset D'(0,T;X).$$

8. Si $L^1(0,T;X)$, alors la fonction; $t \longmapsto \int_0^T u(s)ds$ est continue et

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^T u(s)ds\right) = \int_0^T u'(s)ds = u(T) - u(0).$$

Lemme 1.2. *Soit X un espace de Banach. Si*

$$\begin{cases} f \in L^p(0,T;X), \\ \textit{et} \\ \partial_t f \in L^p(0,T;X), 1 \leq p \leq \infty. \end{cases}$$

Alors, f est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0,T)$, continue de $[0,T] \to X$, $(f : [0,T] \to X)$.

1.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de sobolev sont les espaces fonctionnels dont les dérivée au sens faible sont intégrables, ces espaces sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles.

1.4.1 Espace de Sobolev $H^m(\Omega)$

Définition 1.11. *Soit $m \in \mathbb{N}(m \geq 1)$, l'espace de Sobolev d'ordre m, noté $H^m(\Omega)$ est l'ensemble défini par*

$$H^m(\Omega) = \left\{u : u \in L^2(\Omega);\ D^\alpha u \in L^2(\Omega);\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n;\ |\alpha| \leq m\right\},$$

où

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots .\partial x_n^{\alpha_n}},\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

et sont au sens des distributions.

Proposition 1.3. *Les espace $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert, pour le produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_{x_i} u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

ou la norme équivalente

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_{x_i} u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 1.2. *L'espace $H^m(\Omega)$ est séparable.*

1.4.2 Injection de Sobolev

Soit E, F deux espaces de Banach tels que $E \subset F$.

Définition 1.12. *On dit que E s'injecte dans F*

- *De manière continue si l'application*

$$\begin{aligned} Id : E &\longrightarrow F \\ x &\mapsto Id\,(x) = x, \end{aligned}$$

  est continue, et on note

$$E \hookrightarrow_{\textit{continue}} F,$$

- *De manière équivalent $E \hookrightarrow_{\textit{continue}} F$ si*

$$\exists C > 0 : \|Id(x)\|_F = \|x\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Définition 1.13. *On dit que E s'injecte dans F de manière compacte si l'application*

$$\begin{aligned} Id : E &\longrightarrow F \\ x &\mapsto Id\,(x) = x, \end{aligned}$$

est compacte, et on note

$$E \hookrightarrow_{\textit{compacte}} F.$$

C'est-à-dire de toute suite bornée $(x_n)_n$ de E on peut extraire une sous-suite convergente dans F.

1.4.3 Théorème de trace

Nous désignerons par Γ la frontière de Ω.

On supposons que Ω est de classe C^1, alors$\big(D(\bar{\Omega})$ or $C^\infty(\bar{\Omega})\big)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et l'application, $\gamma_0 : D(\bar{\Omega}) \longrightarrow C(\Gamma)$ définie par $\gamma_0(u) = u_{/\Gamma}$, c'est à dire

$$\begin{array}{rcl} D(\bar{\Omega}) & \longrightarrow & C(\Gamma) \\ u & \longmapsto & \gamma_0(u) = u_{/\Gamma}, \end{array}$$

se prolonge par un application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, encore notée par γ_0. En générale, se prolange par une application continue de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Omega)$,

$$\begin{array}{rcl} H^m(\Omega) & \longrightarrow & H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u & \longmapsto & \gamma_0(u) = u_{/\Gamma}. \end{array}$$

En particuliére pour $m = 1$ et $j = 0$, on a

$$\begin{array}{rcl} H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma), \\ u & \longmapsto & \gamma_0(u) = u_{/\Gamma}, \end{array}$$

tel que

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\gamma_0(u)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

pour $m = 2$ et $j = 1$, on a

$$\begin{array}{rcl} H^2(\Omega) & \longrightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma), \\ u & \longmapsto & \gamma_0\left(\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{/\Gamma}, \end{array}$$

tel que

$$\exists C > 0 : \left\|\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

L'application $\gamma_0(\cdot)$ appelée l'application de trace.

1.4.4 Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.14. *$H_0^1(\Omega)$ est l'adérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

Proposition 1.4. *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions nulles sur Γ. C'est à dire*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega); \gamma_0(u) = 0\right\},$$

et dont la norme est définie par

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=0}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2_{L^2(\Omega)} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=0}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou la norme équivalente

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 1.5. *L'espace dual de $H_0^1(\Omega)$ est $H^{-1}(\Omega)$, c'est à dire*

$$\left(H_0^1(\Omega)\right)' = H^{-1}(\Omega).$$

1.4.5 Espace V et $H^1(Q_T)$

On note par V le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, défini par

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\right\},$$

où Γ_1 est une partie de la frontière de Ω.
L'espace V est séparable.

Proposition 1.6. *$D(\Omega)$ est dense dans V, c'est à dire*

$$V = \overline{D(\Omega)};\ \textit{telle que}\ : \forall v \in V; \exists v_n \in D(\Omega) : v_n \longrightarrow v \textit{ dans } V.$$

On peut identifier le dual V' de V à un espace des ditributions sur Ω

$$D(\Omega) \hookrightarrow \overline{D(\Omega)} = V \subset L^2(\Omega) \subset V' \subset D'(\Omega).$$

Soient T un réel strictement positif. On note Q_T le cylindre défini par $Q_T =]0;T[\times\Omega$.
On définit l'espace

$$H^1(Q_T) = \left\{u : u \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right); \partial_t u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\right\},$$

qui l'on munit de la norme définie par

$$\|u\|_{H^1(Q_T)} = \left(\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.3. *L'espace $H^1(Q_T)$ est de Hilbert pour la norme définie ci-dessus.*

Théorème 1.3. *L'injection de $H^1(Q_T)$ dans $L^2(Q_T)$ est compacte.*

1.5 Théorèmes fandamentaux

Nous considérons maintenant quelques Théorèmes importants qui sont utilisés dans ce mémoire.

1.5.1 Théorème de Rellich

On suppose que Ω un ouvert borné de classe C^1, on a

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}^*,$$

où

$$\|u\|_{H^{m-1}(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^m(\Omega)}, \forall u \in H^m(\Omega).$$

En particulièr, on a toujours

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_{\text{compacte}} L^2(\Omega),$$

c'est-à-dire

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^m(\Omega)}, \forall u \in L^2(\Omega),$$

et de toute suite bornée de $H^m(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergence dans $L^2(\Omega)$.

1.5.2 Théorème de compacité

Les résultats de compacité faible et faible * énoncés ci-dessous sont largement utilisés pour passage à la limite dans la plupart des méthodes constructives de résolution des problèmes aux limites.

Théorème 1.4 (Compacité faible * des bornés du dual d'un espace séparable). *Soit X un espace de Banach séparable et soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite bornée de X' (C'est-à-dire il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|u_n\|_{X'} \leq C$ pour tout $n \in N$). Alors il existe une sous-suite, encore notée (u_{n_k}) et $u \in X'$ telle que*

$$u_{n_k} \rightharpoonup^* u \text{ dans } X'.$$

Une application importante de ce théorème est la suivante
Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(u_n)_{n\in N}$ est une suite bornée de $L^\infty(\Omega)$, alors il existe une sous-suite encore notée (u_{n_k}) et $u \in L^\infty(\Omega)$ tels que

$$\int_\Omega u_{n_k}\varphi dx \longrightarrow \int_\Omega u\varphi dx \text{ pour tout } \varphi \in L^1(\Omega).$$

Théorème 1.5 (Compacité faible des bornés d'un espace réflexif). *Soit X un espace de Banach réflexif, et soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite borneé de X. Alors il existe une sous-suite encore notée (u_{n_k}) et $u \in X$ telle que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ dans X.*

Remarque 1.4. *Un espace de Hilbert est toujours un espace de Banach réflexif.*

Définition 1.15. *On dit qu'une forme bilinéaire* $a(u,v) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *est*

1. Continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_V\|v\|_V, \quad \forall u, v \in V. \tag{1.1}$$

2. Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|_V^2, \quad \forall u \in V, \tag{1.2}$$

alors, de (1.1) et (1.2), il résulte que

$$a(u,u) \approx \|u\|_V^2.$$

1.6 Inégalités

1.6.1 Inégalité de Young

Soit $1 < p, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, alors

$$ab \leq a^p + b^q.$$

1.6.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Si $u, v \in L^2(\Omega)$ alors on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\left|\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \leq |u|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)}.$$

1.6.3 Inégalité de Hölder

Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $u.v \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |u.v|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.6.4 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$; alors, il existe une constante (dépendant seulement de Ω) $C = C(\Omega) > 0$, telle que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Autrement dit, sur $H_0^1(\Omega)$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme de $\|u\|_{H^1(\Omega)}$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \approx \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.5. *L'inégalité de Poincaré réste valable dans tout sous espace de $H^1(\Omega)$, dont $u = 0$ sur une partié de la frontiére.*

1.6.5 Formule de Green

Cette formule est un outil fondamental pour la résolution des EDP. Elle coincide, en dimension 1 avec la formule d'intégration par parties.
Soit Ω un ouvert borné à frontiére lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}.vdx = \int_\Gamma (u.\eta_i)\, vds - \int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, 1 \leq i \leq n \text{ avec } u.\eta_i = \frac{\partial u}{\partial \eta_i}.$$

De plus, si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ alors

$$\int_\Omega \Delta u.vdx = \int_\Gamma (\nabla u.\eta) vds - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\eta_i \right) vds - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

1.6.6 Lemme de Granwall

Nous passons maintenant en revue les lemmes de Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes aux limites, en particulier pour établir l'unicité de la solution, ainsi que pour former les estimations a priori.

Lemme 1.3. *Soient $u, v \in C([0,T]; \mathbb{R})$ telles que $u(t) \geq 0$ et $v(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$, $a \geq 0$ une constante et $w \in C([0,T]; \mathbb{R})$.*

1. *Si*

$$w(t) \leq a + \int_0^t u(s)\, ds + \int_0^t v(s)\, w(s)\, ds, \forall t \in [0,T],$$

alors

$$w(t) \leq \left(a + \int_0^t u(s)\, ds \right) \exp\left(\int_0^t v(s)\, ds \right), \forall t \in [0,T].$$

2. *Si*

$$w(t) \leq u(s) + a \int_0^t v(s)\, ds, \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\int_0^t w(s)\,ds \leq \exp(aT) \int_0^t u(s)\,ds.$$

Remarque 1.6. *Dans le cas particulier $u \equiv 0$, la partie (1) de ce lemme devient :*

$$w(t) \leq a + \int_0^t v(s)\,w(s)\,ds,\ \forall t \in [0,T],$$

alors

$$w(t) \leq a \exp\left(\int_0^t v(s)\,ds\right),\ \forall t \in [0,T].$$

Lemme 1.4. *Soient u, $v \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $u(t) \geq 0$ et $v(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$, $a \geq 0$. Soit $w : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}w^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t u(s)\,w(s)\,ds + \int_0^t v(s)\,w^2(s)\,ds,\ \forall t \in [0,T].$$

Alors

$$|w(t)| \leq \left(a + \int_0^t u(s)\,ds\right) \exp\left(\int_0^t v(s)\,ds\right),\ \forall t \in [0,T].$$

1.7 Méthode de Faedo-Galerkin

Définition 1.16. *Soit V un espace de Hilbert séparable et $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finie vérifiant les axiomes*

1. $V_m \subset V$ $(\dim(V_m) < +\infty)$.
2. $V_m \to V$ *quand* $m \longrightarrow +\infty$.

Pour tout $v \in V$, on peut trouver une suite $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ v_m \in V_m$$

et

$$v_m \longrightarrow v \ \text{ dans } V \text{ lorsque } m \longrightarrow +\infty.$$

L'espace V_m s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre m.

1.7.1 Le schéma de la méthode de Faedo-Galerkin

Soit P le problème exact pour lequel on cherche à montrer l'existence d'une solution dans un espace de fonctions construit sur un espace de Hilbert séparable V : Soit u la solution unique du problème P.
Après avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin V_m de V , il convient de définir un problème approché P_m dans l'espace de dimension finie V_m ayant une unique solution u_m.
Le déroulement de l'étude est alors le suivant :

Étape n°1 : On définit la solution u_m du problème P_m.

Étape n°2 : On établit des estimations sur u_m (dites « estimation a priori » sur u) qui traduisent que u_m et uniformément bornée.

Étape n°3 : Par utilisation des résultats u_m et uniformément bornée, il est alors d'extraire de $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ qui a une limite dans la topologie faible des espaces qui interviennent dans les estimations de l'étape n°2.
Soit alors u la limite obtenue.

Étape n°4 : On montre que u est une solution du problème P.

Chapitre 2

L'existence et l'unicité de la solution d'un problème de diffusion semi-linéaire

Dans ce chapitre on analyse la question d'existence l'unicité de la solution faible pour une classe d'équations paraboliques semi-linéaires. Tout d'abord, nous dérivons la formulation faible du problème (problème variationnel). Après cela, en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin nous prouvons, sous certaines hypothèses que le problème variationnel admet une solution unique.

2.1 Position du problème

Soit $\Omega = (0, L)$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$, on note $Q = \Omega \times (0, T)$. On considère dans Q le problème parabolique suivant

Problème $\mathcal{P}$. Trouver $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x \left(\alpha(x,t)\partial_x u(x,t)\right) + \mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}}\right) |u|^{p-2} \, u(x,t) \\ = f(x,t), \forall (x,t) \in Q, \\ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \forall t \in [0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \forall x \in (0,L). \end{cases} \tag{2.1}$$

Où

— u représente la fonction inconnue.

— f représente la densité des forces extérieures.

— $\alpha \in C^1(Q)$ et $\alpha\,(x,t) > 0, \forall\,(x,t) \in Q$.

— φ est une fonction donnée.

— $\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}}\right) |u|^{p-2} \, u(x,t)$ est appelé terme réactif (ou terme source), où $\mathcal{M} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction borné tel que

$$0 < c_{\mathcal{M}}^* \leq \mathcal{M}\,(v) \leq c_{\mathcal{M}}^{**}, \forall v \in \mathbb{R}_+.$$

avec $c_{\mathcal{M}}^*$ et $c_{\mathcal{M}}^{**}$ sont des constants.

— $p \in \,]1, 2[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ce problème intervient dans plusieurs applications, telles que la théorie de la chaleur, la diffusion des gaz, etc. Partant des considérations physiques, on voit que pour décrire de façon unique le processus de propagation, il est nécessaire de spécifier, en plus de l'équation principale, la température à l'instant $t = 0$ et le régime thermique au bord. Cela se manifeste dans ce problème par la condition initiale ($u(x, 0) = \varphi(x)$) (la température en chaque point du domaine au temps $t = 0$) et la condition au limite de Dirichlet $u(0, t) = u(L, t) = 0$ sur $\partial\Omega$. Pour que le processus de diffusion se prête à une description univoque, il faut connaître la répartition de la densité f.

2.2 Formulation variationelle

Pour obtenir la formulation faible du problème, nous définissons l'espace fonctionnel $\mathcal{V}$ par

$$\mathcal{V} = H_0^1(\Omega),$$

qui muni de la norme $\|v\|_{\mathcal{V}} = \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$.
Pour simplifier l'écriture, on note

$$u = u(x,t); \quad f = f(x,t).$$

Définition 2.1. *La solution faible du problème* (2.1) *est une fonction qui vérifie*

— $u \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{V})$.

— u *admet une dérivée* $\partial_t u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

— $u(0) = \varphi$.

— *L'identité*

$$(\partial_t u, \vartheta) + \mathcal{B}_\alpha(u,\vartheta) + \mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)\left(|u|^{p-2}\, u, \vartheta\right) = (f,\vartheta), \quad \forall \vartheta \in \mathcal{V} \text{ et } \forall t \in [0,T].$$

En multipliant l'équation

$$\partial_t u - \partial_x\left(\alpha(x,t)\partial_x u\right) + \mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)|u|^{p-2}\, u = f,$$

par un élément $\vartheta \in H^1(\Omega)$, en l'intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \partial_t u.\vartheta dx - \int_\Omega \partial_x\left(\alpha(x,t)\partial_x u\right).\vartheta dx + \mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)\int_\Omega |u|^{p-2}\, u.\vartheta dx = \int_\Omega f.\vartheta dx. \tag{2.2}$$

Grâce aux conditions aux limites et en utilisant la formule de Green, l'équation (2.2) devient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \partial_t u.\vartheta dx + \int_\Omega \alpha(x,t)\partial_x u.\partial_x\vartheta dx - \left[\alpha(x,t)\partial_x u\,(x,t)\,.\vartheta\,(x)\right]_0^L \\ &+ \mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)\int_\Omega |u|^{p-2}\, u.\vartheta dx \\ &= \int_\Omega f.\vartheta dx.\end{aligned}$$

Donc, on obtient le problème variationnel suivant
Problème $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$. Trouver $u \in \mathcal{V}$ tel que

$$(\partial_t u, \vartheta) + \mathcal{B}_\alpha(u,\vartheta) + \mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)\left(|u|^{p-2}\, u, \vartheta\right) = (f,\vartheta), \quad \forall \vartheta \in \mathcal{V},$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et

$$\mathcal{B}_\alpha(u,v) = \int_\Omega \alpha(x,t)\partial_x u.\partial_x \vartheta dx.$$

L'application $\mathcal{B}_\alpha : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et coercive. En effet

— Bilinéarité : elle est bilinéaire de la linéarité de l'intégrale.

— Continuité : $\forall u, \vartheta \in \mathcal{V}$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_\alpha(u,\vartheta)| &\leq \left|\int_\Omega \alpha(x,t)\partial_x u.\partial_x \vartheta dx\right| \\ &\leq \alpha_1 \int_\Omega |\partial_x u| \, . \, |\partial_x \vartheta| \, dx, \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_1 = \max_{(x,t)\in Q} \alpha(x,t).$$

D'après l'inégalité de Cauchy Shwartz, on trouve

$$|\mathcal{B}_\alpha(u,\vartheta)| \leq \alpha_1 \|u\|_{\mathcal{V}}.\|v\|_{\mathcal{V}}.$$

— Coércivité : $\exists \alpha_0 > 0, \forall u \in \mathcal{V}$, tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\alpha(u,u) &= \int_\Omega \alpha(x,t) \left|\partial_x u\right|^2 dx \\ &\geq \alpha_0 \int_\Omega \left|\partial_x u\right|^2 dx, \end{aligned}$$

où $\alpha_0 = \min\limits_{(x,t)\in Q} \alpha(x,t)$. D'après l'inégalité de Poincaré il existe une constante $\lambda > 0$, telle que

$$|\mathcal{B}_\alpha(u,u)| \geq \lambda \alpha_0 \|u\|^2_{\mathcal{V}}.$$

2.3 L'existence et l'unicité de la solution

2.3.1 L'existence de la solution

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses*

$$\begin{aligned} f &\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ \varphi &\in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \tag{2.3}$$

il existe au moins une fonction u solution de problème (2.1) ayant la régularité suivante

$$u \in L^\infty\left(0,T;\mathcal{V}\right),$$
$$\partial_t u \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Démonstration. La démonstration de l'existence de la solution du problème (3.1) est basée sur la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

- Solution approchée : on construit des solutions approchées par la méthode de Faedo-Galerkin.
- Estimations à priori : on établit sur ces solutions approchées des estimations (majorations) à priori.
- Passage à la limite : en utilisant la propriété de compacité dans les termes non linéaires.

Etape 1. On cherche des solutions approchées.

On sait que l'espace $\mathcal{V}$ est séparable (c'est-à-dire admet un ensemble dénombrable dense), donc il existe une suite des fonctions $w_1, w_2, \ldots, w_m$, ayant les propriétés suivantes

$$\begin{cases} w_i \in \mathcal{V}, \quad \forall i = \overline{1,n}, \\ \forall m, \ \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}\,; \quad \text{sont linéairement indépendants,} \\ V_m = vect\,(w_1, w_2, \ldots, w_m)\,; \quad \text{est dense dans } \mathcal{V}. \end{cases}$$

L'approximation de Galerkin consiste à rechercher une fonction

$$t \mapsto u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} q_{im}(t) w_i(x), \forall m \geq 1,$$

qui vérifiant

$$\begin{cases} (\partial_t u_m(t), w_k) + \mathcal{B}_\alpha\,(u_m(t), w_k) + \left(\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u_m|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\right) |u_m|^{p-2}\,u_m(t), w_k\right) \\ = (f(t), w_k) \quad \forall k = 1, \ldots, m, \\ \\ u_m(x,0) = \varphi_m. \end{cases} \tag{2.4}$$

Où

$$\begin{aligned} (\partial_t u_m(t), w_k) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \partial_t\left(q_{im}(t).w_i(x)\right), w_k(x)\right) \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{dq_{im}(t)}{dt}.w_i(x)\right), w_k(x)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (w_i(x), w_k(x))\,\frac{dq_{im}(t)}{dt}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\alpha}\left(u_m(t), w_k\right) &= \left(\alpha\left(x,t\right)\partial_x\left(\sum_{i=1}^{m} q_{im}(t).w_i(x)\right), \partial_x w_k(x)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\alpha\left(x,t\right)\partial_x w_i(x), \partial_x w_k(x)\right) q_{im}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\mathcal{B}_{\alpha}\left(w_i(x), w_k\right) q_{im}(t).
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
u_m(x,0) &= \varphi_m \\
&= \sum_{i=1}^{m} q_{im}(0) w_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sigma_{im} w_i(x) \longrightarrow \varphi \text{ lorsque } m \longrightarrow +\infty.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Donc, on obtient un système d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre

$$\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{m}\left(w_i, w_k\right)\frac{dq_{im}}{dt}(t) + \sum\limits_{i=1}^{m}\mathcal{B}_{\alpha}\left(w_i, w_k\right) q_{im}(t) \\
+\left(\mathcal{M}\left(\left[\int_{\Omega}\left|u_m\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)\left|u_m\right|^{p-2} u_m(t), w_k\right) = \left(f(t), w_k\right), \\
\\
q_{im}(0) = \sigma_{im}, \quad \forall i = 1, \ldots, m.
\end{cases} \tag{2.6}$$

Maintenant, on considère les fonctions $q_m = (q_{1m}(t), \ldots, q_{mm}(t))$, $f_m = \left(\left(f, w_1\right), \ldots, \left(f, w_m\right)\right)$, $C_m = \left(\mathcal{M}\left(\left[\int_{\Omega}\left|u_m\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)\left|u_m\right|^{p-2} u_m(t), w_j\right)_{1\le j\le m}$ et les matrices $A_m = \left(\left(w_i, w_j\right)\right)_{1\le i,j\le m}$, $B_m = \left(\mathcal{B}_{\alpha}\left(w_i, w_j\right)\right)_{1\le i,j\le m}$.

On écrit le problème (2.6) sous forme matricielle, on trouve

$$\begin{cases}
A_m\frac{dq_m}{dt}(t) + B_m q_m\left(t\right) + C_m = f_m, \\
q_m(0) = \left(\sigma_{im}\right)_{1\le i\le m}.
\end{cases}$$

Comme les vecteurs $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ sont linéairement indépendants, alors $\det\left(A_m\right) \neq 0$ donc la matrice A_m est inversible, ceci implique $q_m\left(t\right)$ est la solution de

$$\begin{cases}
\frac{dq_m}{dt}(t) + A_m^{-1} B_m q_m\left(t\right) + A_m^{-1} C_m = A_m^{-1} f_m, \\
\\
q_m(0) = \left(\sigma_{im}\right)_{1\le i\le m}.
\end{cases} \tag{2.7}$$

Grâce à la méthode des itérations usuelles de Picard utilisée pour les équations différentielles ordinaires, on peut conclure qu'il existe un t_m dépend de m tel que dans l'intervalle

$[0, t_m]$ le problème (2.7) admet une solution locale unique.

Dans la suite, C désigne une constante générique positive.

Etape 2. Estimations à priori.

Estimation I.

On multiplie la première équation de (2.4) par $q_{km}(t)$ et on somme sur k, on trouve

$$\begin{aligned}&\left(\partial_t u_m(t), \sum_{k=1}^{m} w_k.q_{km}(t)\right) + \mathcal{B}_\alpha\left(u_m(t), \sum_{k=1}^{m} w_k.q_{km}(t)\right)\\&+\left(\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u_m|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)|u_m|^{p-2}\,u_m(t), \sum_{k=1}^{m} w_k.q_{km}(t)\right)\\&=\left(f(t), \sum_{k=1}^{m} w_k.q_{km}(t)\right),\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}&(\partial_t u_m(t), u_m(t)) + \mathcal{B}_\alpha\left(u_m(t), u_m(t)\right)\\&+\left(\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u_m|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)|u_m|^{p-2}\,u_m(t), u_m(t)\right)\\&=\left(f(t), u_m(t)\right).\end{aligned}$$

D'autre part comme

$$(\partial_t u_m(t), u_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_m\,(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

donc, on conclut que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_m\,(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_0\left\|\partial_x u_m\,(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{M}\left(\left\|u_m\,(t)\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\left\|u_m\,(t)\right\|^p_{L^p(\Omega)}\\&\leq\left(f\,(t)\,, u_m\,(t)\right),\end{aligned}$$

en intégrant sur $(0, t)$ et en utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|u_m\,(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + a_0\int_0^t \left\|\partial_x u_m\,(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + c^*_{\mathcal{M}}\int_0^t \left\|u_m\,(s)\right\|^p_{L^p(\Omega)}\,ds\\&\leq\int_0^t \left\|f\,(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + \int_0^t \left\|u_m\,(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + \frac{1}{2}\left\|\varphi_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'après (2.3), on déduit l'existence d'une constante C indépendante de m telle que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|u_m\,(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + a_0\int_0^t \left\|\partial_x u_m\,(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + c^*_{\mathcal{M}}\int_0^t \left\|u_m\,(s)\right\|^p_{L^p(\Omega)}\,ds\\&\leq\int_0^t \left\|u_m\,(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + C,\end{aligned}$$

avec

$$C = \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent, on a en particulier

$$\|u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C + \int_0^T \|u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds.$$

En utilisant le lemme de Gronwall, pour déduire de l'inégalité précédente que

$$\|u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq Ce^T,$$

où C constante independante de m.
Ainsi, on obtient

$$\|u_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_m\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{V})} + \|u_m(s)\|^p_{L^2(0,T;L^p(\Omega))} \leq C. \tag{2.8}$$

Où C constante indépendante de m.

Estimation II.

On multiplie encore une fois la première équation de (2.4) par $q'_{km}(t)$ et on somme sur k, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_t u_m(t), \sum_{k=1}^m w_k.q'_{km}(t)\right) + \mathcal{B}_\alpha\left(u_m(t), \sum_{k=1}^m w_k.q'_{km}(t)\right) \\
&+ \left(\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u_m|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)\int_\Omega |u_m|^{p-2} u_m(t), \sum_{k=1}^m w_k.q'_{km}(t)\right) \\
&= \left(f(t), \sum_{k=1}^m w_k.q'_{km}(t)\right).
\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\partial_t u_m(t))^2 dx + \mathcal{B}_\alpha(u_m(t), \partial_t u_m(t)) \\
&+ \mathcal{M}\left(\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\right)\int_\Omega |u_m|^{p-2} u_m(t).\partial_t u_m(t) dx \\
&= \int_\Omega f.\partial_t u_m(t) dx.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\mathcal{M}(\cdot) \leq c^{**}_{\mathcal{M}}$, il résulte

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{B}_\alpha(u_m(t), \partial_t u_m(t)) \quad &\leq \quad c^{**}_{\mathcal{M}}\left|\int_\Omega |u_m|^{p-2} u_m(t).\partial_t u_m(t) dx\right| \\
&+ \int_\Omega |f(t)|.|\partial_t u_m(t)| dx.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

D'autre part, on a

$$\mathcal{B}_{\alpha}\left(u_m(t), \partial_t u_m(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{B}_{\alpha}\left(u_m(t), u_m(t)\right) - \frac{1}{2}\int_{\Omega}\alpha'(x,t)\left(\partial_x u_m\right)^2 dx. \tag{2.10}$$

Moyennant (2.9), (2.10), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_t u_m(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{B}_{\alpha}\left(u_m(t), u_m(t)\right) &\leq c^{**}_{\mathcal{M}}\left|\int_{\Omega}\left|u_m\right|^{p-2}u_m(t).\partial_t u_m(t)dx\right| \\
&\quad + \int_{\Omega}\left|f(t)\right|.\left|\partial_t u_m(t)\right|dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\alpha'(x,t)\left(\partial_x u_m\right)^2 dx.
\end{aligned}$$

Par l'intégration sur $(0,t)$ puis en utilisant l'inégalité de Young, ainsi de la coercivité de $\mathcal{B}_{\alpha}(\cdot,\cdot)$, il vient

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left\|\partial_t u_m(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \frac{\lambda\alpha_0}{2}\left\|u_m(t)\right\|^2_{\mathcal{V}} \\
&\leq c^{**}_{\mathcal{M}}\int_0^t\int_{\Omega}\left|u_m(x,s)\right|^{p-1}.\left|\partial_t u_m(x,s)\right|dxds \\
&+ 4\int_0^t\left\|f(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \frac{1}{4}\int_0^t\left\|\partial_t u_m(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega}\alpha'(x,s)\left(\partial_x u_m(s)\right)^2 dxds + \frac{1}{2}\mathcal{B}_{\alpha}\left(u_m(0), u_m(0)\right).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Young, il existe une constante positive γ, tel que

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_{\Omega}\left|u_m(s)\right|^{p-1}.\left|\partial_t u_m(s)\right|dxds &\leq \int_0^t\int_{\Omega}\gamma^{\frac{1}{p}}\left|u_m(s)\right|^{\frac{p}{q}}.\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{p}}}\left|\partial_t u_m(s)\right|dxds \\
&\leq \int_0^t\int_{\Omega}\left(\gamma^{\frac{q}{p}}\left|u_m(s)\right|^p + \frac{1}{\gamma}\left|\partial_t u_m(s)\right|^p\right)dxds,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_{\Omega}\left|u_m(s)\right|^{p-1}.\left|\partial_t u_m(s)\right|dxds &\leq \gamma^{\frac{q}{p}}\int_0^t\left\|u_m(s)\right\|^p_{L^p(\Omega)}ds \\
&\quad + \frac{1}{\gamma}\int_0^t\left\|\partial_t u_m(s)\right\|^p_{L^p(\Omega)}ds.
\end{aligned}$$

On a $1 < p < 2$, donc

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_{\Omega}\left|u_m(s)\right|^{p-1}.\left|\partial_t u_m(s)\right|dxds &\leq \gamma^{\frac{q}{p}}\int_0^t\left\|u_m(s)\right\|^p_{L^p(\Omega)}ds \\
&\quad + \int_0^t\left(1 + \frac{1}{\gamma}\left\|\partial_t u_m(s)\right\|_{L^p(\Omega)}\right)^2 ds,
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\|\partial_t u_m(s)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\partial_t u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}$ et $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega |u_m(s)|^{p-1} . |\partial_t u_m(s)| \, dx ds \quad &\leq \quad \gamma^{\frac{q}{p}} \int_0^t \|u_m(s)\|^p_{L^p(\Omega)} ds + 2T \\ &\quad +2\left(\frac{C_\Omega}{\gamma}\right)^2 \int_0^t \|\partial_t u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Comme $\alpha(x,t) \in C^1(Q)$, alors

$$\int_0^t \int_\Omega \alpha'(x,s) (\partial_x u_m)^2 \, dx ds \leq \alpha'_1 \int_0^t \|u_m(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds, \tag{2.13}$$

où $\alpha'_1 = \max\limits_{(x,t)\in Q} |\alpha'(x,s)|$.

En remplaçant (2.12) et (2.13) dans (2.11), puis nous prenons $\gamma = 2C_\Omega$, on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|\partial_t u_m(t)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{\alpha_0 \lambda}{2} \|u_m(t)\|^2_{\mathcal{V}} \\ &\leq 4 \int_0^T \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \alpha_1 \int_0^T \|u_m(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds \\ &+ (2C_\Omega)^{\frac{q}{p}} \int_0^T \|u_m(s)\|^p_{L^p(\Omega)} ds + 2T + \alpha'_1 \|\varphi_m\|^2_{H^1_0(\Omega)}, \end{aligned}$$

d'aprés (2.8) et (2.3), nous pouvons en déduire l'existence d'une constante

$$C = (2C_\Omega)^{\frac{q}{p}} \|u_m(s)\|^p_{L^2(0,T;L^p(\Omega))} ds + 2T + \alpha'_1 \|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)},$$

indépendante de m tel que

$$\frac{1}{2} \|\partial_t u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{\alpha_0 \lambda}{2} \|u_m(t)\|^2_{\mathcal{V}} \leq C + \alpha_1 \int_0^T \|u_m(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds,$$

et donc, en particulier

$$\frac{\alpha_0 \lambda}{2} \|u_m(t)\|^2_{\mathcal{V}} \leq C + \alpha_1 \int_0^T \|u_m(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds.$$

On applique le lemme de Gronwall, on obtient

$$\|u_m(t)\|^2_{\mathcal{V}} \leq C,$$

par conséquent, on obtient

$$\|\partial_t u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_m\|^2_{L^\infty(0,T;\mathcal{V})} \leq C, \tag{2.14}$$

où C constante indépendante de m.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \int_\Omega \left[\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u_m|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right) |u_m|^{p-2} u_m(t) \right]^q dx \right| dt \quad &\leq \quad c^{**}_{\mathcal{M}} \int_0^T \int_\Omega \left[|u_m|^{p-1} \right]^q dx dt \\ &\leq \quad c^{**}_{\mathcal{M}} \int_0^T \int_\Omega \left[|u_m|^{\frac{p}{q}} \right]^q dx dt \\ &\leq \quad c^{**}_{\mathcal{M}} \|u_m\|^p_{L^2(0,T,L^p(\Omega))}, \end{aligned}$$

mais d'après (2.8), on en déduit que

$$\int_0^T \left| \int_\Omega \left[\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u_m|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right) |u_m|^{p-2} u_m(t) \right]^q dx \right| dt \leq C. \tag{2.15}$$

En utilisant (2.8), (2.14) et (2.15) pour conclure

$$\begin{cases} u_m \text{ borné dans } L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \\ u_m \text{ borné dans } L^2(0,T;\mathcal{V}), \\ \partial_t u_m \text{ borné dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ \mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u_m|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right) |u_m|^{p-2} u_m(t) \text{ borné dans } L^2(0,T;L^q(\Omega)). \end{cases} \tag{2.16}$$

Etape 3. Passage à la limite.

D'après (2.16) on peut extraire sous-suite (u_μ) de (u_m) telle que

$$\begin{cases} u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;\mathcal{V}), \\ \partial_t u_\mu \rightharpoonup \partial_t u \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ \mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u_\mu|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right) |u_\mu|^{p-2} u_\mu(t) \rightharpoonup \chi \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;L^q(\Omega)), \end{cases} \tag{2.17}$$

Montrant que

$$\chi = \mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right) |u|^{p-2} u(t).$$

On a u_μ borné dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $\partial_t u_\mu$ dans borné dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, donc u_μ borné dans l'espace

$$H^1(Q) = \left\{ v : v \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \text{ et } \partial_t v \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \right\},$$

mais on sait que selon le Théorème 1.3 que l'injection suivante est compact

$$H^1(Q) \hookrightarrow L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Donc

$$u_\mu \to u \quad \text{fort dans} \quad L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Maintenant, en utilisant le Lemme 1.1, on déduit

$$\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u_\mu|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right) |u_\mu|^{p-2} u_\mu(t) \rightharpoonup \mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right) |u|^{p-2} u(t) \text{ dans } L^2(0,T;L^q(\Omega)). \tag{2.18}$$

Soit k fixé et $\mu > k$, alors d'après (2.4) on a

$$(\partial_t u_\mu(t), w_k) + \mathcal{B}_\alpha(u_\mu(t), w_k) + \left(\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u_\mu|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right) |u_\mu|^{p-2} u_\mu(t), w_k \right)$$
$$= (f(t), w_k), \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

D'après (2.17) et (2.18), il résulte

$$\mathcal{B}_\alpha(u_\mu(t), w_k) \rightharpoonup^* \mathcal{B}_\alpha(u(t), w_k) \text{ dans } L^\infty(0,T),$$

$$(\partial_t u_\mu(t), w_k) \rightharpoonup (\partial_t u(t), w_k) \text{ dans } L^2(0,T),$$

et

$$\left(\mathcal{M}\left(\|u_\mu\|_{L^2(\Omega)}\right)|u_\mu|^{p-2}u_\mu(t), w_k\right) \rightharpoonup \left(\mathcal{M}\left(\|u_\mu\|_{L^2(\Omega)}\right)|u|^{p-2}u(t), w_k\right) \text{ dans } L^2(0,T).$$

Soit $\psi(t) \in D(0,T)$, donc de (2.4), on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\partial_t u_\mu(t), w_k)\,\psi(t)\,dt + \int_0^T \mathcal{B}_\alpha(u_\mu(t), w_k)\,\psi(t)\,dt \\
&+ \int_0^T \left(\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u_\mu|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)|u_\mu|^{p-2}u_\mu(t), w_k\right)\psi(t)\,dt \\
&= \int_0^T (f(t), w_k)\,\psi(t)\,dt, \quad \forall k = 1, \ldots, m.
\end{aligned}$$

En gardant k fixe et en laissant $\mu \longrightarrow +\infty$, grâce à la convergence faible de u_μ et $\partial_t u_\mu$ dans leurs espaces respectifs, on déduit

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Bigg[(\partial_t u(t), w_k) + \mathcal{B}_\alpha(u(t), w_k) \\
&+ \left(\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)|u|^{p-2}u(t), w_k\right) - (f(t), w_k)\Bigg]\psi(t)\,dt \\
&= 0, \quad \forall \psi(t) \in D(0,T), \forall k = 1, \ldots, m,
\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}
&(\partial_t u(t), w_k) + \mathcal{B}_\alpha(u(t), w_k) + \left(\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)|u|^{p-2}u(t), w_k\right) \\
&= (f(t), w_k), \forall k = 1, \ldots, m.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la densité de V_m dans $\mathcal{V}$, on conclut que

$$(\partial_t u(t), \vartheta) + \mathcal{B}_\alpha(u(t), \vartheta) + \left(\mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)|u|^{p-2}u(t), \vartheta\right) = (f(t), \vartheta), \ \forall \vartheta \in \mathcal{V}.$$

D'où il résulte que u satisfait

$$\partial_t u + \partial_x(\alpha(x,t)\,\partial_x u) + \mathcal{M}\left(\left[\int_\Omega |u|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\right)|u|^{p-2}u = f, \text{ p.p dans } Q.$$

Reste à montrer que la solution u vérifié la condition initiale. D'après (2.17) et le Lemme 1.2, on a

$$\begin{aligned} \partial_t u_\mu(t) &\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right), \\ u_\mu(t) &\in L^2\left(0,T;\mathcal{V}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent u_μ est continue sur $[0,T]$, alors continue en 0, donc

$$u_\mu(x,0) \rightharpoonup u(x,0) \text{ dans } L^2\left(\Omega\right),$$

mais d'après (2.5), on obtient

$$u_\mu(x,0) \longrightarrow \varphi(x,0) \text{ dans } \mathcal{V}.$$

Donc, on conclut que

$$u(x,0) = \varphi\left(x\right).$$

□

2.3.2 Unicité

On va donner dans ce paragraphe le résultat concernant l'unicité de la solution au problème (2.1).

Théorème 2.2. *Si on suppose que la fonction $\mathcal{M}$ est lipschitzienne*

$$\left|\mathcal{M}\left(u\right) - \mathcal{M}\left(v\right)\right| \leq k\left|u-v\right|.$$

Alors la solution u obtenue au Théorème 2.1 est unique.

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (2.1), au sens du Théorème 2.1. Donc les deux solutions satisfont aux deux formules

$$\left(\partial_t u_1,\vartheta\right) + \mathcal{B}_\alpha\left(u_1,\vartheta\right) + \left(\mathcal{M}\left(\left\|u_1\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\left|u_1\right|^{p-2}u_1,\vartheta\right) = \left(f,\vartheta\right), \forall\vartheta\in\mathcal{V}, \tag{2.19}$$

et

$$\left(\partial_t u_2,\vartheta\right) + \mathcal{B}_\alpha\left(u_2,\vartheta\right) + \left(\mathcal{M}\left(\left\|u_2\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\left|u_2\right|^{p-2}u_2,\vartheta\right) = \left(f,\vartheta\right), \forall\vartheta\in\mathcal{V}. \tag{2.20}$$

On prend $\vartheta = u_2$ dans (2.19) et $\vartheta = u_1$ dans (2.20), on obtient

$$\left(\partial_t u_1,u_2\right) + \mathcal{B}_\alpha\left(u_1,u_2\right) + \left(\mathcal{M}\left(\left\|u_1\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\left|u_1\right|^{p-2}u_1,u_2\right) = \left(f,u_2\right), \tag{2.21}$$

et

$$(\partial_t u_2, u_1) + \mathcal{B}_\alpha (u_2, u_1) + \left(\mathcal{M}\left(\|u_2\|_{L^2(\Omega)}\right)|u_2|^{p-2} u_2, u_1\right) = (f, u_1). \tag{2.22}$$

En soustrayant la formule (2.21) de (2.22), nous trouvons

$$\begin{aligned}
&(\partial_t Y, Y) + \mathcal{B}_\alpha (Y, Y) + \left(\mathcal{M}\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right)|u_1|^{p-2} u_1 - \mathcal{M}\left(\|u_2\|_{L^2(\Omega)}\right)|u_2|^{p-2} u_2, Y\right)\\
&+ \left(\mathcal{M}\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right)|u_2|^{p-2} u_2, Y\right) - \left(\mathcal{M}\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right)|u_2|^{p-2} u_2, Y\right)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

où $Y = u_1 - u_2$.

D'où il résulte que

$$\begin{aligned}
&(\partial_t Y, Y) + \mathcal{B}_\alpha (Y, Y) + \mathcal{M}\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right)\left(|u_2|^{p-2} u_2 - |u_1|^{p-2} u_1, Y\right)\\
&= \left(\left(\mathcal{M}\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right) - \mathcal{M}\left(\|u_2\|_{L^2(\Omega)}\right)\right)|u_2|^{p-2} u_2, Y\right).
\end{aligned}$$

On sait que

$$\left(|u_2|^{p-2} u_2 - |u_1|^{p-2} u_1, u_1 - u_2\right) \geq 0,$$

par conséquent, on déduit que

$$(\partial_t Y, Y) + \mathcal{B}_\alpha (Y, Y) \leq \left(\left(\mathcal{M}\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right) - \mathcal{M}\left(\|u_2\|_{L^2(\Omega)}\right)\right)|u_2|^{p-2} u_2, Y\right). \tag{2.23}$$

Passons maintenant à l'estimation du second membre de (2.23). On a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\mathcal{M}\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right) - \mathcal{M}\left(\|u_2\|_{L^2(\Omega)}\right)\right)|u_2|^{p-2} u_2 . Y dx\\
&\leq \left|\mathcal{M}\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right) - \mathcal{M}\left(\|u_2\|_{L^2(\Omega)}\right)\right| \int_\Omega |u_2|^{p-1} . |Y| \, dx,
\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\mathcal{M}\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right) - \mathcal{M}\left(\|u_2\|_{L^2(\Omega)}\right)\right)|u_2|^{p-2} u_2 . Y dx\\
&\leq \left|\mathcal{M}\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right) - \mathcal{M}\left(\|u_2\|_{L^2(\Omega)}\right)\right| \int_\Omega |u_2|^{\frac{p}{q}} . |Y| \, dx.
\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_2|^{\frac{p}{q}} . |Y| \, dx &\leq \left(\int_\Omega |u_2|^p \, dx\right)^{\frac{1}{q}} . \left(\int_\Omega |Y|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \|u_2\|^{\frac{p}{q}}_{L^p(\Omega)} . \|Y\|_{L^p(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le fait que $\|Y\|_{L^p(\Omega)} \leq c_{(\Omega)} \|Y\|_{L^2(\Omega)}$, nous arrivons à

$$\int_\Omega |u_2|^{\frac{p}{q}} . |Y| \, dx \leq c_{(\Omega)} \|u_2\|^{\frac{p}{q}}_{L^p(\Omega)} . \|Y\|_{L^2(\Omega)} .$$

D'autre part, comme $\mathcal{M}(\cdot)$ est lipschitzienne, on a

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{M}\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right)-\mathcal{M}\left(\|u_2\|_{L^2(\Omega)}\right)\right| &\leq k\left|\|u_1\|_{L^2(\Omega)}-\|u_2\|_{L^2(\Omega)}\right| \\ &\leq k\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(\mathcal{M}\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right)-\mathcal{M}\left(\|u_2\|_{L^2(\Omega)}\right)\right)|u_2|^{p-2}u_2.Y\,dx \\ &\leq kc_{(\Omega)}\|u_2\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}.\|Y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}\tag{2.24}$$

En revenant à la formule (2.23) et en utilisant l'inégalité (2.24), on arrive à

$$\frac{d}{dt}\|Y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\alpha_0\lambda\|Y(t)\|_{\mathcal{V}}^2\leq kc_{(\Omega)}\|u_2(t)\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}}\|Y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.\tag{2.25}$$

En intégrant (2.25) sur $(0,t)$ et en utilisant le fait que

$$\begin{aligned}\|u_2(t)\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} &\leq c\|u_2(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq C,\end{aligned}$$

nous concluons que

$$\|Y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\alpha_0\lambda\int_0^t\|Y(s)\|_{\mathcal{V}}^2\,ds\leq kc_{(\Omega)}C\int_0^t\|Y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\,ds.$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$\|Y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2=0.$$

On aura finalement $Y(t)=0$. D'où l'unicité de la solution. □

Chapitre 3

Analyse asymptotique d'un système parabolique dans un domaine mince

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence, l'unicité et l'analyse asymptotique du solution faible d'un problème parabolique couplé posé dans un domaine mince bidimensionnel Ω^{ε}. Les conditions aux limites utilisées sont la condition de Dirichlet sur la frontière latérale et la frontière supérieure et la condition de Fourier sur la frontière inférieure. Nous donnons le résultat de l'existence et l'unicité de la solution faible, puis nous étudions le comportement asymptotique de ce problème quand une dimension du domaine tend vers zéro.

3.1 Position du problème

Soit Ω^{ε} un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière suffisamment régulière $\partial\Omega^{\varepsilon}$. Nous définissons le domaine mince Ω^{ε} comme suit

$$\Omega^{\varepsilon} = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 0 < x_1 < L, 0 < x_2 < \varepsilon h(x_1) \right\}.$$

Où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre qui tendra vers zéro et $h(\cdot)$ est fonction de la classe $C^1([0, L])$ tel que

$$0 < \underline{h} = \min_{x_1 \in [0,L]} h(x_1) \leq h(x_1) \leq \bar{h} = \max_{x_1 \in [0,L]} h(x_1), \forall x_1 \in [0, L].$$

La frontière de Ω^{ε} se compose de trois parties : $\partial\Omega^{\varepsilon} = \partial\Omega_1^{\varepsilon} \cup \partial\Omega_2^{\varepsilon} \cup \partial\Omega_3^{\varepsilon}$, où

— $\partial\Omega_1^{\varepsilon} = \{x \in \partial\Omega^{\varepsilon} : x_2 = \varepsilon h(x_1)\}$, la frontière supérieure.

— $\partial\Omega_3 =]0, L[$, la frontière inférieure.

— $\partial\Omega_2^{\varepsilon} = (\{x_1 = 0\} \cup \{x_1 = L\}) \times]0, \varepsilon h(x_1)[$, la partie latérale de la frontière de Ω^{ε}.

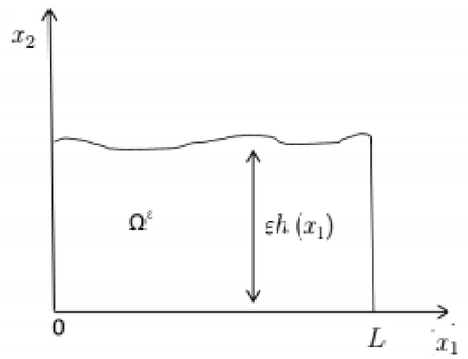

FIGURE 3.1 – Le domaine mince Ω^{ε}.

Dans le domaine Ω^{ε}, nous nous intéressons à l'analyse du comportement des solutions lorsque le paramètr ε tend vers zéro, pour le problème parabolique couplé suivant :

Problème $\mathcal{P}$. Trouver $u^{\varepsilon} : \Omega^{\varepsilon} \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v^{\varepsilon} : \Omega^{\varepsilon} \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$, tels que

$$\partial_t u^{\varepsilon} - \mathcal{A}_{\alpha^{\varepsilon}}(u^{\varepsilon}) + \lambda^{\varepsilon} v^{\varepsilon} = f^{\varepsilon} \text{ dans } \Omega^{\varepsilon} \times (0, T), \tag{3.1}$$

$$\partial_t v^{\varepsilon} - \mathcal{A}_{\beta^{\varepsilon}}(v^{\varepsilon}) + \lambda^{\varepsilon} u^{\varepsilon} = g^{\varepsilon} \text{ dans } \Omega^{\varepsilon} \times (0, T), \tag{3.2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u^{\varepsilon} = 0 \\ v^{\varepsilon} = 0 \end{array}\right\} \text{ sur } (\partial\Omega_1^{\varepsilon} \cup \partial\Omega_2^{\varepsilon}) \times (0, T), \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \exists l_1^{\varepsilon}, r^{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^* : \partial_{n,\alpha^{\varepsilon}}(u^{\varepsilon}) + l_1^{\varepsilon} u^{\varepsilon} - r^{\varepsilon} v^{\varepsilon} = 0 \\ \exists l_2^{\varepsilon}, r^{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^* : \partial_{n,\beta^{\varepsilon}}(v^{\varepsilon}) + l_2^{\varepsilon} v^{\varepsilon} + r^{\varepsilon} u^{\varepsilon} = 0 \end{array}\right\} \text{ sur }]0, L[\times(0, T), \tag{3.4}$$

où $\mathcal{A}_{c^\varepsilon}(\cdot)$ est l'opérateur différentiel défini par

$$\mathcal{A}_{c^\varepsilon}(\cdot) = \sum_{i,j=1}^{2} \partial_{x_i} \left[c_{ij}^\varepsilon(x) \partial_{x_j}(\cdot) \right],$$

λ^ε est une constante positive, $f^\varepsilon(\cdot), g^\varepsilon(\cdot), c_{ij}^\varepsilon(\cdot)$ sont des fonctions données et $\partial_{n,c^\varepsilon}(\cdot) = \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j}(\cdot).n_j$ indiquer la dérivée par rapport à la normale externe sur la frontière $\partial\Omega^\varepsilon$, tel que $n^0 = (0,-1)$ le vecteur normal extérieur à $]0, L[$. Nous complétons le problème (3.1)-(3.4) par les conditions initiales suivantes

$$(u^\varepsilon(x,0), v^\varepsilon(x,0)) = (0,0), \quad \forall x \in \Omega^\varepsilon. \tag{3.5}$$

Nous traiterons du problème (3.1)-(3.5) avec les conditions suivantes

$$c_{ij}^\varepsilon \in L_+^\infty(\Omega^\varepsilon), c_{ij}^\varepsilon(\cdot) = c_{ji}^\varepsilon(\cdot), 1 \leq i,j \leq 2,$$

et $\exists \mu_c > 0$, telle que $\forall \eta \in \mathbb{R}^2$

$$\sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}^\varepsilon(x)\eta_i\eta_j \geq \mu_c \sum_{i=1}^{2} (\eta_i)^2.$$

3.2 Problème variationnel

Pour obtenir la formulation faible du problème, nous introduisons l'espaces

$$V^\varepsilon = \left\{ \zeta \in H^1(\Omega^\varepsilon) : \zeta = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1^\varepsilon \cup \partial\Omega_2^\varepsilon \right\},$$

qui est un espace de Banach pour la norme induite

$$\|\zeta\|_{V^\varepsilon} := \|\zeta\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla\zeta\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2} = \|\zeta\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Lemme 3.1. *Si u^ε est solution du problème $(3.1) - (3.4)$, alors elle vérifie le problème variationnel suivant*

***Problème** $\mathcal{P}_\mathcal{V}$. Trouver $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in (V^\varepsilon)^2$, $\forall \varphi, \psi \in V^\varepsilon$, tel que*

$$\begin{gathered}
(\partial_t u^\varepsilon, \varphi) + a_{\alpha^\varepsilon}(u^\varepsilon, \varphi) + (\lambda^\varepsilon v^\varepsilon, \varphi) + \int_0^L (l_1^\varepsilon u^\varepsilon - r^\varepsilon v^\varepsilon).\varphi dx_1 = (f^\varepsilon, \varphi), \qquad (3.6)\\
(\partial_t v^\varepsilon, \psi) + a_{\beta^\varepsilon}(v^\varepsilon, \psi) + (\lambda^\varepsilon u^\varepsilon, \psi) + \int_0^L (l_2^\varepsilon v^\varepsilon + r^\varepsilon u^\varepsilon).\psi dx_1 = (g^\varepsilon, \psi),\\
(u^\varepsilon(x,0), v^\varepsilon(x,0)) = (0,0),
\end{gathered}$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega^\varepsilon)$ et

$$a_{c^\varepsilon}(\cdot,\cdot) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega^\varepsilon} c_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_i}(\cdot)\partial_{x_j}(\cdot)dx.$$

Démonstration. Multiplions l'équation (3.1) par φ et l'équation (3.2) par ψ avec $(\varphi, \psi) \in H^1(\Omega^\varepsilon)^2$, et intégrons sur Ω^ε, il vient que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \partial_t u^\varepsilon.\varphi dx - \int_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i,j=1}^{2} \partial_{x_i} \left[\alpha_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j}(u^\varepsilon)\right] \varphi dx + \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon v^\varepsilon.\varphi dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon.\varphi dx,$$

et

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \partial_t v^\varepsilon.\psi dx - \int_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i,j=1}^{2} \partial_{x_i} \left[\beta_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j}(v^\varepsilon)\right] \psi dx + \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon u^\varepsilon.\psi dx = \int_{\Omega^\varepsilon} g^\varepsilon.\psi dx,$$

en appliquant la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^\varepsilon} \partial_t u^\varepsilon.\varphi dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega^\varepsilon} \alpha_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j}(u^\varepsilon).\partial_{x_i}\varphi dx - \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\Omega^\varepsilon} \alpha_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j}(u^\varepsilon)n_j.\varphi d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon v^\varepsilon.\varphi dx \\ &= \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon.\varphi dx,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^\varepsilon} \partial_t v^\varepsilon.\psi dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega^\varepsilon} \alpha_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j}(v^\varepsilon).\partial_{x_i}\psi dx - \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\Omega^\varepsilon} \alpha_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j}(v^\varepsilon)n_j.\psi d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon u^\varepsilon.\psi dx \\ &= \int_{\Omega^\varepsilon} g^\varepsilon.\psi dx.\end{aligned}$$

Si on prend $\varphi, \psi \in V^\varepsilon$, nous arrivons à

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^\varepsilon} \partial_t u^\varepsilon.\varphi dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega^\varepsilon} \alpha_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j}(u^\varepsilon).\partial_{x_i}\varphi dx - \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^L \alpha_{ij}^\varepsilon(x_1,0)\partial_{x_j}(u^\varepsilon).n_j^0\varphi dx_1 \\ &+ \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon v^\varepsilon.\varphi dx \\ &= \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon.\varphi dx,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^\varepsilon} \partial_t v^\varepsilon.\psi dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega^\varepsilon} \alpha_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j}(v^\varepsilon).\partial_{x_i}\psi dx - \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^L \beta_{ij}^\varepsilon(x_1,0)\partial_{x_j}(v^\varepsilon).n_j^0\psi dx_1 \\ &+ \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon u^\varepsilon.\psi dx \\ &= \int_{\Omega^\varepsilon} g^\varepsilon.\psi dx,\end{aligned}$$

d'autre part, d'après la condition aux limites (3.4), on aura

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \partial_t u^\varepsilon.\varphi dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega^\varepsilon} \alpha_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j} u^\varepsilon.\partial_{x_i}\varphi dx + \int_0^L \left(l_1^\varepsilon u^\varepsilon - r^\varepsilon v^\varepsilon\right).\varphi dx_1$$
$$+ \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon v^\varepsilon.\varphi dx$$
$$= \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon.\varphi dx,$$

et

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \partial_t v^\varepsilon.\psi dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega^\varepsilon} \beta_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j} v^\varepsilon.\partial_{x_i}\psi dx + \int_0^L \left(l_2^\varepsilon v^\varepsilon + r^\varepsilon u^\varepsilon\right).\psi dx_1$$
$$+ \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon u^\varepsilon.\psi dx$$
$$= \int_{\Omega^\varepsilon} g^\varepsilon.\psi dx.$$

Donc, nous obtenons la formulation faible (3.6). □

3.3 L'existence et l'unicité de la solution

Dans ce paragraphe, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution faible du système $(3.1) - (3.5)$.

Théorème 3.1. *Supposons que*

$$(f^\varepsilon, g^\varepsilon) \in L^2\left(0, T, L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^2.$$

Alors, il existe une solution unique $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ *du problème* (3.6) *tell que*

$$(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in L^2\left(0, T, V^\varepsilon\right)^2,$$

$$(\partial_t u^\varepsilon, \partial_t v^\varepsilon) \in L^2\left(0, T, L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^2.$$

Nous commençons par démontrer l'existence d'une solution faible du problème (3.6).

3.3.1 Existence

Pour montrer l'existence de la solution, nous utilisons la méthode de Faedo-Galerkin.

Démonstration. Soit $\left(w_j^\varepsilon\right)$ est une suite de fonctions ayant les propriétés suivantes

— $w_j^\varepsilon \in V^\varepsilon, \forall j = 1, \ldots, m.$

— La famille $\{w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, \ldots, w_m^\varepsilon\}$ est linéairement indépendant.

— Le $V_m^\varepsilon = [w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, \ldots, w_m^\varepsilon]$ généré par $\{w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, \ldots, w_m^\varepsilon\}$ est dense dans V^ε.

Soit $(u_m^\varepsilon, v_m^\varepsilon) = (u_m^\varepsilon(t), v_m^\varepsilon(t))$ est une solution approchée telle que

$$u_m^\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^m R_{jm}(t) w_j^\varepsilon, \quad v_m^\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^m P_{jm}(t) w_j^\varepsilon,$$

où $R_{jm}(t)$ et $P_{jm}(t)$ sont déterminés par les équations différentielles ordinaires suivantes

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_t u_m^\varepsilon, w_j^\varepsilon\right) + a_{\alpha^\varepsilon}\left(u_m^\varepsilon, w_j^\varepsilon\right) + \lambda^\varepsilon\left(v_m^\varepsilon, w_j^\varepsilon\right) + \int_0^L \left(l_1^\varepsilon u_m^\varepsilon - r^\varepsilon v_m^\varepsilon\right).\left(w_j^\varepsilon\right) dx_1 \\
&= \left(f^\varepsilon, w_j^\varepsilon\right), 1 \leq j \leq m \\
&\left(\partial_t v_m^\varepsilon, w_j^\varepsilon\right) + a_{\beta^\varepsilon}\left(v_m^\varepsilon, w_j^\varepsilon\right) + \lambda^\varepsilon\left(u_m^\varepsilon, w_j^\varepsilon\right) + \int_0^L \left(l_2^\varepsilon v_m^\varepsilon + r^\varepsilon u_m^\varepsilon\right).\left(w_j^\varepsilon\right) dx_1 \\
&= \left(g^\varepsilon, w_j^\varepsilon\right), 1 \leq j \leq m,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned}
u_m^\varepsilon(x,0) &= 0, \\
u_m^\varepsilon(x,0) &= \sum_{j=1}^m \gamma_{jm}(0)\, w_j \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ danc } V^\varepsilon,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u_m^\varepsilon(x,0) &= 0, \\
v_m^\varepsilon(x,0) &= \sum_{j=1}^m \eta_{jm}(0)\, w_j \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ danc } V^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant établir quelques estimations à priori indépendantes de m.

La première estimation.

En multipliant la première et la deuxième équation de (3.7) par $R_{jm}(t)$ et $P_{jm}(t)$ respectivement et l'on somme en j, il vient

$$(\partial_t u_m^\varepsilon, u_m^\varepsilon) + a_{\alpha^\varepsilon}(u_m^\varepsilon, u_m^\varepsilon) + \lambda^\varepsilon(v_m^\varepsilon, u_m^\varepsilon) + \int_0^L (l_1^\varepsilon u_m^\varepsilon - r^\varepsilon v_m^\varepsilon)\, u_m^\varepsilon dx_1 = (f^\varepsilon, u_m^\varepsilon),$$

et

$$(\partial_t v_m^\varepsilon, v_m^\varepsilon) + a_{\beta^\varepsilon}(v_m^\varepsilon, v_m^\varepsilon) + \lambda^\varepsilon(u_m^\varepsilon, v_m^\varepsilon) + \int_0^L (l_2^\varepsilon v_m^\varepsilon + r^\varepsilon u_m^\varepsilon)\, v_m^\varepsilon dx_1 = (g^\varepsilon, v_m^\varepsilon),$$

ceci implique que

$$\frac{d}{2dt}\|u_m^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + a_{\alpha^\varepsilon}(u_m^\varepsilon, u_m^\varepsilon) + \lambda^\varepsilon(v_m^\varepsilon, u_m^\varepsilon) + \int_0^L (l_1^\varepsilon u_m^\varepsilon - r^\varepsilon v_m^\varepsilon)\, u_m^\varepsilon dx_1 = (f^\varepsilon, u_m^\varepsilon),$$

et

$$\frac{d}{2dt}\left\|v_m^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2+a_{\beta^\varepsilon}\left(v_m^\varepsilon,v_m^\varepsilon\right)+\lambda^\varepsilon\left(u_m^\varepsilon,v_m^\varepsilon\right)+\int_0^L\left(l_2^\varepsilon v_m^\varepsilon+r^\varepsilon u_m^\varepsilon\right)v_m^\varepsilon dx_1=\left(g^\varepsilon,v_m^\varepsilon\right),$$

en intégrant sur $(0,t)$ les deux équations ci-dessus, et en sommant le résultat, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|u_m^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2+\frac{1}{2}\left\|v_m^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2+\mu_\alpha\int_0^t\left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}^2ds\\
&+\mu_\beta\int_0^t\left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}^2ds+l_1^\varepsilon\int_0^t\int_0^L\left|u_m^\varepsilon(s)\right|^2dx_1ds+l_2^\varepsilon\int_0^t\int_0^L\left|v_m^\varepsilon(s)\right|^2dx_1ds\\
&=\int_0^t\left(f^\varepsilon(s),u_m^\varepsilon(s)\right)ds+\int_0^t\left(g^\varepsilon(s),v_m^\varepsilon(s)\right)ds-2\lambda^\varepsilon\int_0^t\left(v_m^\varepsilon(s),u_m^\varepsilon(s)\right)ds.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le fait que

$$\int_0^t\left|\left(f^\varepsilon(s),u_m^\varepsilon(s)\right)\right|ds\leq\int_0^t\left\|f^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2ds+\int_0^t\left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2ds,$$

$$\int_0^t\left|\left(g^\varepsilon(s),v_m^\varepsilon(s)\right)\right|ds\leq\int_0^t\left\|g^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2ds+\int_0^t\left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2ds,$$

et

$$2\lambda^\varepsilon\int_0^t\left|\left(v_m^\varepsilon(s),u_m^\varepsilon(s)\right)\right|ds\leq2\lambda^\varepsilon\int_0^t\left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2ds+2\lambda^\varepsilon\int_0^t\left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2ds,$$

on trouve l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
&\left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2+\left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2+2\mu_\alpha\int_0^t\left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}^2ds\\
&+2\mu_\beta\int_0^t\left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}^2ds+2l_1^\varepsilon\int_0^t\left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(]0,L[)}^2ds+2l_2^\varepsilon\int_0^t\left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(]0,L[)}^2\\
&\leq\left(2+4\lambda^\varepsilon\right)\int_0^t\left(\left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2+\left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2\right)ds\\
&+2\int_0^t\left\|f^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2ds+2\int_0^t\left\|g^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2ds.
\end{aligned}$$

Après avoir appliqué le lemme de Gronwall dans l'inégalité ci-dessus, on conclut que

$$\begin{aligned}
&\left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2+\left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2+\left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega^\varepsilon))}^2\\
&+\left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega^\varepsilon))}^2+\left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(0,T,L^2(]0,L[)}^2+\left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(0,T,L^2(]0,L[))}^2\\
&\leq c,
\end{aligned}\tag{3.8}$$

où c est une constante indépendante de m.

La deuxième estimation.

On multiplie la première et la deuxième équation de (3.7) par $R'_{jm}(\tau)$ et $P'_{jm}(\tau)$ respectivement, et sommons sur j de 1 à m, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_t u_m^\varepsilon, \partial_t u_m^\varepsilon\right) + a_{\alpha^\varepsilon}\left(u_m^\varepsilon, \partial_t u_m^\varepsilon\right) + \lambda^\varepsilon\left(v_m^\varepsilon, \partial_t u_m^\varepsilon\right) + \int_0^L \left(l_1^\varepsilon u_m^\varepsilon - r^\varepsilon v_m^\varepsilon\right)\partial_t u_m^\varepsilon dx_1 \\
&= \left(f^\varepsilon, \partial_t u_m^\varepsilon\right), \\
&\left(\partial_t v_m^\varepsilon, \partial_t v_m^\varepsilon\right) + a_{\beta^\varepsilon}\left(v_m^\varepsilon, \partial_t v_m^\varepsilon\right) + \lambda^\varepsilon\left(u_m^\varepsilon, \partial_t v_m^\varepsilon\right) + \int_0^L \left(l_2^\varepsilon v_m^\varepsilon + r^\varepsilon u_m^\varepsilon\right)\partial_t v_m^\varepsilon dx_1 \\
&= \left(g^\varepsilon, \partial_t v_m^\varepsilon\right),
\end{aligned}$$

comme $\int_0^t a_{\alpha^\varepsilon}\left(u_m^\varepsilon(s), \partial_t u_m^\varepsilon(s)\right) ds$, $\int_0^t a_{\beta^\varepsilon}\left(v_m^\varepsilon(s), \partial_t v_m^\varepsilon(s)\right) ds$, $\int_0^t \int_0^L \left(u_m^\varepsilon(s).\partial_t u_m^\varepsilon(s)\right) dx_1 ds$ et $\int_0^t \int_0^L \left(v_m^\varepsilon.\partial_t v_m^\varepsilon\right) dx_1 ds$ sont des termes positifs, en intégrant de 0 à t, nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left\|\partial_t u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 ds + \int_0^t \left\|\partial_t v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 ds + \lambda^\varepsilon \int_0^t \left(v_m^\varepsilon(s), \partial_t u_m^\varepsilon(s)\right) ds \\
&+ \lambda^\varepsilon \int_0^t \left(u_m^\varepsilon(s), \partial_t v_m^\varepsilon(s)\right) \\
&\leq \int_0^t \left(f^\varepsilon(s), \partial_t u_m^\varepsilon(s)\right) ds + \int_0^t \left(g^\varepsilon(s), \partial_t v_m^\varepsilon(s)\right) \\
&- r^\varepsilon \int_0^t \int_0^L u_m^\varepsilon(s).\partial_t v_m^\varepsilon(s)\, dx_1 ds + r^\varepsilon \int_0^t \int_0^L v_m^\varepsilon(s).\left(\partial_t u_m^\varepsilon(s)\right) dx_1 ds.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le Théorème de trace et l'inégalité de Young, on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\int_0^t \left\|\partial_t u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 ds + \frac{1}{4}\int_0^t \left\|\partial_t v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 ds \\
&\leq 4\lambda^\varepsilon \int_0^t \left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 ds + 4\lambda^\varepsilon \int_0^t \left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 ds + 4\int_0^t \left\|f^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 ds \\
&+ 4r^\varepsilon C\left(\Omega^\varepsilon\right)\int_0^t \left(\left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 + \left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(]0,L[)}^2\right) ds + 4\int_0^t \left\|g^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 ds,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

D'autre part, d'après l'estimation (3.8), nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 ds + \int_0^t \left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(]0,L[)}^2 ds \\
&+ \int_0^t \left\|u_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 ds + \int_0^t \left\|v_m^\varepsilon(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 ds \\
&\leq c.
\end{aligned}$$

Donc, de (3.9), on en déduit qu'il existec $c > 0$ qui ne dépend pas de m tel que

$$\|\partial_t u_m^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega^\varepsilon))} + \|\partial_t v_m^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega^\varepsilon))} \leq c. \tag{3.10}$$

Passage à la limite.

De (3.8) et (3.10), nous concluons qu'il existe une sous-séquence de la séquence $(u_m^\varepsilon, v_m^\varepsilon)$,avec la même notation, telle que

$$\begin{aligned} (u_m^\varepsilon, v_m^\varepsilon) &\rightharpoonup (u^\varepsilon, v^\varepsilon) \text{ dans } L^2\left(0, T, H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^2, \\ (\partial_t u_m^\varepsilon, \partial_t v_m^\varepsilon) &\rightharpoonup (\partial_t u^\varepsilon, \partial_t v^\varepsilon) \text{ dans } L^2\left(0, T, L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les arguments comme dans le chapitre 2 et le fait que l'espace V_m^ε est dense dans V^ε, on passe à la limite comme $m \to 0$ dans (3.7), on déduit que u^ε et v^ε satisfont

$$\begin{aligned} &(\partial_t u^\varepsilon, \varphi) + a_{\alpha^\varepsilon}(u^\varepsilon, \varphi) + \lambda^\varepsilon(v^\varepsilon, \varphi) + \int_0^L \left(l_1^\varepsilon u^\varepsilon - r^\varepsilon v^\varepsilon\right).\varphi dx_1 \\ &= (f^\varepsilon, \varphi), \forall \varphi \in V^\varepsilon, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &(\partial_t v^\varepsilon, \psi) + a_{\beta^\varepsilon}(v^\varepsilon, \psi) + \lambda^\varepsilon(u^\varepsilon, \psi) + \int_0^L \left(l_2^\varepsilon v_m^\varepsilon + r^\varepsilon u_m^\varepsilon\right).\psi dx_1 \\ &= (g^\varepsilon, \psi), \forall \psi \in V^\varepsilon, \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u^\varepsilon + \mathcal{A}_{\alpha^\varepsilon}\left(u^\varepsilon\right) + \lambda^\varepsilon v^\varepsilon = f^\varepsilon, \\ \partial_t v^\varepsilon + \mathcal{A}_{\beta^\varepsilon}\left(v^\varepsilon\right) + \lambda^\varepsilon u^\varepsilon = g^\varepsilon, \end{aligned}\right\} \quad \text{p.p dans } \Omega^\varepsilon \times (0, T).$$

Donc, l'existence de la solution est prouvé. □

3.3.2 Unicité

Nous prouvons maintenant que la solution obtenue est unique.

Démonstration. Supposons que le problème (3.6) admet deux solutions $(u_1^\varepsilon, v_1^\varepsilon)$ et $(u_2^\varepsilon, v_2^\varepsilon)$. Donc, on a

$$\begin{aligned} &(\partial_t u_1^\varepsilon, \varphi) + a_{\alpha^\varepsilon}\left(u_1^\varepsilon, \varphi\right) + \lambda^\varepsilon\left(v_1^\varepsilon, \varphi\right) + \int_0^L \left(l_1^\varepsilon u_1^\varepsilon - r^\varepsilon v_1^\varepsilon\right)(\varphi)\, dx_1 \\ &= (f^\varepsilon, \varphi), \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\left(\partial_t v_1^\varepsilon,\psi\right)+a_{\beta^\varepsilon}\left(v_1^\varepsilon,\psi\right)+\lambda^\varepsilon\left(u_1^\varepsilon,\psi\right)+\int_0^L\left(l_2^\varepsilon v_1^\varepsilon+ru_1\right)(\psi)\,dx_1 \tag{3.12}$$
$$=\left(g^\varepsilon,\psi\right),$$

et

$$\left(\partial_t u_2^\varepsilon,\varphi\right)+a_{\alpha^\varepsilon}\left(u_2^\varepsilon,\varphi\right)+\lambda^\varepsilon\left(v_2^\varepsilon,\varphi\right)+\int_0^L\left(l_1^\varepsilon u_2^\varepsilon-r^\varepsilon v_2\right)\varphi dx_1 \tag{3.13}$$
$$=\left(f^\varepsilon,\varphi\right),$$

$$\left(\partial_t v_2^\varepsilon,\psi\right)+a_{\beta^\varepsilon}\left(v_2^\varepsilon,\psi\right)+\lambda^\varepsilon\left(u_2^\varepsilon,\psi\right)+\int_0^L\left(l_2^\varepsilon v_2^\varepsilon+r^\varepsilon u_2^\varepsilon\right)\psi dx_1 \tag{3.14}$$
$$=\left(g^\varepsilon,\psi\right).$$

Nous prenons $\varphi=u_2^\varepsilon-u_1^\varepsilon$ dans (3.11), $\psi=v_2^\varepsilon-v_1^\varepsilon$ dans (3.12) et $\varphi=u_1^\varepsilon-u_2^\varepsilon$ dans (3.13), $\psi=\left(v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon\right)$ dans (3.14), nous trouvons

$$\begin{aligned}&\left(\partial_t u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon-u_1^\varepsilon\right)+a_{\alpha^\varepsilon}\left(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon-u_1^\varepsilon\right)+\lambda^\varepsilon\left(v_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon-u_1^\varepsilon\right)\\&+\int_0^L\left(l_1^\varepsilon u_1^\varepsilon-r^\varepsilon v_1^\varepsilon\right)\left(u_2^\varepsilon-u_1^\varepsilon\right)dx_1\\&=\left(f^\varepsilon,u_2^\varepsilon-u_1^\varepsilon\right),\end{aligned} \tag{3.15}$$
$$\begin{aligned}&\left(\partial_t u_2^\varepsilon,u_1^\varepsilon-u_2^\varepsilon\right)+a_{\alpha^\varepsilon}\left(u_2^\varepsilon,u_1^\varepsilon-u_2^\varepsilon\right)+\lambda^\varepsilon\left(v_2^\varepsilon,u_1^\varepsilon-u_2^\varepsilon\right)\\&+\int_0^L\left(l_1^\varepsilon u_2^\varepsilon-r^\varepsilon v_2\right)\left(u_1^\varepsilon-u_2^\varepsilon\right)dx_1\\&=\left(f^\varepsilon,u_1^\varepsilon-u_2^\varepsilon\right),\end{aligned} \tag{3.16}$$

et

$$\begin{aligned}&\left(\partial_t v_1^\varepsilon,v_2^\varepsilon-v_1^\varepsilon\right)+a_{\beta^\varepsilon}\left(v_1^\varepsilon,v_2^\varepsilon-v_1^\varepsilon\right)+\lambda^\varepsilon\left(u_1^\varepsilon,v_2^\varepsilon-v_1^\varepsilon\right)\\&+\int_0^L\left(l_2^\varepsilon v_1^\varepsilon+ru_1\right)\left(v_2^\varepsilon-v_1^\varepsilon\right)dx_1\\&=\left(g^\varepsilon,v_2^\varepsilon-v_1^\varepsilon\right),\end{aligned} \tag{3.17}$$
$$\begin{aligned}&\left(\partial_t v_2^\varepsilon,v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon\right)+a_{\beta^\varepsilon}\left(v_2^\varepsilon,v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon\right)+\lambda^\varepsilon\left(u_2^\varepsilon,v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon\right)\\&+\int_0^L\left(l_2^\varepsilon v_2^\varepsilon+r^\varepsilon u_2^\varepsilon\right)\left(v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon\right)dx_1\\&=\left(g^\varepsilon,v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon\right).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Nous posons $\mathcal{U}^\varepsilon=u_1^\varepsilon-u_2^\varepsilon$ et $\mathcal{V}^\varepsilon=v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon$, puis nous ajoutons l'équation (3.15) à l'équation (3.16) et l'équation (3.17) à l'équation (3.18), nous obtenons

$$-\left(\partial_t\mathcal{U}^\varepsilon,\mathcal{U}^\varepsilon\right)-a_{\alpha^\varepsilon}\left(\mathcal{U}^\varepsilon,\mathcal{U}^\varepsilon\right)-\lambda^\varepsilon\left(\mathcal{V}^\varepsilon,\mathcal{U}^\varepsilon\right)-l_1^\varepsilon\int_0^L\mathcal{U}^\varepsilon.\mathcal{U}^\varepsilon dx_1+\int_0^L r^\varepsilon\mathcal{V}^\varepsilon.\mathcal{U}^\varepsilon dx_1=0,$$

et

$$-\left(\partial_t \mathcal{V}^\varepsilon, \mathcal{V}^\varepsilon\right) - a_{\beta^\varepsilon}\left(\mathcal{V}^\varepsilon, \mathcal{V}^\varepsilon\right) - \lambda^\varepsilon\left(\mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{V}^\varepsilon\right) - l_2^\varepsilon \int_0^L \mathcal{V}^\varepsilon.\mathcal{V}^\varepsilon dx_1 - \int_0^L r^\varepsilon \mathcal{U}^\varepsilon.\mathcal{V}^\varepsilon dx_1 = 0.$$

Maintenant, en additionnant les deux équations ci-dessus, nous trouvons

$$\begin{aligned}&(\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon(s), \mathcal{U}^\varepsilon(s)) + (\partial_t \mathcal{V}^\varepsilon(s), \mathcal{V}^\varepsilon(s)) + a_{\alpha^\varepsilon}\left(\mathcal{U}^\varepsilon(s), \mathcal{U}^\varepsilon(s)\right) + a_{\beta^\varepsilon}\left(\mathcal{V}^\varepsilon(s), \mathcal{V}^\varepsilon(s)\right)\\ &\leq -2\lambda^\varepsilon\left(\mathcal{V}^\varepsilon(s), \mathcal{U}^\varepsilon(s)\right),\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{2dt}\left(\|\mathcal{U}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\mathcal{V}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right) + a_{\alpha^\varepsilon}\left(\mathcal{U}^\varepsilon(s), \mathcal{U}^\varepsilon(s)\right) + a_{\beta^\varepsilon}\left(\mathcal{V}^\varepsilon(s), \mathcal{V}^\varepsilon(s)\right)\\ &\leq -2\lambda^\varepsilon\left(\mathcal{V}^\varepsilon(s), \mathcal{U}^\varepsilon(s)\right),\end{aligned} \tag{3.19}$$

D'un autre coté, d'après la coercivité de $a_{c^\varepsilon}(\cdot,\cdot)$, nous avons

$$\int_0^t a_{c^\varepsilon}(\Psi(s), \Psi(s))ds \geq \mu_c \int_0^t \|\Psi(s)\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)} ds.$$

Donc, en intégrant l'inégalité (3.19) sur $(0, t)$, on déduit que

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{U}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\mathcal{V}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu_\alpha \int_0^t \|\mathcal{U}^\varepsilon(s)\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)} ds + \mu_\beta \int_0^t \|\mathcal{V}^\varepsilon(s)\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)} ds\\ &\leq 4\lambda^\varepsilon \int_0^t \left(\|\mathcal{U}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\mathcal{V}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right) ds.\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le lemme de Gronwall, nous trouvons

$$(\mathcal{U}^\varepsilon(s), \mathcal{V}^\varepsilon(s)) = (0, 0), \quad \forall s \in (0, T).$$

Donc, nous obtenons l'unicité de la solution. □

3.4 Analyse asymptotique du problème

Pour l'analyse asymptotique du problème (3.1)-(3.4), nous utilisons l'approche qui consiste à transposer le problème initialement posé dans le domaine qui dépend d'un petit paramètre ε dans un problème équivalent posé dans un domaine fixe et indépendant de ε.

3.4.1 Le problème dans un domaine fixe et quelques estimations

On utilise le changement de variables $z = \frac{x_2}{\varepsilon}$, donc le domaine Ω^ε se transforme à un domaine Ω indépendant de ε, où

$$\Omega = \left\{(x_1, z) \in \mathbb{R}^2, 0 < x_1 < L, 0 < z < h(x_1)\right\}.$$

On note par $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$ sa frontière, où

— $\partial\Omega_1 = \{x \in \partial\Omega : x_2 = h(x_1)\}$,
— $\partial\Omega_2 = (\{x_1 = 0\} \cup \{x_1 = L\}) \times]0, h(x_1)[$,
— $\partial\Omega_3 =]0, L[$.

Maintenant, nous définissons les fonctions suivantes dans Ω

$$u^\varepsilon(x_1, x_2, t) = \hat{u}^\varepsilon(x_1, z, t), \quad v^\varepsilon(x_1, x_2, t) = \hat{v}^\varepsilon(x_1, z, t). \tag{3.20}$$

Pour les données du problème $(3.1) - (3.4)$, on suppose qu'elles dépendent de ε de la manière suivantes

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^\varepsilon(x_1, x_2) &= \hat{\alpha}_{ij}(x_1, z), 1 \leq i, j \leq 2, \\ \beta_{ij}^\varepsilon(x_1, x_2) &= \hat{\beta}_{ij}(x_1, z), 1 \leq i, j \leq 2, \\ \varepsilon^2 f^\varepsilon(x_1, x_2, t) &= \hat{f}(x_1, z, t), \quad \varepsilon^2 g^\varepsilon(x_1, x_2, t) = \hat{g}(x_1, z, t), \\ \varepsilon^2\lambda^\varepsilon &= \hat{\lambda}, \quad \varepsilon l_1^\varepsilon = \hat{l}_1, \quad \varepsilon l_2^\varepsilon = \hat{l}_2, \quad \varepsilon r^\varepsilon = \hat{r}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Proposition 3.1. *D'après* (3.20) *et* (3.21), *le problème* (3.6) *équivalent au problème suivant*

Problème $\mathcal{P}_{\hat{\mathcal{V}}}$. *Trouver* $(\hat{u}^\varepsilon, \hat{v}^\varepsilon) \in V$, *telle que*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \varepsilon^2 \partial_t \hat{u}^\varepsilon \varphi dx_1 dz + \varepsilon^2 \int_\Omega \hat{\alpha}_{11}(x_1, z)(\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon)(\partial_{x_1}\varphi) dx_1 dz \\ &+ \varepsilon \int_\Omega \hat{\alpha}_{12}(x_1, z)(\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon)(\partial_z\varphi) dx_1 dz + \varepsilon \int_\Omega \hat{\alpha}_{21}(x_1, z)(\partial_z\hat{u}^\varepsilon)(\partial_{x_1}\varphi) dx_1 dz \\ &+ \int_\Omega \hat{\alpha}_{22}(x_1, z)(\partial_z\hat{u}^\varepsilon)(\partial_z\varphi) dx_1 dz + \hat{\lambda}\int_\Omega \hat{v}^\varepsilon \cdot \varphi dx_1 dz + \hat{l}_1 \int_0^L \hat{u}^\varepsilon \cdot \varphi dx_1 - \hat{r}\int_0^L \hat{v}^\varepsilon \cdot \varphi dx_1 \\ &= \int_\Omega \hat{f}\varphi dx_1 dz, \quad \forall\varphi \in V, \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \varepsilon^2 (\partial_t \hat{v}^\varepsilon)\psi dx_1 dz + \varepsilon^2 \int_\Omega \hat{\beta}_{11}(x_1, z)(\partial_{x_1}\hat{v}^\varepsilon)(\partial_{x_1}\psi) dx_1 dz \\ &+ \varepsilon \int_\Omega \hat{\beta}_{12}(x_1, z)(\partial_{x_1}\hat{v}^\varepsilon)(\partial_z\psi) dx_1 dz + \varepsilon \int_\Omega \hat{\beta}_{21}(x_1, z)(\partial_z\hat{v}^\varepsilon)(\partial_{x_1}\psi) dx_1 dz \\ &+ \int_\Omega \hat{\beta}_{22}(x_1, z)(\partial_z\hat{v}^\varepsilon)(\partial_z\psi) dx_1 dz + \hat{\lambda}\int_\Omega \hat{u}^\varepsilon \cdot \varphi dx_1 dz + \hat{l}_2 \int_0^L \hat{v}^\varepsilon \cdot \psi dx_1 + \hat{r}\int_0^L \hat{v}^\varepsilon \cdot \psi dx_1 \\ &= \int_\Omega \hat{g}\psi dx_1 dz, \forall\psi \in V, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$(\hat{u}^\varepsilon(x_1, z, 0), \hat{v}^\varepsilon(x_1, z, 0)) = (0, 0),$$

où

$$V = \left\{\zeta \in H^1(\Omega) : \zeta = 0 \; sur \; \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2\right\}.$$

Démonstration. En multipliant la première et la deuxième équation de (3.6) par ε, on obtient

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \partial_t u^\varepsilon.\varphi dx_1 dx_2 + \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \alpha_{11}^\varepsilon(x)\partial_{x_1}(u^\varepsilon).\partial_{x_1}\varphi dx_1 dx_2 \\
&+ \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \alpha_{12}^\varepsilon(x)\partial_{x_2}(u^\varepsilon).\partial_{x_1}\varphi dx_1 dx_2 + \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \alpha_{21}^\varepsilon(x)\partial_{x_1}(u^\varepsilon).\partial_{x_2}\varphi dx_1 dx_2 \\
&+ \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \alpha_{22}^\varepsilon(x)\partial_{x_2}(u^\varepsilon).\partial_{x_2}\varphi dx_1 dx_2 + \varepsilon \int_0^L \left(l_1^\varepsilon u^\varepsilon - r^\varepsilon v^\varepsilon\right).\varphi dx_1 \\
&+ \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon v^\varepsilon.\varphi dx_1 dx_2 \\
&= \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon.\varphi dx_1 dx_2,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \partial_t v^\varepsilon.\psi dx_1 dx_2 + \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \beta_{11}^\varepsilon(x)\partial_{x_1}(v^\varepsilon).\partial_{x_1}\psi dx_1 dx_2 \\
&+ \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \beta_{12}^\varepsilon(x)\partial_{x_2}(v^\varepsilon).\partial_{x_1}\psi dx_1 dx_2 + \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \beta_{21}^\varepsilon(x)\partial_{x_1}(v^\varepsilon).\partial_{x_2}\psi dx_1 dx_2 \\
&+ \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \beta_{22}^\varepsilon(x)\partial_{x_2}(v^\varepsilon).\partial_{x_2}\psi dx_1 dx_2 + \varepsilon \int_0^L \left(l_2^\varepsilon v^\varepsilon + r^\varepsilon u^\varepsilon\right).\psi dx_1 \\
&+ \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon u^\varepsilon.\psi dx_1 dx_2 \\
&= \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} g^\varepsilon.\psi dx_1 dx_2,
\end{aligned}$$

en passant maintenant au domaine fixe Ω puis en utilisant (3.20) et (3.21), nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_t \hat{u}^\varepsilon.\varphi dx_1 dz + \varepsilon^2 \int_{\Omega}^{\varepsilon} \hat{\alpha}_{11}(x_1,z)\partial_{x_1}(\hat{u}^\varepsilon).\partial_{x_1}\varphi dx_1 dz \\
&+ \varepsilon \int_{\Omega} \hat{\alpha}_{12}(x_1,z)\partial_{z}(\hat{u}^\varepsilon).\partial_{x_1}\varphi dx_1 dz + \varepsilon \int_{\Omega} \hat{\alpha}_{21}(x_1,z)\partial_{x_1}(\hat{u}^\varepsilon).\partial_{z}\varphi dx_1 dz \\
&+ \int_{\Omega} \hat{\alpha}_{22}(x_1,z)\partial_{z}(\hat{u}^\varepsilon).\partial_{z}\varphi dx_1 dz + \int_0^L \left(\hat{l}_1 \hat{u}^\varepsilon - \hat{r}\hat{v}^\varepsilon\right).\varphi dx_1 \\
&+ \int_{\Omega} \hat{\lambda}\hat{v}^\varepsilon.\varphi dx_1 dz \\
&= \int_{\Omega} \hat{f}.\varphi dx_1 dz,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \int_\Omega \partial_t \hat{v}^\varepsilon.\psi dx_1 dz + \varepsilon^2 \int_\Omega^\varepsilon \hat{\alpha}_{11}(x_1,z)\partial_{x_1}(\hat{v}^\varepsilon).\partial_{x_1}\psi dx_1 dz \\
&+\varepsilon \int_\Omega \hat{\alpha}_{12}(x_1,z)\partial_z(\hat{v}^\varepsilon).\partial_{x_1}\psi dx_1 dz + \varepsilon \int_\Omega \hat{\alpha}_{21}(x_1,z)\partial_{x_1}(\hat{v}^\varepsilon).\partial_z\psi dx_1 dz \\
&+\int_\Omega \hat{\alpha}_{22}(x_1,z)\partial_z(\hat{v}^\varepsilon).\partial_z\psi dx_1 dz + \int_0^L \left(\hat{l}_1\hat{v}^\varepsilon + \hat{r}\hat{u}^\varepsilon\right).\psi dx_1 \\
&+\int_\Omega \hat{\lambda}\hat{u}^\varepsilon.\psi dx_1 dz \\
&= \int_\Omega \hat{g}.\psi dx_1 dz.
\end{aligned}$$

D'où $(3.22)-(3.23)$. □

Nous allons maintenant obtenir des estimations pour $\hat{u}^\varepsilon$, $\hat{v}^\varepsilon$, $\partial_t\hat{u}^\varepsilon$ et $\partial_t\hat{v}^\varepsilon$. Ces estimations se sont utiles pour obtenir les résultats de convergence et le problème limite.

Théorème 3.2. *Suppose que $f^\varepsilon, g^\varepsilon \in L^2(0,T,L^2(\Omega^\varepsilon))$ et $4\hat{\lambda}\bar{h}^2 < \min(\mu_\alpha,\mu_\beta)$. Alors il existe une constante c indépendant de ε tel que*

$$\begin{aligned}
&\|\varepsilon\hat{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon\hat{v}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|\partial_z\hat{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \\
&+\|\varepsilon\partial_{x_1}\hat{v}^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|\partial_z\hat{v}^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(0,T,L^2(]0,L[)} \\
&+\|v^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \\
&\le c,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\left\|\varepsilon^2\partial_t\hat{u}^\varepsilon\right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \left\|\varepsilon^2\partial_t\hat{v}^\varepsilon\right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \le c. \tag{3.25}$$

Démonstration. Soit $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ la solution du problème (3.1)-(3.2). Nous prenons $(\varphi,\psi) = (u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ dans (3.6), nous trouvons

$$(\partial_t u^\varepsilon, u^\varepsilon) + a_{\alpha^\varepsilon}(u^\varepsilon,u^\varepsilon) + \lambda^\varepsilon(v^\varepsilon,u^\varepsilon) + \int_0^L (l_1^\varepsilon u^\varepsilon - r^\varepsilon v^\varepsilon).u^\varepsilon dx_1 = (f^\varepsilon, u^\varepsilon),$$

et

$$(\partial_t v^\varepsilon, v^\varepsilon) + a_{\beta^\varepsilon}(v^\varepsilon,v^\varepsilon) + \lambda^\varepsilon(u^\varepsilon,v^\varepsilon) + \int_0^L (l_2^\varepsilon v^\varepsilon + r^\varepsilon u^\varepsilon).v^\varepsilon dx_1 = (g^\varepsilon, v^\varepsilon).$$

Donc, nous concluons que

$$\frac{d}{2dt}\|u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + a_{\alpha^\varepsilon}(u^\varepsilon,u^\varepsilon) + \lambda^\varepsilon(v^\varepsilon,u^\varepsilon) + \int_0^L (l_1^\varepsilon u^\varepsilon - r^\varepsilon v^\varepsilon).u^\varepsilon dx_1 = (f^\varepsilon, u^\varepsilon),$$

et

$$\frac{d}{2dt}\|v^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + a_{\beta^\varepsilon}(v^\varepsilon,v^\varepsilon) + \lambda^\varepsilon(u^\varepsilon,v^\varepsilon) + \int_0^L (l_2^\varepsilon v^\varepsilon + r^\varepsilon u^\varepsilon).v^\varepsilon dx_1 = (g^\varepsilon, v^\varepsilon).$$

En intégrant les deux formules sur $(0,t)$ puis en additionnant le résultat, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\|u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\|v^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right)+\mu_\alpha\int_0^t\|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}\,ds \\
&+\mu_\beta\int_0^t\|\nabla v^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}\,ds+l_1^\varepsilon\int_0^t\|u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(]0,L[)}\,ds+l_2^\varepsilon\int_0^t\|v^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(]0,L[)}\,ds \\
&\le\int_0^t\int_{\Omega^\varepsilon}|f^\varepsilon(s).u^\varepsilon(s)|\,dxds+\int_0^t\int_{\Omega^\varepsilon}|g^\varepsilon(s).v^\varepsilon(s)|\,dxds \\
&+2\lambda^\varepsilon\int_0^t\int_{\Omega^\varepsilon}|u^\varepsilon(s).v^\varepsilon(s)|\,dxds.
\end{aligned}\tag{3.26}$$

Maintenant, nous estimons le membre droit de l'inégalité (3.26). En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, Poincaré

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\le\varepsilon\bar{h}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2},\forall\varphi\in V^\varepsilon,$$

et de Young, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_{\Omega^\varepsilon}|f^\varepsilon(s).u^\varepsilon(s)|\,dxds\le{}&\frac{2\varepsilon^2\bar{h}^2}{\mu_\alpha}\int_0^t\|f^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,ds \\
&+\frac{\mu_\alpha}{2}\int_0^t\|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}\,ds,
\end{aligned}\tag{3.27}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_{\Omega^\varepsilon}|g^\varepsilon(s).v^\varepsilon(s)|\,dxds\le{}&\frac{2\varepsilon^2\bar{h}^2}{\mu_\beta}\int_0^t\|g^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,ds \\
&+\frac{\mu_\beta}{2}\int_0^t\|\nabla v^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}\,ds,
\end{aligned}\tag{3.28}$$

aussi, nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda^\varepsilon\int_0^t\int_{\Omega^\varepsilon}|v^\varepsilon(s).u^\varepsilon(s)|\,dxds&\le\lambda^\varepsilon\int_0^t\|v^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,.\,\|u^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,ds \\
&\le\hat{\lambda}\bar{h}^2\int_0^t\|\nabla v^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}\,ds+\hat{\lambda}\bar{h}^2\int_0^t\|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}\,ds.
\end{aligned}\tag{3.29}$$

En insérant les inégalités (3.27), (3.28) et (3.29) dans (3.26), on obtient

$$\begin{aligned}
&\|u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\|v^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\left(\frac{\mu_\alpha}{2}-2\hat{\lambda}\bar{h}^2\right)\int_0^t\|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}\,ds \\
&+\left(\frac{\mu_\beta}{2}-2\hat{\lambda}\bar{h}^2\right)\int_0^t\|\nabla v^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}\,ds+l_1^\varepsilon\int_0^t\|u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(]0,L[)}\,ds \\
&+l_2^\varepsilon\int_0^t\|v^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(]0,L[)}\,ds \\
&\le\frac{2\varepsilon^2\bar{h}^2}{\mu_\alpha}\int_0^t\|f^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,ds+\frac{2\varepsilon^2\bar{h}^2}{\mu_\beta}\int_0^t\|g^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,ds,
\end{aligned}\tag{3.30}$$

comme

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \left\| f^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} &= \varepsilon^{-1} \| \hat{f} \|^2_{L^2(\Omega)}, \\ \varepsilon^2 \left\| g^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} &= \varepsilon^{-1} \| \hat{g} \|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \left\| \nabla u^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2} &= \varepsilon \left\| \partial_{x_1} u^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon \left\| \partial_{x_2} u^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\ &= \left\| \varepsilon \partial_{x_1} \hat{u}^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \partial_z u^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varepsilon \left\| \nabla v^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2} &= \varepsilon \left\| \partial_{x_1} v^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon \left\| \partial_{x_2} v^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\ &= \left\| \varepsilon \partial_{x_1} \hat{v}^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \partial_z \hat{v}^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

on multiplie l'inégalité (3.30) par ε, nous déduisons que

$$\begin{aligned}&\varepsilon \left\| u^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon \left\| v^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left(\frac{\mu_\alpha}{2} - 2\hat{\lambda}\bar{h}^2 \right) \int_0^t \varepsilon \left\| \nabla u^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2} ds \\ &+ \left(\frac{\mu_\beta}{2} - 2\hat{\lambda}\bar{h}^2 \right) \int_0^t \varepsilon \left\| \nabla v^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2} ds + \hat{l}_1 \int_0^t \left\| u^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(]0,L[)} ds \\ &+ \hat{l}_2 \int_0^t \left\| v^\varepsilon(s) \right\|^2_{L^2(]0,L[)} ds \\ &\leq A,\end{aligned} \tag{3.31}$$

où $A = \frac{2\bar{h}^2}{\mu_\alpha} \| \hat{f}(t) \|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \frac{2\bar{h}^2}{\mu_\beta} \| \hat{g}(t) \|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$ est une constante indépendante de ε. De (3.31), on déduit (3.24).

Pour montrer l'estimation (3.25), on pose $\varphi = \partial_t \hat{u}^\varepsilon$ dans (3.22), on trouve

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \varepsilon^2 \partial_t \hat{u}^\varepsilon \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 dz + \varepsilon^2 \int_\Omega \hat{a}_{11}(x_1, z) \left(\partial_{x_1} \hat{u}^\varepsilon \right) \left(\partial_{x_1} \partial_t \hat{u}^\varepsilon \right) dx_1 dz \\ &+ \varepsilon \int_\Omega \hat{a}_{12}(x_1, z) \left(\partial_{x_1} \hat{u}^\varepsilon \right) \left(\partial_z \partial_t \hat{u}^\varepsilon \right) dx_1 dz \\ &+ \varepsilon \int_\Omega \hat{a}_{21}(x_1, z) \left(\partial_z \hat{u}^\varepsilon \right) \left(\partial_{x_1} \partial_t \hat{u}^\varepsilon \right) dx_1 dz \\ &+ \int_\Omega \hat{a}_{22}(x_1, z) \left(\partial_z \hat{u}^\varepsilon \right) \left(\partial_z \partial_t \hat{u}^\varepsilon \right) dx_1 dz + \hat{\lambda} \int_\Omega \hat{v}^\varepsilon . \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 dz \\ &+ \hat{l}_1 \int_0^L \hat{u}^\varepsilon . \varepsilon \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 - \hat{r} \int_0^L \hat{v}^\varepsilon . \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 \\ &= \int_\Omega \hat{f} . \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 dz.\end{aligned} \tag{3.32}$$

En intégrant cette formule sur $(0,t)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega \varepsilon^2 \partial_t \hat{u}^\varepsilon \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 dz ds + \varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega \hat{a}_{11}(x_1,z)\left(\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_{x_1}\partial_t \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz ds \\
&+ \varepsilon \int_0^t \int_\Omega \hat{a}_{12}(x_1,z)\left(\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_z \partial_t \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz ds \\
&+ \varepsilon \int_0^t \int_\Omega \hat{a}_{21}(x_1,z)\left(\partial_z \hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_{x_1}\partial_t \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz ds \\
&+ \int_0^t \int_\Omega \hat{a}_{22}(x_1,z)\left(\partial_z \hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_z \partial_t \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz ds + \hat{\lambda} \int_0^t \int_\Omega \hat{v}^\varepsilon . \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 dz ds \\
&+ \hat{l}_1 \int_0^t \int_0^L \hat{u}^\varepsilon . \varepsilon \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 ds - \hat{r} \int_0^t \int_0^L \hat{v}^\varepsilon . \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 ds \\
&= \int_0^t \int_\Omega \hat{f} . \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 dz ds.
\end{aligned}$$

D'autre part, on utilise l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \hat{a}_{12}(x_1,z)\left(\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_z \partial_t \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz ds \\
&= \int_\Omega \hat{a}_{12}(x_1,z)\left(\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_z \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz - \varepsilon \int_0^t \int_\Omega \hat{a}_{12}(x_1,z)\left(\partial_{x_1}\partial_t \hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_z \partial_t \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz ds
\end{aligned}$$

Donc, on déduit

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega \varepsilon^2 \partial_t \hat{u}^\varepsilon \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 dz ds + \varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega \hat{a}_{11}(x_1,z)\left(\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_{x_1}\partial_t \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz ds \\
&+ \varepsilon \int_\Omega \hat{a}_{12}(x_1,z)\left(\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_z \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz \\
&- \varepsilon \int_0^t \int_\Omega \hat{a}_{12}(x_1,z)\left(\partial_{x_1}\partial_t \hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_z \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz ds \\
&+ \varepsilon \int_0^t \int_\Omega \hat{a}_{21}(x_1,z)\left(\partial_z \hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_{x_1}\partial_t \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz ds \\
&+ \int_0^t \int_\Omega \hat{a}_{22}(x_1,z)\left(\partial_z \hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_z \partial_t \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz s ds + \hat{\lambda} \int_0^t \int_\Omega \hat{v}^\varepsilon . \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 dz ds \\
&+ \hat{l}_1 \int_0^t \int_0^L \hat{u}^\varepsilon . \varepsilon \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 ds - \hat{r} \int_0^t \int_0^L \hat{v}^\varepsilon . \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 ds \\
&= \int_0^t \int_\Omega \hat{f} . \partial_t \hat{u}^\varepsilon dx_1 dz ds,
\end{aligned}$$

maintenant, en utilisant le fait que $\hat{a}_{12}(x_1,z) = \hat{a}_{21}(x_1,z)$ et

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_\Omega \hat{a}_{22}(x_1,z)\left(\partial_z \hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_z \partial_t \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz s ds &\geq 0, \\
\varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega \hat{a}_{11}(x_1,z)\left(\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_{x_1}\partial_t \hat{u}^\varepsilon\right) dx_1 dz ds &\geq 0,
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega \varepsilon^2\partial_t\hat{u}^\varepsilon\partial_t\hat{u}^\varepsilon dx_1dzds+\varepsilon\int_\Omega \hat{a}_{12}\left(x_1,z\right)\left(\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\right)\left(\partial_z\hat{u}^\varepsilon\right)dx_1dz\\&+\hat{\lambda}\int_0^t\int_\Omega \hat{v}^\varepsilon.\partial_t\hat{u}^\varepsilon dx_1dzds+\hat{l}_1\int_0^t\int_0^L \hat{u}^\varepsilon.\varepsilon\partial_t\hat{u}^\varepsilon dx_1ds-\hat{r}\int_0^t\int_0^L \hat{v}^\varepsilon.\partial_t\hat{u}^\varepsilon dx_1ds\\&=\int_0^t\int_\Omega \hat{f}.\partial_t\hat{u}^\varepsilon dx_1dzds.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left\|\varepsilon\partial_t\hat{u}^\varepsilon\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}ds-\hat{\lambda}\int_0^t\int_\Omega \partial_t\hat{v}^\varepsilon\left(s\right).\hat{u}^\varepsilon\left(s\right)dx_1dzds\\&\leq\varepsilon\int_\Omega \hat{a}_{12}\left(x_1,z\right)\left|\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\right|\left|\partial_z\hat{u}^\varepsilon\right|dx_1dz+\int_0^t\int_\Omega \hat{f}\left(s\right).\partial_t\hat{u}^\varepsilon\left(s\right)dx_1dzds\\&-\hat{\lambda}\int_\Omega \hat{v}^\varepsilon\left(t\right).\hat{u}^\varepsilon\left(t\right)dx_1dz+\hat{r}\int_0^L \hat{v}^\varepsilon\left(t\right).\partial_t\hat{u}^\varepsilon\left(t\right)dx_1,\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left\|\varepsilon\partial_t\hat{u}^\varepsilon\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}ds-\hat{\lambda}\int_0^t\int_\Omega \partial_t\hat{v}^\varepsilon\left(s\right).\hat{u}^\varepsilon\left(s\right)dx_1dzds\\&\leq\varepsilon\int_\Omega \hat{a}_{12}\left(x_1,z\right)\left|\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\right|\left|\partial_z\hat{u}^\varepsilon\right|dx_1dz+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_\Omega \hat{f}\left(s\right).\left(\varepsilon\partial_t\hat{u}^\varepsilon\left(s\right)\right)dx_1dzds\\&+\frac{\hat{r}}{\varepsilon}\int_0^L \left(\hat{v}^\varepsilon\left(t\right)\right).\left(\varepsilon\partial_t\hat{u}^\varepsilon\left(t\right)\right)dx_1+\hat{\lambda}\int_\Omega \hat{v}^\varepsilon\left(t\right).\hat{u}^\varepsilon\left(t\right)dx_1dz.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le théorème de la trace et l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left\|\varepsilon\partial_t\hat{u}^\varepsilon(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}ds-\hat{\lambda}\int_0^t\int_\Omega \partial_t\hat{v}^\varepsilon(s).\hat{u}^\varepsilon(s)dx_1dzds\\&\leq\max\left(\hat{a}_{12}\left(x_1,z\right)\right)\left(\left\|\varepsilon\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\partial_z\hat{u}^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)+\frac{4}{\varepsilon^2}\int_0^t \|\hat{f}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\\&+\frac{1}{4}\int_0^t \left\|\varepsilon\partial_t\hat{u}^\varepsilon(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)^2}ds+\hat{\lambda}\left\|\hat{v}^\varepsilon(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\hat{\lambda}\left\|\hat{u}^\varepsilon(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\&+\frac{4}{\varepsilon^2}\hat{r}^2\left(C_{(\Omega)}\right)^2\int_0^t \left\|\hat{v}^\varepsilon(s)\right\|^2_{L^2(]0,L[)}ds+\frac{1}{4}\int_0^t \left\|\varepsilon\partial_t\hat{u}^\varepsilon(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)^2}ds.\end{aligned}\tag{3.33}$$

D'autre part, nous choisissons $\psi=\partial_t\hat{v}^\varepsilon$ dans (3.23) et nous utilisons les mêmes techniques que celles appliquées à l'égalité (3.32), nous déduisons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|\varepsilon\partial_t\hat{v}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + \hat{\lambda}\int_0^t\int_\Omega \partial_t\hat{v}^\varepsilon(s).\hat{u}^\varepsilon(s)dx_1dzds \\
&\leq \max\left(\hat{a}_{12}\left(x_1,z\right)\right)\left(\|\varepsilon\partial_{x_1}\hat{v}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_z\hat{v}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \frac{4}{\varepsilon^2}\int_0^t \|\hat{g}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds \\
&+ \frac{1}{4}\int_0^t \|\varepsilon\partial_t\hat{v}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega)^2}\,ds + \frac{4}{\varepsilon^2}\hat{r}^2\left(C_{(\Omega)}\right)^2\int_0^t \|\hat{u}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(]0,L[)}\,ds \\
&+ \frac{1}{4}\int_0^t \|\varepsilon\partial_t\hat{v}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega)^2}\,ds.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Maintenant, en additionnant les deux inégalités (3.33) et (3.34), puis en multipliant le résultat par ε^2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left\|\varepsilon^2\partial_t\hat{u}^\varepsilon\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \int_0^t \left\|\varepsilon^2\partial_t\hat{v}^\varepsilon\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}ds \\
&\leq 8\int_0^t \left\|\hat{f}\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}ds + 8\int_0^t \|\hat{g}\left(s\right)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + \hat{\lambda}\,\|\varepsilon\hat{v}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \hat{\lambda}\,\|\varepsilon\hat{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ 8\hat{r}^2\left(C_{(\Omega)}\right)^2\left(\int_0^t \|\hat{u}^\varepsilon\left(s\right)\|^2_{L^2(]0;L[)}\,ds + \int_0^t \|\hat{v}^\varepsilon\left(s\right)\|^2_{L^2(]0;L[)}\,ds\right) \\
&+ \varepsilon^2\max\left(\hat{a}_{12}\left(x_1,z\right)\right)\left(\|\varepsilon\partial_{x_1}\hat{v}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_z\hat{v}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_z\hat{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que

$$\begin{aligned}
&\|\varepsilon\hat{v}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon\hat{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\hat{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T,L^2(]0;L[))} + \|\hat{v}^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T,L^2(]0;L[))} \\
&+ \varepsilon^2\max\left(\hat{a}_{12}\left(x_1,z\right)\right)\left(\|\varepsilon\partial_{x_1}\hat{v}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_z\hat{v}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_z\hat{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq c,
\end{aligned}$$

nous concluons qu'il existe une constante c independant de ε, tel que

$$\left\|\varepsilon^2\partial_t\hat{u}^\varepsilon\right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \left\|\varepsilon^2\partial_t\hat{v}^\varepsilon\right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq c.$$

□

3.4.2 Résultats de convergence et problème limite ($\varepsilon \to 0$)

Dans cette section nous donnons le système satisfait par la limite des suites $(\hat{u}^\varepsilon, \hat{v}^\varepsilon)$ sur Ω et les deux équations décrivant les conditions aux limites sur $]0, L[$, pour ce la nous introduisons l'espace de Banach

$$V_z = \left\{\zeta \in L^2(\Omega) : \partial_z\zeta \in L^2(\Omega),\, \zeta = 0 \text{ on } \partial\Omega_1\right\},$$

muni de la norme

$$\|\zeta\|_{V_z} = \left(\|\zeta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_z \zeta\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On rappelle que l'inégalité de Poincaré dans le domaine fixe Ω donnée par

$$\|\zeta\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{h} \, \|\partial_z \zeta\|_{L^2(\Omega)} \text{, pour tous } \zeta \in V_z.$$

Théorème 3.3. *Sous les hypothèses du Théorème 3.2, il existe* $u^*, v^* \in L^2(0,T;V_z)$ *tel que*

$$(\hat{u}^\varepsilon, \hat{v}^\varepsilon) \rightharpoonup (u^*, v^*) \text{, dans } \quad L^2(0,T;V_z)^2, \tag{3.35}$$

$$(\varepsilon\partial_{x_1}\hat{u}^\varepsilon, \varepsilon\partial_{x_1}\hat{v}^\varepsilon) \rightharpoonup (0,0) \text{, dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)^2, \tag{3.36}$$

$$(\varepsilon\partial_z\hat{u}^\varepsilon, \varepsilon\partial_z\hat{v}^\varepsilon) \quad \rightharpoonup (0,0) \text{, dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)^2, \tag{3.37}$$

$$\left(\varepsilon^2\partial_t\hat{u}^\varepsilon, \varepsilon^2\partial_t\hat{v}^\varepsilon\right) \rightharpoonup (0,0) \text{, dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)^2, \tag{3.38}$$

où (u^*, v^*) *est une solution faible au problème limite*

$$\left| \begin{array}{l} -\partial_z\left[\hat{\alpha}_{22}(x_1,z)\,\partial_z u^*(x_1,z,t)\right] + \hat{\lambda} v^*(x_1,z,t) = \hat{f}(x_1,z,t), \\ \\ -\partial_z\left[\hat{\beta}_{22}(x_1,z)\,\partial_z v^*(x_1,z,t)\right] + \hat{\lambda} u^*(x_1,z,t) = \hat{g}(x_1,z,t), \end{array} \right. \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ \\ b \end{array}}\right\} \text{ p.p dans } \Omega \times (0,T), \tag{3.39}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\hat{\alpha}_{22}(x_1,0)\,\partial_z u^*(x_1,0,t) + \hat{l}_1 u^*(x_1,0,t) - \hat{r} v^*(x_1,0,t) = 0 \\ -\hat{\beta}_{22}(x_1,0)\,\partial_z v^*(x_1,0,t) + \hat{l}_1 v^*(x_1,0,t) + \hat{r} u^*(x_1,0,t) = 0 \end{array} \right\} \text{ p.p dans }]0,L[\times(0,T),$$

$$(u^*(x,0), v^*(x,0)) = (0,0). \tag{3.40}$$

Démonstration. D'après le Théorème 3.2, il existe une constante c indépendant de ε tel que

$$\int_0^t \|\partial_z \hat{u}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds \leq c, \quad \int_0^t \|\partial_z \hat{v}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds \leq c$$

En utilisant ces estimations avec l'inégalité de Poincaré dans le domaine Ω, on obtient

$$\int_0^t \|\partial_z \hat{u}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds \leq \|\hat{u}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(0,T,V_z)} \leq c,$$

et

$$\int_0^t \|\partial_z \hat{v}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds \leq \|\hat{v}^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(0,T,V_z)} \leq c.$$

Donc $(\hat{u}^\varepsilon, \hat{v}^\varepsilon)_\varepsilon$ est borné dans $L^2(0,T,V_z)^2$, ce qui implique l'existence d'un élément (u^*, v^*) dans $L^2(0,T,V_z)^2$ tel que $(\hat{u}^\varepsilon, \hat{v}^\varepsilon)_\varepsilon$ converge faiblement vers (u^*, v^*) dans $L^2(0,T,V_z)^2$, on obtient donc (3.35). On en trouve (3.36) and (3.37) à partir de (3.24) et (3.35). Comme $(\hat{u}^\varepsilon, \hat{v}^\varepsilon)_\varepsilon$

converge faiblement vers (u^*, v^*) dans $L^2(0,T,V_z)^2$ et $(\varepsilon^2\partial_t\hat{u}^\varepsilon, \varepsilon^2\partial_t\hat{v}^\varepsilon)$ converge faiblement vers (χ,ζ) dans $L^2(0,T,L^2(\Omega))^2$, on en déduit $(\chi,\zeta)=(0,0)$.
Maintenant, par passage à la limite quand ε tend vers zéro dans le problème variationnel (3.22)-(3.23) et en utilisant les résultats de convergence, on en déduit

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \hat{\alpha}_{22}(x_1,z)\,\partial_z u^*\partial_z\varphi dx_1dz+\hat{\lambda}\int_\Omega v^*\varphi dx_1dz+\int_0^L\left(\hat{l}_1u^*-\hat{r}v^*\right)\varphi dx_1\\&=\int_\Omega \hat{f}.\varphi dx_1dz,\quad \forall\varphi\in V,\end{aligned}\tag{3.41}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \hat{\beta}_{22}(x_1,z)\,\partial_z v^*\partial_z\psi dx_1dz+\hat{\lambda}\int_\Omega u^*\psi dx_1dz+\int_0^L\left(\hat{l}_2v^*+\hat{r}\right)\psi dx_1\\&=\int_\Omega \hat{g}.\psi dx_1dz,\quad \forall\psi\in V,\end{aligned}\tag{3.42}$$

nous choisissons φ et ψ dans $H_0^1(\Omega)$, puis en utilisant la formule de Green, il est facile d'avoir que

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \partial_z\left[\hat{\alpha}_{22}(x_1,z)\,\partial_z u^*\right]\varphi dx_1dz+\hat{\lambda}\int_\Omega v^*\varphi dx_1dz&=\int_\Omega \hat{f}.\varphi dx_1dz,\\-\int_\Omega \partial_z\left[\hat{\beta}_{22}(x_1,z)\,\partial_z u^*\right]\psi dx_1dz+\hat{\lambda}\int_\Omega u^*\psi dx_1dz&=\int_\Omega \hat{g}.\psi dx_1dz,\end{aligned}$$

donc, on obtient

$$\left.\begin{aligned}-\partial_z\left[\hat{\alpha}_{22}(x_1,z)\,\partial_z u^*(x_1,z,t)\right]+\hat{\lambda}v^*(x_1,z,t)=\hat{f}(x_1,z,t)\\-\partial_z\left[\hat{\beta}_{22}(x_1,z)\,\partial_z v^*(x_1,z,t)\right]+\hat{\lambda}u^*(x_1,z,t)=\hat{g}(x_1,z,t)\end{aligned}\right\}\text{dans } H^{-1}(\Omega).\tag{3.43}$$

Comme $\hat{f},\hat{g}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, alors la formule (3.43) est vraie p.p dans $\Omega\times(0,T)$.
Revenons maintenant aux deux formules (3.41) et (3.42), en utilisant la formule de Green et le fait que $(\varphi,\psi)=(0,0)$ sur $\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_L$, on en déduit

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(-\partial_z\left[\hat{\alpha}_{22}(x_1,z)\,\partial_z u^*\right]+\hat{\lambda}v^*-\hat{f}\right)\varphi dx_1dz-\int_0^L\hat{\alpha}_{22}(x_1,0)\,\partial_z u^*\varphi dx_1\\&+\hat{l}_1\int_0^L u^*.\varphi dx_1-\hat{r}\int_0^L v^*.\varphi dx_1\\&=0,\ \ \forall\varphi\in V,\end{aligned}$$

et

$$\int\limits_{\Omega}\left(-\partial_z\left[\hat{\beta}_{22}\left(x_1,z\right)\partial_z u^*\right]+\hat{\lambda}u-\hat{g}\right)\psi dx_1dz-\int_0^L\hat{b}_{22}\left(x_1,0\right)\partial_z v^*\psi dx_1$$
$$+\hat{l}_2\int_0^L v^*.\psi dx_1+\hat{r}\int_0^L u^*.\psi dx_1$$
$$=0,\ \forall\psi\in V,$$

ceci implique que

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^L\left(-\hat{\alpha}_{22}\left(x_1,0\right)\partial_z u^*+\hat{l}_1u^*-\hat{r}v^*\right)\varphi dx_1=0\\[2ex] \int_0^L\left(-\hat{\beta}_{22}\left(x_1,0\right)\partial_z v^*+\hat{l}_2v^*-\hat{r}u^*\right)\psi dx_1=0,\end{array}\right\},\forall(\varphi,\psi)\in D(]0,L[)^2,$$

d'après la densité de $D(]0,L[)^2$ dans $L^2(]0,L[)^2$, on obtient (3.40). □

Théorème 3.4. *On suppose que*

$$\min\left(\min_{(x_1,z)\in\Omega}\left(\hat{\alpha}_{22}\left(x_1,z\right)\right),\min_{(x_1,z)\in\Omega}\left(\hat{\beta}_{22}\left(x_1,z\right)\right)\right)>2\hat{\lambda}.$$

Alors la solution faible (u^*,v^*) *du problème limite* $(3.39)-(3.40)$ *est unique.*

Démonstration. Pour prouver le résultat d'unicité, nous supposons qu'il existe deux solutions (u^*,v^*) et (u^{**},v^{**}) du problème variationnel (3.41)-(3.42), nous avons

$$\int_{\Omega}\hat{\alpha}_{22}\left(x_1,z\right)\partial_z u^*\partial_z\varphi dx_1dz+\hat{\lambda}\int_{\Omega}v^*\varphi dx_1dz+\int_0^L\left(\hat{l}_1u^*-\hat{r}v^*\right).\varphi dx_1 \tag{3.44}$$
$$=\int_{\Omega}\hat{f}.\varphi dx_1dz,\forall\varphi\in V,$$

$$\int_{\Omega}\hat{\alpha}_{22}\left(x_1,z\right)\partial_z u^{**}\partial_z\varphi dx_1dz+\hat{\lambda}\int_{\Omega}v^{**}\varphi dx_1dz+\int_0^L\left(\hat{l}_1u^{**}-\hat{r}v^{**}\right).\varphi dx_1 \tag{3.45}$$
$$=\int_{\Omega}\hat{f}.\varphi dx_1dz,\forall\varphi\in V,$$

et

$$\int_{\Omega}\hat{\beta}_{22}\left(x_1,z\right)\partial_z v^*\partial_z\psi dx_1dz+\hat{\lambda}\int_{\Omega}u^*\psi dx_1dz+\int_0^L\left(\hat{l}_2v^*+\hat{r}u^*\right).\psi dx_1 \tag{3.46}$$
$$=\int_{\Omega}\hat{g}.\psi dx_1dz,\forall\psi\in V,$$

$$\int_\Omega \hat{\beta}_{22}\left(x_1,z\right)\partial_z v^{**}\partial_z\psi dx_1dz + \hat{\lambda}\int_\Omega u^{**}\psi dx_1dz + \int_0^L\left(\hat{l}_2 v^{**} + \hat{r}u^{**}\right).\psi dx_1 \tag{3.47}$$
$$= \int_\Omega \hat{g}.\psi dx_1dz, \forall\psi\in V.$$

En soustrayant les équations (3.44) avec (3.45) et (3.46) avec (3.47), puis on prend $\varphi = u^* - u^{**}$ et $\psi = v^* - v^{**}$, on trouve

$$\int_\Omega \hat{\alpha}_{22}\left(x_1,z\right)\left|\partial_z u^* - \partial_z u^{**}\right|^2 dx_1dz + \hat{\lambda}\int_\Omega\left(v^*-v^{**}\right)\left(u^*-u^{**}\right)dx_1dz \tag{3.48}$$
$$+\hat{l}_1\int_0^L\left|u^*-u^{**}\right|^2 dx_1 - \hat{r}\int_0^L\left(v^*-v^{**}\right).\left(u^*-u^{**}\right)dx_1$$
$$=0,$$

et

$$\int_\Omega \hat{\beta}_{22}\left(x_1,z\right)\left|\partial_z v^* - \partial_z v^{**}\right|^2 dx_1dz + \hat{\lambda}\int_\Omega\left(u^*-u^{**}\right)\left(v^*-v^{**}\right)dx_1dz \tag{3.49}$$
$$+\hat{l}_1\int_0^L\left|v^*-v^{**}\right|^2 dx_1 + \hat{r}\int_0^L\left(u^*-u^{**}\right).\left(v^*-v^{**}\right)dx_1 = 0.$$

Maintenant, en additionnant les deux équations et en appliquant les inégalités de Young et Poincaré, nous concluons

$$\left(\min\left(\hat{\alpha}_{22}\right) - 2\hat{\lambda}\right)\left\|u^*-u^{**}\right\|^2_{L^2(0,T;V_z)} + \left(\min\left(\hat{\beta}_{22}\right) - 2\hat{\lambda}\right)\left\|v^*-v^{**}\right\|^2_{L^2(0,T;V_z)} \leq 0.$$

D'où [1] $u^* = u^{**}$ et $v^* = v^{**}$. □

Conclusion

Ce travail est une contribution à l'étude de l'existence, de l'unicité et du comportement asymptotique des solutions de certains problèmes aux limites paraboliques.

Dans ce mémoire, nous avons traité les deux points principaux :

✓ **Existence et Unicité** : Sous certaines conditions sur les données initiales et les coefficients, nous avons analysé la question de l'existence et de l'unicité d'une solution pour des problèmes aux limites paraboliques semi-linéaires. La technique principale utilisée pour la démonstration est la méthode de Faedo-Galerkin.

✓ **Analyse asymptotique** : En utilisant la méthode de Faedo-Galerkin, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution pour un problème parabolique couplé avec des conditions aux limites de Dirichlet-Fourier posé dans un domaine mince bidimensionnel Ω^{ε}. Ensuite, nous avons appliqué la technique du changement d'échelle pour étudier le comportement asymptotique de la solution lorsque l'une des dimensions du domaine tend vers zéro.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, NewYork, 1975.

[2] M. Anguiano, *Existence, uniqueness and homogenization of nonlinear parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media*. Mediterranean Journal of Mathematics, 17(1) (2020), 18.

[3] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, M. C. Pereira & R. P. Silva, *Semilinear parabolic problems in thin domains with a highly oscillatory boundary*. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, 74(15) (2011), 5111-5132.

[4] A. Bouziani, N. Merazga & S. Benamira, *Galerkin method applied to a parabolic evolution problem with nonlocal boundary conditions*. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, 69(5-6)(2008), 1515-1524.

[5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson. Parie.New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[6] B. Chen, *Existence of solutions for quasilinear parabolic equations with nonlocal boundary conditions*. Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only], (2011), Paper-No.

[7] M. Dilmi, *Asymptotic Analysis for Coupled Parabolic Problem With Dirichlet-Fourier Boundary Conditions in a Thin Domain*. Journal of Mathematics and Applications, 46(1)(2023), 163-185.

[8] S. Koga, L. Camacho-Solorio & M. Krstic, *State estimation for lithium ion batteries with phase transition materials*. In Proc. ASME Dyn. Syst. Control Conf., 2017, p. V003T43A002.

[9] D. Li, B. Wang & X, Wang, *Limiting behavior of non-autonomous stochastic reaction-diffusion equations on thin domains*. Journal of Differential Equations, 262(3) (2017), 1575-1602.

[10] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*. Dunod, Paris, 1969.

[11] Y. Liu, *Numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 110(1)(1999), 115-127.

[12] B. Petrus, J. Bentsman & B. G. Thomas, *Enthalpy-based feedback control algorithms for the Stefan problem*. In Proc. IEEE 51st Annu. Conf. Decis. Control, 2012, pp. 7037-7042.

[13] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action. From Moddeling to Theory*. Third Edition, Springer International Publishing Switzerland 2016.

[14] J. S. Wettlaufer, *Heat flux at the ice-ocean interface*. J. Geophysical Res. : Oceans, vol. 96, pp. 7215-7236, 1991.