RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOGRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ BLIDA 1
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master
Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Analyse Mathématiques et Applications**

Présenté par :

Larkeche Islem

Thème

Étude d'une classe d'équations différentielles abstraites d'ordre fractionnaire

Soutenue publiquement, le **04 / 07 / 2024**, devant le jury composé de :

M. TALBI Mohamed El Amine	**MCA**	**Université de Blida1**	**Président**
M. DAHMANI Zoubir	**Professeur**	**Université de Blida1**	**Examinateur**
Mme BOUTAOUS Fatiha	**MCA**	**Université de Blida1**	**Promotrice**

Année universitaire : **2023-2024**

Table des matières

Remerciements **iv**

Résumé **viii**

Abstract **ix**

Notations **x**

Introduction **1**

1 Préliminaires **6**

1.1 Opérateurs linéaires 6

1.1.1 Définitions 6

1.1.2 Opérateur linéaire borné 7

1.1.3 Opérateur non borné 7

1.1.4 Ensemble résolvant, spectre et résolvante 8

1.2 Théorème du point fixe de Banach 9

1.3 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires 10

1.4 Espace de Hölder 11

1.5 La mesurabilité au sens de Bochner 11

1.5.1 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles 14

1.5.2 Espaces de Sobolev 16

1.6 Le calcul fractionnaire 17

1.6.1 Fonction Gamma 18

1.6.2 Fonction Beta 19

1.6.3 L'intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 19

1.6.4 Dérivée fractionnaire de Caputo 25

2 Étude d'une équation différentielle abstraite neutre autonome d'ordre fractionnaire 29

2.1 Position du problème 29

2.2 Existence des solutions 33

3 Étude d'une équation différentielle abstraite neutre non autonome d'ordre fractionnaire avec arguments déviés 53

3.1 Position du problème 53

3.2 Existence des solutions 54

3.2.1 Exemple d'application 66

Conclusion générale 68

Bibliographie 69

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma Promotrice de mémoire, Madame ***Boutaous Fatiha****. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.*

Mes remerciements s'adressent également à Messieurs ***Talbi Mohamed El Amine*** *et* ***Dahmani Zoubir*** *d'avoir accepté d'évaluer ce travail et m'avoir fait l'honneur de participer au jury.*

Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi. Je remercie mes frères AZIZ, ISSAM et BILAL, pour leurs encouragements.

Enfin, je remercie mes amis M. SAHAR , N.TALHA, qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide. À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

DEDICACE

Je dédie ce mémoire de Master à ma chère mère.

⋆ Islem ⋆

الملخص

في هذا العملِ، نَهتمُّ بدراسةِ وحلِّ صنفٍ من المعادلاتِ التفاضليَّةِ المجردةِ من الرتبةِ الكسريةِ في فضاءِ باناش. تُوجدُ عدةُ طرقٍ لدراسةِ هذه المشكلاتِ، من بينها الطريقةُ التي نَعتمدُها في هذه المذكرةِ، والتي تَستندُ إلى نظريةِ المؤثراتِ الحَالَّةِ للمعادلاتِ التكامليةِ ونظريةِ النقطةِ الثابتةِ. نَعرضُ نتائجَ حول وجودِ ووحدانيةِ الحلولِ التكامليةِ لهذه المشكلاتِ.

الكلمات المفتاحية: الحِسابُ الكَسْري، نَظريةُ النُّقطةِ الثَّابتةِ، مُعادلةٌ تفاضليَّةٌ من الرُّتْبةِ الكَسْريةِ، مُؤثِّرٌ حَالٌّ، حَلٌّ تكاملي.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'une classe d'équations abstraites d'ordre fractionnaire considérées dans un espace de Banach.
Il existe plusieurs méthodes d'étude de ces problèmes, parmi lesquelles, on s'intéresse dans ce travail à celle basée sur la théorie des opérateurs résolvants pour les équations intégrales et le théorème du point fixe.
On montre des résultats d'existence et d'unicité des solutions intégrales de ces problèmes.
Mots clés *: Calcul fractionnaire, théorème du point fixe, équation différentielle d'ordre fractionnaire, opérateur résolvant, solution intégrale.*

Abstract

In this work, we focus on the study of a class of abstract fractional-order equations considered in a Banach space.
There are several methods for studying these problems. In this thesis, we focus on the one based on the resolvent operator theory for integral equations and the fixed point theorem.
We present results on the existence and uniqueness of integral solutions to these problems.
Keywords *: Fractional calculus, fixed point theorem, fractional-order differential equation, resolvent operator, mild solution.*

Notations

1. $\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers naturels.
2. $\mathbb{N}^*$: Ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
3. $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
4. $\mathbb{R}^+$: Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
5. $\mathbb{R}_+^*$: Ensemble des nombres réels positifs non nuls.
6. $\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.
7. $\mathrm{Re}(\cdot)$: Partie réelle d'un nombre complexe.
8. $\mathbb{R}_+^*$: Ensemble des nombres réels positifs non nuls.
9. X : Espace de Banach.
10. $\|.\|_X$: Norme de l'espace X.
11. $\mathcal{C}([a,b],X)$: Espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans X .
12. $\Gamma(\cdot)$: La fonction Gamma.
13. $\beta(\cdot)$: La fonction Bêta.
14. I_a^α : Intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville.
15. ${}^cD_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo.
16. $\mathcal{L}(X,Y)$: L'espace des opérateurs linéaires continus de l'espace X vers l'espace Y.
17. A : Opérateur linéaire.
18. $D(A)$: Le domaine de définition d'un opérateur linéaire A.
19. $\overline{D(A)}$: L'adhérence de l'ensemble $D(A)$.
20. A^{-1} : L'inverse d'un opérateur linéaire A.
21. $\rho(A)$: L'ensemble résolvant d'un opérateur linéaire A.
22. $R_\lambda(A)$: La résolvante d'un opérateur linéaire A.

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires représentent une extension des équations différentielles classiques, où les dérivées sont définies avec des ordres non entiers. Ces équations sont devenues un outil puissant dans la modélisation de phénomènes complexes qui présentent une dynamique de mémoire et une dépendance temporelle inhabituelle. Contrairement aux dérivées entières qui ne capturent que l'instantanéité des changements, les dérivées fractionnaires intègrent l'historique des variations, offrant ainsi une perspective plus réaliste et détaillée des processus naturels et artificiels.

Les équations différentielles fractionnaires jouent un rôle crucial dans divers domaines scientifiques et techniques. En physique, elles sont utilisées pour modéliser des phénomènes, tels que la diffusion anormale et les matériaux viscoélastiques qui présentent des comportements non linéaires complexes. En ingénierie, elles permettent de concevoir des systèmes de contrôle plus robustes et de prédire des comportements dynamiques à long terme. En économie, elles sont utilisées pour modéliser des marchés financiers qui montrent des fluctuations à plusieurs échelles de temps, offrant ainsi des outils pour des prévisions économiques plus précises et pour l'évaluation des risques. Ces équations sont également appliquées en biologie pour modéliser la propagation des maladies.

Une équation différentielle abstraite fractionnaire est une équation qui décrit l'évolution d'une fonction dans un espace fonctionnel abstrait (souvent un espace de Banach ou de Hilbert) en utilisant des dérivées fractionnaires. Elle se présente généralement sous la forme :

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

où :

- D_t^α représente la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in (0,1)$, souvent définie selon la définition de Caputo ou de Riemann-Liouville.
- $u(t)$ est une fonction prenant des valeurs dans un espace de Banach ou de Hilbert X.
- A est un opérateur linéaire (non nécessairement borné) défini sur un sous-ensemble dense dans X.
- $f : [0,T] \times X \to X$ est une fonction donnée qui peut dépendre explicitement du temps et de la fonction $u(t)$.

La condition initiale pour cette équation est généralement défnie par

$$u(0) = u_0 \in X. \tag{2}$$

Les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles peuvent être généralisées aux équations différentielles abstraites fractionnaires qui permettent la modélisation des processus dynamiques avec mémoire et effets héréditaires, ce qui prouve leur capacité à fournir des outils mathématiques puissants pour analyser la stabilité, l'existence et l'unicité des solutions dans des systèmes complexes. Par exemple, elles permettent de modéliser des processus stochastiques ou des phénomènes à mémoire longue dans des espaces de phase abstraits, facilitant ainsi une meilleure compréhension et une gestion plus efficace des systèmes complexes dans des domaines, tels que la mécanique quantique, la dynamique des populations et la modélisation des réseaux neuronaux.

Il existe des équations différentielles abstraites non autonomes d'ordre fractionnaire, où les coefficients de l'équation dépendent explicitement du temps (ou de la variable indépendante). Contrairement aux équations autonomes, où les coefficients sont constants ou dépendent uniquement de la variable dépendante, les équations non autonomes ont des termes qui varient avec le temps.

On peut trouver aussi des équations différentielles abstraites fractionnaires neutres lorsque la dérivée de la fonction dépend non seulement de la fonction elle-même et de ses dérivées, mais aussi de la dérivée d'une version retardée (ou avancée) de cette fonction. En d'autres termes, elle inclut des termes qui dépendent de la dérivée d'une fonction avec un décalage temporel.

Dans certaines situations réelles, le retard n'est pas défini par le temps, mais aussi par une variable inconnue. Les équations différentielles avec des arguments déviés sont un type de

équations différentielles à retard dans lequel la quantité inconnue et sa dérivée apparaissent dans différentes valeurs d'argument. Pour les modèles différentiels réels et fractionnaires, divers problèmes des équations différentielles stochastiques avec argument dévié sont étudiés compte tenu du fait que leurs applications peuvent être trouvées en biologie, chimie, mécanique et dans d'autres domaines.
L'objectif principal de ce mémoire est l'étude d'une classe d'équations différentielles abstraites d'ordre fractionnaire dans un espace de Banach Ceci à travers une synthèse des résultats importants obtenus dans les deux articles suivants :

Dans le cas autonome, nous allons présenter l'étude faite dans l'article des auteurs Hernandez E. Hernández, D. O'Regan, K. Balachandran, intitulé (voir [6]) :

"On recent developments in the theory of abstract differential equations with fractional derivatives".

Dans le cas non autonome, nous allons présenter l'étude fait dans l'article des auteurs M. Malik M. Malik, S. Abbas, A. Kumar, intitulé (voir [7]) :

"Existence and uniqueness of soultions of fractional order nonautonomous neutral differential equations with deviated argument".

La méthode utilisée dans ces deux travaux est basée sur la théorie des opérateurs résolvants des équations intégrales et le théorème du point fixe de Banach. Nous montrons l'existence et l'unicité des solutions intégrales (mild solutions) pour ces équations différentielles fractionnaires.

Contributions de E. Hernández et al.

Eduardo Hernández et ses collègues ont apporté une contribution significative en étudiant les équations différentielles fractionnaires abstraites [6]. Ils ont proposé une nouvelle méthode basée sur les opérateurs résolvants pour analyser une classe générale d'équations différentielles abstraites. Leur approche garantit l'existence et l'unicité des solutions intégrale sous des conditions spécifiques, permettant ainsi de traiter efficacement les systèmes complexes dans des espaces de Banach.

Cet article est motivée par quelques articles récents traitant des problèmes de l'existence d'une solution pour les équations différentielles abstraites avec des dérivées fractionnaires. De la théorie des semi-groupes, il est facile de voir que les concepts de solutions intégrales utilisés dans [1],[12] et dans d'autres articles ne sont pas appropriés . Pour prouver leur affirmation, ils considèrent le problème abstrait suivant :

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in [0, a] \tag{3}$$

$$x(0) = x_0, \tag{4}$$

où $0 < \alpha < 1$, A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$, $x_0 \in X$ et $f \in L^1([0, a]; X)$. La forme intégrale associée est

$$u(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{Au(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\, \mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\, \mathrm{d}s, \quad t \in [0, a]. \tag{5}$$

La solutions intégrale (mild solution) proposée dans les articles cités est

$$u(t) = T(t)x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) f(s)\, \mathrm{d}s, \tag{6}$$

pour tout $t \in [0, a]$.

Exemples et analyses

Exemple 1

— **Hypothèses :** $X = \mathbb{R}$, $f \equiv 0$, $x_0 = 1$, $A \equiv 1$ et $T(t)x_0 \equiv e^t$.

— **Solution intégrale (mild solution) proposée :** $u(t) = e^t$.

— **Équation intégrale (3) :**

$$e^t = 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} e^\tau\, \mathrm{d}\tau.$$

Cette égalité n'est pas vraie pour tout $t > 0$.

Exemple 2

— **Hypothèses :** $X = \mathbb{R}$, $A \equiv 1$, $x_0 = 0$, $f \equiv 1$ et $T(t)f \equiv e^t$.

— **Solution intégrale (mild solution) proposée :**

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} e^{t-\tau}\, \mathrm{d}\tau.$$

— **Équation intégrale (3) :**

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} e^{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-1} e^{\tau-s}\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\tau + \frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

Cette égalité est également incorrecte.

Conclusion

Ces contre-exemples montrent que la forme proposée de solution intégrale $u(t)$ ne satisfait pas toujours l'équation intégrale initiale (3) pour certaines configurations simples des paramètres A, x_0 et f. En conséquence, pour résoudre les équations différentielles fractionnaires correctement dans ce cadre, il est peut être nécessaire d'examiner des formes alternatives de solutions ou d'introduire des conditions supplémentaires qui garantissent que la solution intégrale est valide. Les chercheurs doivent alors ajuster la définition de la solution intégrale ou explorer des méthodes de résolution plus appropriées pour ces équations.

Motivés par les remarques ci-dessus, les auteurs ont proposés une autre approche pour traiter les équations abstraites avec des dérivées fractionnaires, basée sur la théorie des opérateurs résolvants pour les équations intégrales. Ils ont montré l'existence et l'unicité des solutions intégrales pour une classe d'équations différentielles abstraites d'ordre fractionnaire.

Contribution de M. Malik et al.

D'autre part, M. Malik et ses collaborateurs ont appliqué la même méthode proposés par E. Hernández et al. pour traiter des équations différentielles abstraites fractionnaires non autonomes avec des arguments déviés, [7]. Ils ont montré des résultats importnats sur l'existence et l'unicité des solutions intégrales de ces équations.

Plan du mémoire

Ce mémoire comporte trois chapitres et est organisé comme suit :

— **Le premier chapitre** contient des rappels des notions de base d'analyse fonctionnelle : espace de Banach, espace de Sobolev, les opérateurs linéaires non bornés, le calcul fractionnaire et leurs différentes propriétés.

— **Le deuxième chapitre** concerne l'étude d'une équation différentielle abstraite neutre autonome d'ordre fractionnaire.

— **Le troisième chapitre** est consacré à l'étude d'une équation différentielle abstraite neutre non autonome d'ordre fractionnaire avec arguments déviés.

On termine ce travail avec une **conclusion générale**.

Chapitre 1

Préliminaires

Introduction

Ce chapitre est consacré aux rappels des notions et résultas de base d'analyse fonctionnelle qui nous seront utiles par la suite. En particulier, nous rappelons les opérateurs linéaires, les semi-groupes les espaces de Hölder et le calcul fractionnaire avec leurs différentes propriétés.

1.1 Opérateurs linéaires

1.1.1 Définitions

Définition 1.1 *Soit E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K. On dit que l'application ou l'opérateur $A : E \to F$ est linéaire si*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K : \quad A(x+y) = Ax + Ay \quad et \quad A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

Définition 1.2 *Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire. On définit l'image de l'opérateur A par :*

$$Im(A) = \{Ax \,|\, x \in E\} : \text{est un sous espace vectoriel de } F.$$

et le noyau de l'opérateur A par :

$$Ker(A) = \{x \in E \,|\, Ax = 0\} : \text{est un sous espace vectoriel de } E\ .$$

Le domaine de A :

$$D(A) = \{x \in E \,|\, Ax \in Im(A)\} : \text{est un sous espace vectoriel de } E\ .$$

1.1.2 Opérateur linéaire borné

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $A : E \to F$ un opérateur linéaire. Le théorème suivant caractérise la continuité d'un opérateur linéaire.

Théorème 1.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est continu,*
2. *A est continu en 0,*
3. *il existe une constante c telle que $\|Ax\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in E$.*

Définition 1.3 *Une application linéaire $A : E \to F$ entre espaces vectoriels normés qui est continue est souvent dite bornée.*
Notation : *On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues entre E et F. Quand $E = F$, $\mathcal{L}(E,F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.*

Définition 1.4 *Pour $A : E \to F$ opérateur linéaire continu, on définit la norme d'opérateur de A par*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_F = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E\neq 0}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|Ax\|_F = \inf\{k > 0 \,|\, \forall x \in E, \|Ax\|_F \leq k\|x\|_E\}.$$

La norme d'opérateur, aussi notée $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des opérateurs linéaires continus de E dans F.

1.1.3 Opérateur non borné

Soit X un espace de Banach.

Définition 1.5 *Un opérateur dans X est une application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeurs dans X. Le sous-espace vectoriel $D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur.*

On note un opérateur par $(A, D(A))$ et on dit que A est un opérateur non borné de domaine $D(A)$.

Définition 1.6 ***(Opérateur à domaine dense)*** *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire non borné. L'opérateur A est dit à domaine dense si $\overline{D(A)} = X$.*

Domaine, graphe et fermeture d'un opérateur linéaire

Définition 1.7 *(graphe et fermeture)*

— *Le graphe d'un opérateur linéaire $(A, D(A))$ est le sous-espace de $X \times X$ défini par*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X.$$

— *On dit que $(A, D(A))$ est fermé si son graphe $G(A)$ est un fermé de $X \times X$.*

La caractérisation des opérateurs fermés par les suites donne la proposition suivante :

Proposition 1.1 *Un opérateur $(A, D(A))$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que $x_n \to x \in X$ et $Ax_n \to y \in X$, on a alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$.*

Lemme 1.1 *Soient X un espace de Banach et $A : D(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est fermée.

(ii) $D(A)$ muni de la norme graphe, notée $|\cdot|_G$ définie par $\|x\|_{[D(A)]} = |x|_G = |(x, Ax)|_G = \|x\| + \|Ax\|$, est un espace de Banach .

1.1.4 Ensemble résolvant, spectre et résolvante

Définition 1.8 *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire.*

1. *On appelle ensemble résolvant de A, qu'on note $\rho(A)$, l'ensemble :*

   $$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \lambda I - A : D(A) \to X \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} : X \to D(A) \text{ est bornée}\}.$$

   Si A est fermé alors :

   $$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \lambda I - A : D(A) \to X \text{ est bijectif}\}.$$

2. *On appelle spectre de A, l'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.*
3. *Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur linéaire borné $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelée la résolvante de A au point λ.*

Lemme 1.2 *Si $A : D(A) \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire tel que $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est fermé.*

Remarque 1.2 *Si $A : D(A) \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire tel que $\rho(A) \neq \emptyset$, alors $D(A)$ est un espace de Banach.*

1.2 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach assure l'existence et l'unicité du point fixe pour les applications contractantes. On commence par la définition d'un point fixe.

Définition 1.9 *Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même, on appelle point fixe de f tout point $x \in E$ tel que $f(x) = x$.*

Définition 1.10 *Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$. On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si on a la relation suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geqslant n_0) \wedge (q \geqslant n_0), \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ d'éléments de E est une suite convergente dans E.

Définition 1.11 *On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé complet.*

Définition 1.12 *Soit X un espace de Banach de norme $\|\cdot\|$, et $f : X \to X$. On dit que f est Lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que .$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$, $\forall x, y \in X$.*

Définition 1.13 *Soit $f : E \to F$ un opérateur. On dit que f est contractante s'il existe $0 < k < 1$ tel que $\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$, $\forall x, y \in E$.*

Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom de théorème de l'application contractante) est un théorème qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante.

Théorème 1.3 ***(Théorème du point fixe de Banach)*** *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $f : A \subset E \to A$ (tel que A est un ensemble fermé de E) une application contractante. Alors f admet un point fixe unique : $a_0 \in A$ unique : $f(a_0) = a_0$.*

1.3 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

Soit X un espace de Banach de norme $\|\cdot\|_X$. Pour plus de détails voir [9].

Définition 1.14 *Une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'éléments $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ forme un semi-groupe sur l'espace X si :*

(i) $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\forall s, t \geq 0$

(ii) $T(0) = I$ (identité dans $\mathcal{L}(X)$).

De plus, si le semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ vérifie la propriété :

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \forall x \in X,$$

alors il est dit semi-groupe de classe C_0 ou C_0-semi-groupe.

Proposition 1.2 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C_0. Alors :*

— *$\forall x \in X$, la fonction $t \mapsto T(t)x$ est continue de $[0, \infty)$ dans X.*

— *Il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.*

Définition 1.15 *Un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit de contraction si*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \forall t \geq 0$$

Définition 1.16 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. L'opérateur non-borné $A : D(A) \subset X \to X$ défini par*

$$D(A) := \{x \in X \mid \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X\},$$

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

est appellé le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Proposition 1.3 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C_0 et $D(A)$ l'ensemble :*

$$D(A) := \{x \in X \mid \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X\}.$$

Alors $D(A)$ est un sous-espace dense dans X et pour tout $x \in D(A)$, l'élément $T(t)x$ appartient aussi à $D(A)$ pour tout $t \geq 0$.

Proposition 1.4 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C_0 et A son générateur infinitésimal. On a les propriétés suivantes :*

(i) Soit $x \in D(A)$. Alors l'application $t \mapsto T(t)x$ appartient à $C^1([0,\infty), X)$ et on a $\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax$, $\forall x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$.

(ii) A est un opérateur non-borné, fermé.

Remarque 1.4 *Soit A générateur infinitésimal du semi-groupe, alors $D(A)$ est un espace de Banach.*

1.4 Espace de Hölder

Définition 1.17 *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $\alpha \in]0,1[$ un nombre réel. On désigne par $C^\alpha(I;E)$ l'espace de Hölder défini par :*

$$C^\alpha(I;E) = \left\{ f \in C(I;E) : [f]_{C^\alpha(I;E)} = \sup_{x,y\in I; x>y} \frac{\|f(x)-f(y)\|_E}{(x-y)^\alpha} < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha(I;E)} = [f]_{C^\alpha(I;E)} + \|f\|_{C(I;E)}. \tag{1.1}$$

Cet espace est de Banach.

Exemple 1.5 *Soit $f(x) = x^a$, $\quad x \geqslant 0$, $0 < a \leqslant 1$.*
La fonction puissance f est höldérienne $f \in C^a(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$. Donc

$$\forall x > y > 0, \exists C > 0, : x^a - y^a \leqslant C(x-y)^a.$$

1.5 La mesurabilité au sens de Bochner

Soit E un espace de Banach, muni de la norme $\|\cdot\|_E$. Voir [3], pour plus de détails.

Définition 1.18 *Une fonction g définie sur l'intervalle $[0,T]$ à valeurs dans E est dite étagée s'il existe une famille finie non vide $(B_i)_{i\in I}$ d'ensembles mesurables dans $[0,T]$ et $(\chi_{B_i}\xi_i)_{i\in I}$, $\xi_i \in E$ tels que :*

1. *$[0,T] = \bigcup_{i\in I} B_i$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$,*
2. *$g(x) = \sum_{i\in I} \chi_{B_i}\xi_i$ où χ_{B_i} est la fonction caractéristique de B_i.*

Définition 1.19 ***(Mesurabilité au sens de Bochner)*** *On dira qu'une fonction g définie sur l'intervalle $[0, T]$ à valeurs dans E est fortement mesurable au sens de Bochner s'il existe une suite $(g_n)_{n>0}$ de fonctions étagées telles que $g_n(x)$ tend vers $g(x)$ dans E pour presque tout x de $[0; T]$ (c'est-à-dire que $\|g_n(x) - g(x)\|_E$ tend vers zéro quand n converge vers l'infini). On dit alors que g est B-mesurable.*

Définition 1.20 ***(Intégrabilité au sens de Bochner)*** *On dira qu'une fonction g définie sur l'intervalle $[0, T]$ et à valeurs dans E est B-intégrable s'il existe une suite de fonctions étagées $(g_n)_{n>0}$ telle que :*

1. *Pour presque tout x, $g_n(x)$ converge vers $g(x)$ dans E quand n tend vers l'infini.*
2. *$\int_0^T \|g_n(x) - g(x)\|_E \, dx$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.*

Théorème 1.6 *Soit g définie sur l'intervalle $[0, T]$ à valeurs dans E et B-mesurable. Alors g est B-intégrable si et seulement si l'application qui à x de $[0, T]$ associe $\|g(x)\|_E$ est intégrable au sens de Lebesgue.*

Définition 1.21 *Soit g une fonction B-mesurable définie sur $[0, T]$. Alors, pour tout ensemble Lebesgue mesurable X de $[0, T]$, on définit :*

$$\int_X g(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_X g_n(x)\, dx$$

où $(g_n)_{n>0}$ est une suite de fonctions étagées satisfaisant :

1. *$g_n(x)$ tend vers $g(x)$ pour presque tout x.*
2. *$\int_0^T \|g_n(x) - g(x)\|_E \, dx$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.*

Proposition 1.5 *Soit g une fonction B-mesurable définie sur l'intervalle $[0, T]$ à valeurs dans E. Alors, pour tout ensemble X de $[0, T]$, on a :*

1. *$\left\| \int_X g(x) dx \right\|_E \leqslant \int_X \|g(x)\|_E dx$.*
2. *L'application qui à g associe $\int_X g(x) dx$ est linéaire.*

Définition 1.22 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit les espaces :*

$$\begin{aligned} &L^p([0, T]; E) \\ &\quad = \{f : [0, T] \to E \mid f \text{ B-mesurable : la fonction } x \mapsto \|g(x)\|_E \text{ est Lebesgue intégrable}\}, \end{aligned}$$

si p est fini. Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p([0,T];E)} = \left(\int_0^T \|g(x)\|_E^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, alors

$$L^\infty([0,T];E) = \{g : [0,T] \to E \mid x \mapsto \|g(x)\|_E \text{ } B\text{-mesurable : } \sup_{x\in[0,T]} ess\|g(x)\|_E \text{ est fini } \}.$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\|g\|_{L^\infty([0,T];E)} = \sup_{x\in[0,T]} ess\|g(x)\|_E.$$

Théorème 1.7 *L'espace $L^p([0,T];E)$, $p \in [1;\infty]$, muni de la norme précédente est un espace de Banach.*

Définition 1.23 ***(Espace L^1_{loc})*** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace de Banach. L'espace $L^1_{loc}(I;E)$ est l'ensemble des applications B–mesurables $f : I \to E$ telles que, pour tout compact K de $I, f \in L^1(K;E)$ (i.e. $f\mathbf{1}_K \in L^1(I;E)$).*

Remarque 1.8 *Pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout compact K de I on a $L^p(K;E) \subset L^1(K;E)$ (K est de mesure finie). On en déduit que, pour tout $p \in [1,+\infty], L^p(I;E) \subset L^1_{\text{loc}}(I;E)$.*
De plus, si $f : I \to E$ est continue, pour tout K compact de I, comme f est bornée sur $K, f \in L^1(K;E)$. Ainsi $\mathcal{C}^0(I;E) \subset L^1_{loc}(I;E)$.

Théorèmes sur les intégrales doubles

Dans cette partie, E est toujours un espace de Banach et $X \subset \mathbb{R}^n$,$Y \subset \mathbb{R}^m$ $\forall m; n \in \mathbb{N}$, voir [8], p. 93 p.100-101,
Pour $f : X \times Y \to E$, on note $f_x : Y \to E$ la fonction $f_x(y) = f(x,y)$ et $f^y : X \to E$ la fonction $f^y(x) = f(x,y)$

Théorème 1.9 *Si k et g sont deux fonctions Bochner-mesurables dans X et Y respectivement (l'une de ces fonctions à valeur réelle), alors le produit $k(x)g(y)$ est Bochner-mesurable dans $X \times Y$.*

Théorème 1.10 ***(Tonelli)*** *Si f est une fonction Bochner-mesurable sur $X \times Y$ et l'intégrale double $\int_X \int_Y \|f\|_E dydx$ existe, alors*

$$\int_X \int_Y f dydx = \int_X \left(\int_Y f_x dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f^y dx \right) dy$$

(i.e : f Bochner-intégrable ,$f \in L^1(X \times Y, ; E)$).

Théorème 1.11 ***(Théorème de Fubini)*** *Si $f \in L^1(X \times Y, ; E)$, alors :*
i) Pour presque tout $x \in X, f_x \in L^1(Y; E)$ et pour presque tout $y, f^y \in L^1(X; E)$,
ii) $x \to \int_Y f_x dy$ est dans $L^1(X; E)$ et $y \to \int_X f^y dx$ est dans $L^1(Y; E)$,
iii) On a

$$\int_X \int_Y f dydx = \int_X \left(\int_Y f_x dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f^y dx \right) dy$$

1.5.1 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles

Dans tout ce qui suit, E est un espace de Banach, voir [4], pour plus de détails.

Définition 1.24 ***(Distributions vectorielles)*** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (dans la suite, I sera soit $\mathbb{R}$, soit de la forme $]0, T[$) ; on note $\mathcal{D}(I)$ ou $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ l'espace des fonctions définies sur I, à valeurs réelles, de classe C^∞ et dont le support est compact dans I. Lorsque K est un compact de I, $k \in \mathbb{N}$, et $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on note*

$$\nu_{k,K}(\varphi) = \sup_{0 \le l \le k, \quad t \in K} |\varphi^{(l)}(t)|.$$

Il est utile de remarquer que, pour tout compact K de I et tout $k \in \mathbb{N}$, $\nu_{k,K}$ est une semi-norme sur $\mathcal{D}(I)$.

Définition 1.25 *Une distribution vectorielle sur I à valeurs dans E est une application linéaire $T : \mathcal{D}(I) \to E$ vérifiant : pour tout K compact de I, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C_K \ge 0$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ à support dans K, on a $\|T(\varphi)\|_E \le C_K \nu_{k,K}(\varphi)$.*
On note $\mathcal{D}'(I; E)$ l'espace des distributions sur I à valeurs dans E.

Remarque 1.12 *: Comme pour l'intégration à valeurs vectorielles, lorsque l'espace de Banach considérée est $\mathbb{R}$, on l'omet dans les notations ; par exemple, $\mathcal{D}'(I)$ désigne $\mathcal{D}'(I; \mathbb{R})$.*

Définition 1.26 *Une suite* $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}'(I;E)$ *converge au sens des distributions (on dit aussi* ***converge dans*** $\mathcal{D}'_E$*) vers* $T \in \mathcal{D}'(I;E)$ *si, pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(I)$*,* $\lim_{n\to\infty}\langle T_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(I;E),\mathcal{D}(I)} \to \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(I;E),\mathcal{D}(I)}$ *dans* E*.*

Définition 1.27 *La dérivée d'une distribution* $T \in \mathcal{D}'(I;E)$ *est la distribution* $T' \in \mathcal{D}'(I;E)$ *définie par*

$$\langle T', \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(I;E),\mathcal{D}(I)} = -\langle T, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}'(I;E),\mathcal{D}(I)}.$$

Proposition 1.6 *Si* $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}'(I;E)$ *converge au sens des distributions vers* $T \in \mathcal{D}'(I;E)$*, alors* $(T'_n)_{n\geq 1}$ *converge au sens des distributions vers* T'*.*

Démonstration. C'est immédiat puisque, pour $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a

$$\langle T'_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(I;E),\mathcal{D}(I)} = -\langle T_n, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}'(I;E),\mathcal{D}(I)} \to -\langle T, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}'(I;E),\mathcal{D}(I)} = \langle T', \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(I;E),\mathcal{D}(I)}.$$

□

Lemme 1.3 *Si* $f \in L^1_{loc}(I;E)$ *vérifie*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \quad \int_I f(t)\varphi(t)dt = 0,$$

alors $f = 0$ *presque partout sur* I*.*

Injection de $L^1_{\text{loc}}(I;E)$ **dans** $\mathcal{D}'(I;E)$
Soit $\{T^E : L^1_{\text{loc}}(I;E) \to \mathcal{D}'(I;E)\}$ définie par

$$\begin{aligned} T^E : L^1_{\text{loc}}(I;E) &\to \mathcal{D}'(I;E) \\ f &\mapsto T^E_f; \text{définie par } : \langle T^E_f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(I;E),\mathcal{D}(I)} = \int_I f(t)\varphi(t)dt. \end{aligned}$$

Cette application est bien définie car pour tout K compact de I et tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ à support dans K, on a

$$\begin{aligned} |\langle T^E_f, \varphi\rangle| &= \left|\int_I f(t)\varphi(t)dt\right| \\ &\leq \int_K |f(t)\varphi(t)|dt \\ &\leq \|f\|_{L^1(K;E)}\nu_{0,K}(\varphi) \end{aligned}$$

et $T_f^E \in \mathcal{D}'(I;E)$. De plus, T^E est linéaire et injective. En effet, si $T_f^E = 0$, alors $\langle T_f^E, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, ce qui implique $f = 0$ presque partout, donc $f = 0$ dans $L^1_{\text{loc}}(I;E)$. Donc T^E est injective.

On identifie donc f et sa distribution associée T_f^E.

Dérivée au sens des distributions de fonctions L^1_{loc}

La dérivée au sens des distributions d'un élément f de $L^1_{\text{loc}}(I;E)$ est la dérivée de T_f^E ; ce n'est donc, à priori, que la distribution $f' \in \mathcal{D}'(I;E)$ définie par

$$\langle f', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_E, \mathcal{D}} = -\langle f, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'_E, \mathcal{D}} = -\int_I f(t)\varphi'(t)dt$$

(on note aussi la dérivée de $f \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$ par $\frac{df}{dt}$ ou f_t). Il peut cependant arriver que cette distribution soit dans l'image par T^E de $L^1_{\text{loc}}(I;E)$, c'est-à-dire qu'il existe $g \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$ tel que $f' = T_g^E$, ce qui se traduit par : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$,

$$-\int_I f(t)\varphi'(t)dt = \int_I g(t)\varphi(t)dt \quad \text{dans } E.$$

Comme on a identifié g et T_g^E, on identifie alors g et f'.

1.5.2 Espaces de Sobolev

Lorsque l'on demande des conditions d'intégrabilité sur f et f' plus fortes que L^1_{loc}, on obtient les espaces de Sobolev.

Définition 1.28 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty]$. On définit l'espace*

$$W^{1,p}(I;E) = \{u \in L^p(I;E) \mid u' \in L^p(I;E)\}$$

la dérivée u' est comprise au sens faible (distributionnel), qu'on munit de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(I;E)} = \|u\|_{L^p(I;E)} + \|u'\|_{L^p(I;E)}.$$

Propriétés des espaces de Sobolev

Théorème 1.13 *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $W^{1,p}(I;E)$ est un espace de Banach.*

Lemme 1.4 *Si $u \in W^{1,p}(I;E)$, alors u est continue sur I et on a, pour tout $(t_0, t) \in I^2$,*

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s)\, ds.$$

Comme $u' \in L^p(I;E) \subset L^1_{loc}(I;E)$, l'intégrale ci-dessus a bien un sens.

Lemme 1.5 *Pour tout* $p \in [1, +\infty], W^{1,p}(I; E)$ *s'injecte continuement dans* $\mathcal{C}^{0,1-1/p}(I; E)$. *Il existe* $C > 0$ *tel que, pour tout* $u \in W^{1,p}(I; E)$*, on a*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,1-1/p}(I;E)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I;E)},$$

i.e. l'identité : $W^{1,p}(I; E) \to \mathcal{C}^{0,1-1/p}(I; E)$ *est continue. On note*

$$W^{1,p}(I; E) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-1/p}(I; E).$$

Remarque 1.14

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s)\, ds$$

pour tout $(t_0, t) \in \bar{I}^2$.

Démonstration. Toute fonction de $W^{1,p}(I; E)$ étant continue sur $\bar{I}$, on peut passer à la limite dans le lemme précédent lorsque t_0 tend vers une extrémité (finie) de l'intervalle I. Par exemple, si $I =]\alpha, \beta[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in W^{1,p}(\alpha, \beta; E)$, on a pour tout $t \in [\alpha, \beta[$,

$$u(t) = u(\alpha) + \int_{\alpha}^{t} u'(s) ds$$

(on utilise aussi la convergence dominée sur $u' \in L^p(I; E) \subset L^1(\alpha, t; E)$ pour tout $t \in I$).
Si β est aussi fini, on peut encore écrire ceci pour $t = \beta$. $\square$

Définition 1.29 *L'espace* $W^{1,p}_{loc}(I; E)$ *est un espace de Sobolev local défini pour les fonctions allant d'un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *vers un espace de Banach* E.

Proposition 1.7 *Une fonction* $u : I \to E$ *appartient à l'espace de Sobolev local* $W^{1,p}_{loc}(I; E)$ *si et seulement si, pour tout intervalle compact* $J \subset I$*, la restriction de* u *à* J *appartient à l'espace de Sobolev* $W^{1,p}(J; E)$.

1.6 Le calcul fractionnaire

Dans cette section, on introduit des fonctions qui seront utilisées dans les autres chapitres telles que les fonctions Gamma et Beta. Ces deux fonctions sont des fonctions spéciales dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.6.1 Fonction Gamma

En mathématiques, la fonction Gamma est une fonction complexe. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes (excepté en certains points).

Définition 1.30 *Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$, on définit la fonction Gamma, notée par*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

Lemme 1.6 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$, on a $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, et si $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ (généralise la factorielle).*

Démonstration. : La preuve de la première formule est immédiate à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt \\ &= \left[-te^{-t}\right]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\ &= \alpha\Gamma(\alpha)\end{aligned}$$

et la seconde se traite par récurrence. □

Domaine de Définition de la Fonction Gamma

La fonction Γ est bien définie pour $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ et $\mathrm{Im}(\alpha)$ quelconque.

Prolongement de la fonction Gamma à $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}^-$:

On commence par prolonger la fonction Gamma définie sur $\{\alpha \in \mathbb{C}^* \text{ et } \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0\}$ à la bande $M_{-1} = \{\alpha \in \mathbb{C}^*/\{-1\} \text{ et } 0 > \mathrm{Re}(\alpha) \geq -1\}$. en utilisant la relation

$$\alpha \in M_{-1}; \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}.$$

Ce prolongement peut être itéré indéfiniment, ce qui nous donnera un prolongement de la fonction Gamma à $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}^-$ par la relation :

$$\alpha \in M_{-k}; \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{(\alpha)(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}.$$

Avec $M_{-k} = \{\alpha \in \mathbb{C}^*/\{-k\} \text{ et } -k+1 > \mathrm{Re}(\alpha) \geq -k\}$.

Remarque 1.15 *Si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$, alors $|\Gamma(\alpha)| = \infty$.*

Résultat On conclut que la fonction Γ est bien définie pour $\alpha \in \{\mathbb{C}/\mathbb{Z}^-\}$.

1.6.2 Fonction Beta

Définition 1.31 *La fonction Beta est définie par*

$$\beta(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt, \quad (\mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Re}(w) > 0).$$

Cette fonction est reliée aux fonctions gamma par la relation suivante

$$\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \forall z, w : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Re}(w) > 0.$$

Remarque La fonction Bêta est symétrique, c'est-à-dire $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

1.6.3 L'intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit E espace de Banach, et $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Voir[2] pour plus de détails.
On commence par des intégrales d'ordres arbitraires en utilisant une formule récurrente de primitive d'une fonction continue :

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(t),$$

$$I_a^1 f(t) = \int_a^t f(s)ds,$$

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x I_a^1 f(t)dt = \int_a^x \int_a^t f(s)dsdt.$$

pour passer d'une double intégrale à une seule intégrale on utilise :

$$\int u'v = uv - \int uv',$$

tels que

$$u' = 1 \implies u = t,$$

$$v = \int_a^t f(s)ds \implies v' = f(t),$$

alors

$$I_a^2 f(x) = \left[t \int_a^t f(s)ds\right]_a^x - \int_a^x tf(t)dt = x\int_a^x f(s)ds - a\int_a^a f(s)ds - \int_a^x tf(t)dt.$$

Dans I on change "s" par "t", d'où

$$I_a^2 f(x) = x\int_a^x f(t)dt - \int_a^x t f(t)dt = \int_a^x (x-t)f(t)dt.$$

2ème Méthode : On applique la méthode de Fubini-Tonelli qui permet d'inverser l'ordre d'intégration, soit

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \int_a^t f(s)ds\, dt,$$

alors

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \int_s^x f(s)dt\, ds = \int_a^x f(s)\left(\int_s^x dt\right) ds = \int_a^x f(s)(x-s)ds.$$

En posant $s = t$, on obtient

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt.$$

En intégrant une nouvelle fois, il vient

$$I_a^3 f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f(t)dt,$$

et ainsi de suite jusqu'à (par récurrence) :

$$I_a^n f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$$

Définition 1.32 *Soit $f \in L^1([a,b],E)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha > 0$. L'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f est définie par les intégrales :*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} ds, \quad t > a,$$
$$I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(s)(s-t)^{\alpha-1} ds, \quad t < b.$$

Ces deux intégrales sont appelées l'intégrale fractionnaire à gauche et à droite de Riemann-Liouville d'ordre α (respectivement). Par convention, on a :

$$I_a^0 = I_b^0 = I$$

$(I_a^0 = \lim_{\alpha \to 0^+} I_a^\alpha)$ *où I est l'opérateur identité.*

On remarque que $I_\alpha^a f$ est une généralisation de l'intégrale $I_a^n f$.

Théorème 1.16 *Soit $f \in L^1([a,b],E)$ et soit $\alpha > 0$. Alors $I_a^\alpha f(t)$ existe presque partout sur $[a,b]$, et $I_a^\alpha f \in L^1([a,b],E)$.*

Démonstration. Soit $\Omega = [a,b]^2$ et $k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$k(t,s) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} & \text{si } a \leq s \leq t \leq b, \\ 0 & \text{si } a \leq t \leq s \leq b. \end{cases}$$

Alors $k(\cdot,\cdot)$ est mesurable sur Ω, et nous avons

$$\begin{aligned} \int_a^b k(t,s)dt &= \int_a^s k(t,s)dt + \int_s^b k(t,s)dt \\ &= \int_s^b (t-s)^{\alpha-1}dt \\ &= \frac{(b-s)^\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.9 , on a $f(s)\mathbf{1}_{[a,b]}(s) = f(s)$ sur Ω est fortement (Bochner) mesurable sur Ω. Il est clair que $k(t,s)$ est finie presque partout sur Ω, et est une fonction mesurable à valeurs réelles. Par conséquent

$$k(t,s)f(s)\mathbf{1}_{[a,b]}(s) = k(t,s)f(s) \text{ sur } \Omega,$$

est une fonction fortement Bochner-mesurable. De plus, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_a^b |k(t,s)| \|f(s)\| dt \right) ds &= \int_a^b \|f(s)\| \left(\int_a^b |k(t,s)| dt \right) ds \\ &= \int_a^b \|f(s)\| \frac{(b-s)^\alpha}{\alpha} ds \\ &\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} \int_a^b \|f(s)\| ds \\ &= \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} \|f\|_{L^1([a,b],E)} < \infty. \end{aligned}$$

Par le Théorème de Tonelli, nous déduisons que $k(t,s)f(s)$ est une fonction Bochner intégrable sur $[a,b]^2$. Ainsi d'après le Théorème Fubini : $t \longmapsto \int_a^b k(t,s)f(s)ds$ est Bochner intégrable sur $[a,b]$, Donc

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

est Bochner intégrable sur $[a,b]$, et existe presque partout sur $[a,b]$. $\square$

Lemme 1.7 *Soit $f \in L^1([a,b],E)$ et soit $\alpha \geq 1$. Alors $I_a^\alpha f \in C([a,b],E)$.*

Démonstration. (i) Le cas $\alpha = 1$. Nous avons

$$\left(I_a^1 f\right)(t) = \int_a^t f(s)ds.$$

Soit $t, s \in [a,b]$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(I_a^1 f\right)(t) - \left(I_a^1 f\right)(s)\right\| = \left\|\int_a^t f(\tau)dt - \int_a^s f(\tau)d\tau\right\| \\
&= \left\|\int_a^s f(\tau)d\tau + \int_s^t f(\tau)d\tau - \int_a^s f(\tau)d\tau\right\| \\
&= \left\|\int_s^t f(\tau)d\tau\right\| \\
&\leq \int_s^t \|f(\tau)\|d\tau = \int_a^t \|f(\tau)\|d\tau - \int_a^s \|f(\tau)\|dt \\
&\text{car } t \longmapsto \int_a^t \|f(s)\|ds \text{ est continue sur } [a,b].
\end{aligned}$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (t-s) \leqslant \delta \Rightarrow \left|\int_a^t \|f(r)\|dr - \int_a^s \|f(r)\|dr\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (t-s) \leqslant \delta \Rightarrow \left\|\left(I_a^1 f\right)(t) - \left(I_a^1 f\right)(s)\right\| \leqslant \varepsilon$$

(ii) Si $\alpha > 1$. Soit $t, s \in [a,b]$,tels que $t \geq s$, en observant que

$$\begin{aligned}
&\|I_a^\alpha f(t) - I_a^\alpha f(s)\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\|\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau - \int_a^s (s-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau\right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\|\int_a^s (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau + \int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau - \int_a^s (s-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau\right\|,
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|I_a^\alpha f(t) - I_a^\alpha f(s)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^s \left|(t-\tau)^{\alpha-1} - (s-\tau)^{\alpha-1}\right| \|f(\tau)\|d\tau + \int_s^t |t-\tau|^{\alpha-1} \|f(\tau)\|d\tau\right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^s \left|(t-\tau)^{\alpha-1} - (s-\tau)^{\alpha-1}\right| \|f(\tau)\|d\tau + (t-s)^{\alpha-1} \|f\|_{L^1([a,b],E)}\right].
\end{aligned}$$

Donc
$$\left|(t-\tau)^{\alpha-1}-(s-\tau)^{\alpha-1}\right| \|f(\tau)\| \leq 2(b-a)^{\alpha-1}\|f(\tau)\| \in L^1([a,b],E).$$

De plus $|(t-\tau)^{\alpha-1}-(s-\tau)^{\alpha-1}| \, \|f(\tau)\| \longrightarrow 0$ comme $t \longrightarrow s$ pour tout $\tau \in [a,b]$. Alors par le Théorème de convergence dominé de Lebesgue on conclut que, quand $t \longrightarrow s$
$$\int_a^s \left|(t-\tau)^{\alpha-1}-(s-\tau)^{\alpha-1}\right| \|f(\tau)\| d\tau \longrightarrow 0.$$

Par conséquence, pour $t \longrightarrow s$
$$\|I_a^\alpha f(t) - I_a^\alpha f(s)\| \longrightarrow 0.$$

Il résulte que $I_a^\alpha f \in C([a,b],E)$. □

Lemme 1.8 *Soit $f \in C([a,b]E)$ et $\alpha > 0$. Alors $I_a^\alpha f \in C([a,b],E)$.*

Démonstration.
Soit $t, s \in [a,b]$, tels que $t \geq s$
Si $\alpha \geq 1$ (d'après le Lemme 1.7), Alors $I_a^\alpha f \in C([a,b],E)$.
Si $\alpha < 1$, alors
$$\|I_a^\alpha f(t) - I_a^\alpha f(s)\| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau - \int_a^s (s-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right\|$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_a^s (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau - \int_a^s (s-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right\|$$

et nous obtenons
$$\begin{aligned}
&\|I_a^\alpha f(t) - I_a^\alpha f(s)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^s \left|(t-\tau)^{\alpha-1}-(s-\tau)^{\alpha-1}\right| \|f(\tau)\| d\tau + \int_s^t |t-\tau|^{\alpha-1} \|f(\tau)\| d\tau \right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^s \left|(s-\tau)^{\alpha-1}-(t-\tau)^{\alpha-1}\right| \|f(\tau)\|_{C([a,b],E)} d\tau + \frac{(t-s)^\alpha}{\alpha} \|f\|_{C([a,b],E)} \right] \\
&\leq \|f\|_{C([a,b],E)} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left([(s-a)^\alpha + (t-s)^\alpha - (t-a)^\alpha] + (t-s)^\alpha \right) \\
&\leq \|f\|_{C([a,b],E)} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(2(t-s)^\alpha \right).
\end{aligned}$$

Il en résulte que $I_a^\alpha f \in C([a,b],E)$, (de plus, si $0 < \alpha < 1$ alors $I_a^\alpha f \in C^\alpha([a,b],E)$). □

Théorème 1.17 *Soient* $\alpha, \beta \geq 0$ *et* $f \in L^1([a,b],E)$. *Alors*

$$I_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta}f\right) = I_a^{\alpha+\beta}f = I_a^{\beta}\left(I_a^{\alpha}f\right)$$

est vérifiée presque partout sur $[a,b]$. *Si de plus* $f \in C([a,b],E)$ *ou* $\alpha+\beta \geq 1$, *alors cette identité est vraie sur l'intervalle* $[a,b]$.
Autrement dit, la famille $\{I_a^{\alpha} : L^1([a,b],X) \to L^1([a,b],X),\ \alpha > 0\}$ *possède la propriété des semi-groupes.*

Démonstration. Puisque $I_a^0 = I$, (opérateur identité), si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ ou les deux sont nulles l'énoncé du théorème est trivialement vrai. Supposons que $\alpha, \beta > 0$. Nous observons que

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(I_a^{\beta} f(s)\right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-x)^{\beta-1} f(x)dx\right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1} f(x)dxds. \end{aligned}$$

Les intégrales existent presque partout sur l'intervalle $[a,b]$. Si $I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t), I_a^{\alpha+\beta} f(t)$ existent, on peut appliquer le Théorème de Fubini et on aura (par le changement $s = x + \tau(t-x)$)

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_x^t (t-s)^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1} f(x)dsdx,$$

alors

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_0^1 (t-x-\tau(t-x))^{\alpha-1} \left(\tau^{\beta-1}(t-x)^{\beta-1}\right)(t-x) f(x)d\tau dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_0^1 (t-x)^{\alpha+\beta-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1} f(x)d\tau dx \\ &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1} f(x)dx \\ &= I_a^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

Donc $I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t)$ est vraie presque partout sur l'intervalle $[a,b]$. □

1.6.4 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.33 *Soit* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, *E un espace de Banach,* $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow E$ *telle que* $f^{(n)} \in L^1([a,b],E)$. *La dérivée fractionnaire de Caputo-Bochner d'ordre* α *de* f *est donnée par*

$$\left({}^C D_a^\alpha f\right)(t) = I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(t).$$

C'est-à-dire,

$$\left({}^C D_a^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds, \quad t > a.$$

Remarque 1.18

$$\begin{aligned} \left(I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f\right)(t) &= \left(I_a^\alpha I_a^{n-\alpha} f^{(n)}\right)(t) \\ &= \left(I_a^{\alpha+n-\alpha} f^{(n)}\right)(t) \\ &= \left(I_a^n f^{(n)}\right)(t). \end{aligned}$$

Notons que

$$\left(I_a^n f^{(n)}\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)ds$$

existe pour presque tout $t \in [a,b]$. *D'où, on déduit que*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left({}^c D_a^\alpha f\right)(s)ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)ds,$$

pour presque tout $t \in [a,b]$.

Proposition 1.8 *Soit* $n-1 < \alpha < n$ *tels que* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathbb{C}^n([a,b],E)$, *alors*

$$I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)} (x-a)^j.$$

Démonstration. *Soit*

$$I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f(x) = \underbrace{I_a^\alpha I_a^{n-\alpha}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x),$$

d'après le théorème 1.17, $\quad I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f(x) = I_a^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)$.
Soit $f \in C^n([a,b],E), n \geq 1$ *et* $\alpha > 0$, *nous avons*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt,$$

on fait une intégration par parties comme suit :

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

avec

$$\begin{aligned} u' &= (x-t)^{\alpha-1} \quad \Longrightarrow \quad u = -\frac{1}{\alpha}(x-t)^{\alpha}, \\ v &= f(t) \quad \Longrightarrow \quad v' = f'(t). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\left[-\frac{1}{\alpha}(x-t)^{\alpha} f(t) \right]_a^x - \int_a^x -\frac{1}{\alpha}(x-t)^{\alpha} f'(t)dt \right), \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t)dt. \end{aligned}$$

Donc

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + I_a^{\alpha+1} f'(x).$$

Si on fait l'intégration par parties une $2^{\text{ème}}$ *fois sur* $I_a^{\alpha+1} f'(x)$, *on obtient :*

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} f'(a) + I_a^{\alpha+2} f''(x),$$

ainsi de suite jusqu'à obtenir

$$I_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n} f^{(n)}(x).$$

Pour démontrer le résultat , il faut passer à la démonstration par récurrence.
Soit $n \geq 1, \quad f \in C^n([a,b], E), \alpha > 0$ *;*

$$I_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n} f^{(n)}(x) \ldots\ldots\ldots\ldots P(n).$$

On montre par récurrence que $P(n)$ *est vraie. Pour* $n = 1$, *la propriété*

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + I_a^{\alpha+1} f'(x)$$

est vérifiée.
Supposons que $P(n)$ *est vraie :*

$$\forall n \geq 1, f \in C^n([a,b], E), \alpha > 0; \quad I_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n} f^{(n)}(x),$$

et montrons que $P(n+1)$ est vraie :

$$\forall n \geq 1, f \in C^{n+1}([a,b],E), \alpha > 0; I_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n+1} f^{(n+1)}(x).$$

Soit

$$I_a^{\alpha+n} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+n-1} f^{(n)}(t)dt,$$

par une intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned} & I_a^{\alpha+n} f^{(n)}(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \left(\left[\frac{-1}{(\alpha+n)} (x-t)^{\alpha+n} f^{(n)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{1}{(\alpha+n)} (x-t)^{\alpha+n} f^{(n+1)}(t)dt \right) \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)} f^{(n)}(a) + I_a^{\alpha+n+1} f^{(n+1)}(x). \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'hypothèse, on obtient

$$I_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + \frac{(x-a)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)} f^{(n)}(a) + I_a^{\alpha+n+1} f^{(n+1)}(x),$$

$$I_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n+1} f^{(n+1)}(x).$$

Donc $P(n+1)$ est vérifiée et d'après le principe de récurrence $P(n)$ est vraie. Si on fait la limite quand α tend vers 0^+ dans les deux memebres, on obtient

$$\underbrace{\lim_{\alpha \to 0^+} I_a^\alpha f(x)}_{f(x)} = \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n} f^{(n)}(x) \right),$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j}}{\Gamma(1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{n} f^{(n)}(x)$$

alors

$$I_a^n f^{(n)}(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a).$$

Donc $\quad I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a).$ □

Proposition 1.9 *Soit $f \in C^{n-1}([a,b],E)$, $n-1 < \alpha < n$ tels que $n \in \mathbb{N}^*$ et $f^{(n)} \in L^1([a,b],E)$, alors*

$$I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)} (x-a)^j.$$

Démonstration. On a $I_a^{\alpha C}D_a^{\alpha}f(x) = I_a^n f^{(n)}(x) = I_a^{n-1}I_a^1 f^{(n)}(x)$.
D'après la remarque 1.14

$$I_a^1 f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a).$$

Donc

$$I_a^n f^{(n)}(x) = I_a^{n-1} f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) I_a^{n-1} 1.$$

D'après la proposition1.8 :

$$I_a^n f^{(n)}(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)}(x-a)^j - \frac{f^{(n-1)}(a)}{\Gamma(n)}(x-a)^{n-1},$$

on obtient

$$I_a^n f^{(n)}(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)}(x-a)^j.$$

□

Remarque 1.19 *Si $f \in C([a,b],E)$,(pour n=1) alors*

$$I_a^{\alpha C}D_a^{\alpha}f(x) = f(x) - f(a).$$

Chapitre 2

Étude d'une équation différentielle abstraite neutre autonome d'ordre fractionnaire

2.1 Position du problème

Ce chapitre présente une synthèse des résultats obtenus dans l'article de Hernández et al. [6], intitulé :

"On recent developments in the theory of abstract differential equations with fractional derivatives".

En utilisant une méthode basée sur la théorie des opérateurs résolvants d'une équation intégrale et le théorème du point fixe de Banach, nous établissons des résultats d'existence et d'unicité des solutions de ce type d'equations équations. Plus précisément, nous étudionss l'équation différentielle neutre non-autonome d'ordre fractionnaire $\alpha \in (0, 1]$ dans un espace de Banach X :

$$D^\alpha(x(t) + g(t, x(t))) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in [0, a], \tag{2.1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2.2}$$

où

— D^α ($D^\alpha = {}^C D_0^\alpha$) est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo,

— A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$, $x_0 \in X$,

— $f, g \in C([0,a] \times X; X)$ sont deux fonctions non linéaires.

D'abord, nous rappellons la définition de l'opérateur résolvant associé à une équation intégrale, voir [10] pour plus de détails. Nous supposons que l'équation intégrale

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{Au(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} \mathrm{d}s, \quad t \geq 0, \tag{2.3}$$

a un **opérateur résolvant associé** $(S(t))_{t\geq 0}$ dans l'espace X.

Définition 2.1 ***(Opérateur résolvant associé à une équation intégrale)*** *Une famille d'opérateurs linéaires bornés $(S(t))_{t\geq 0}$ X est appelée opérateur résolvant pour l'équation intégrale* (2.3) *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

— *$S(\cdot)x \in C([0,\infty); X)$ et $S(0)x = x$ pour tout $x \in X$,*

— *$S(t)D(A) \subset D(A)$ et $AS(t)x = S(t)Ax$ pour tout $x \in D(A)$ et chaque $t \geq 0$,*

— *pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$,*

$$S(t)x = x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{AS(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} x \ \mathrm{d}s. \tag{2.4}$$

Définition 2.2 *Un opérateur résolvant $S(t)$ est appelé différentiable si $S(\cdot)x \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}_+; X)$ pour chaque $x \in D(A)$ et s'il existe une fonction $\varphi_A \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ telle que $\|S'(t)x\| \leq \varphi_A(t)\|x\|_A$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$, pour chaque $x \in D(A)$.*

Dans ce qui suit, nous supposons que l'opérateur résolvant $(S(t))_{t\geq 0}$ est analytique, pour plus de détails voir [10], Chapitre 2.

De plus, φ_A est une fonction dans $L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty); \mathbb{R}^+)$ et M_i, $i = 0,1,2$, sont des constantes positives telles que $\|S'(t)x\| \leq \varphi_A(t)\|x\|_{[D(A)]}$, pour tout $t > 0$ et chaque $x \in D(A)$, où $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_0$ et $\|\frac{d^iS(t)}{dt^i}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_i t^{-i}$ pour $i = 1,2$, et tout $t > 0$.

Considérons maintenant l'équation intégrale abstraite :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{Au(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} \mathrm{d}s + h(t), \quad t \in [0,a], \tag{2.5}$$

où $h \in C([0,a]; X)$.

D'après [10], Définition 1.1.1, nous avons le concept suivant d'une solution.

Définition 2.3 *Une fonction $u \in C([0,b];X)$ est dite solution intégrale (mild solution) de l'équation intégrale (2.5) sur l'intervalle $[0,b]$ si $\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)\,ds \in D(A)$ pour tout $t \in [0,b]$ et*

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} A \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} \mathrm{d}s + h(t), \quad \forall t \in [0,b].$$

Le résultat important suivant découle de [10, Proposition I.1.2], [10, Théorème II.2.4], [10, Corollaire II.2.6], et [10, Proposition I.1.3]

Lemme 2.1 *Sous les conditions ci-dessus, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

— ***(a)*** *Si $u(\cdot)$ est une solution intégrale (mild solution) de l'équation (2.5) sur l'intervalle $[0,b]$, alors la fonction $t \mapsto \int_0^t S(t-s)h(s)\,ds$ est continûment différentiable sur l'intervalle $[0,b]$ et*

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t S(t-s)h(s)\mathrm{d}s, \quad \forall t \in [0,b].$$

— ***(b)*** *Si $h \in C^\beta([0,b];X)$ pour $\beta \in (0,1)$ et $0 \leq b \leq a$, alors la fonction définie par*

$$u(t) = S(t)(h(t)-h(0)) + \int_0^t S'(t-s)[h(s)-h(t)]\mathrm{d}s + S(t)h(0), \quad t \in [0,b]$$

est une solution intégrale (mild solution) de l'équation (2.5) sur l'intervalle $[0,b]$.

— ***(c)*** *Si $h \in C([0,b];[D(A)])$ pour $0 \leq b \leq a$, alors la fonction $u : [0,b] \to X$ définie par*

$$u(t) = \int_0^t S'(t-s)h(s)\mathrm{d}s + h(t), \quad t \in [0,b]$$

est une solution intégrale (mild solution) de l'équation (2.5) sur l'intervalle $[0,b]$.

Proposition 2.1

1. *Si $h \in C([0,b];[D(A)])$ et la fonction $s \mapsto S'(t-s)h(s)$ est intégrable sur l'intervalle $[0,t]$ pour tout $t \in [0,b]$, alors*

$$\int_0^t S'(t-s)h(s)\mathrm{d}s \in C([0,b];X).$$

2. *Si $f \in C^\alpha([0,b];X)$ pour $\alpha \in (0,1)$ et $0 \leq b \leq a$ et la fonction, $s \mapsto S'(t-s)[f(s)-f(t)]$ est intégrable sur l'intervalle $[0,t]$ pour tout $t \in [0,b]$, alors*

$$\int_0^t S'(t-s)[f(s)-f(t)]\mathrm{d}s \in C^\alpha([0,b];X).$$

Démonstration.

1. Soit $t, r \in [0, b]$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^t S'(t-s)h(s)ds - \int_0^r S'(r-s)h(s)ds \\
&= \int_0^t S'(\tau)h(t-\tau)d\tau - \int_0^r S'(\tau)h(r-\tau)d\tau \\
&= \int_r^t S'(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_0^r S'(\tau)\left[h(t-\tau) - h(r-\tau)\right]d\tau.
\end{aligned}$$

Puisque $\varphi_A \in L^1([0,c];\mathbb{R}^+)$, alors $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tel que $(t-r) \leqslant \delta \Rightarrow$

$$\int_r^t \|S'(\tau)h(t-\tau)\|d\tau \leq \|h\|_{C([D(A)])}\int_r^t \varphi_A(\tau)d\tau \leq \varepsilon.$$

Comme $h \in C([0,b];[D(A)])$, alors

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : [(t-\tau) - (r-\tau)] = (t-r) \leqslant \delta \Rightarrow \|\,[h(t-\tau) - h(r-\tau)\|_{[D(A)]} \leq \varepsilon.$$

Cela implique que

$$\int_0^r \|S'(\tau)h(t-\tau) - h(r-\tau)\|d\tau \leq \varepsilon\|\varphi_A\|_{L^1([0,b];\mathbb{R}^+)}.$$

Donc

$$\int_0^t S'(t-s)h(s)\mathrm{d}s \in C([0,b];X)$$

2. Soit $t, t+h \in [0,b]$,$f \in C^\alpha([0,b];X)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t+h} S'(t+h-s)[f(s) - f(t+h)]\mathrm{d}s - \int_0^t S'(t-s)[f(s) - f(t)]\mathrm{d}s \\
&= \int_t^{t+h} S'(t+h-\tau)(f(\tau) - f(t+h))d\tau + \int_0^t (S'(h+\tau) - S'(\tau))\,(f(t-\tau) - f(t))d\tau \\
&+ \int_0^t S'(h+\tau)(f(t) - f(t+h))\mathrm{d}\tau \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|I_1\| \leq M_1[|f|]_\alpha \int_t^{t+h} (t+h-\tau)^{\alpha-1}d\tau = M_1[|f|]_\alpha h^\alpha/\alpha.$$

Puisque,

$$|S'(t+h) - S'(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \int_t^{t+h} \|S''(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\, d\tau \leq M_2 \cdot \frac{h}{t(t+h)},$$

pour tous $t, t+h \in [0,b]$, alors

$$\begin{aligned}\|I_2\| &\leq M_2[|f|]_\alpha \int_0^t h\tau^{\alpha-1}(\tau+h)^{-1}d\tau = M_2[|f|]_\alpha h^\alpha \int_0^{t/h} \tau^{\alpha-1}(\tau+1)^{-1}d\tau \\ &\leq M_2[|f|]_\alpha h^\alpha \int_0^\infty \tau^{\alpha-1}(\tau+1)^{-1}d\tau = M_2[|f|]_\alpha h^\alpha \pi/\sin(\alpha\pi).\end{aligned}$$

De même

$$\|I_3\| \leq \ln\left(\frac{t+h}{h}\right)[|f|]_\alpha h^\alpha.$$

Donc

$$\int_0^t S'(t-s)[f(s)-f(t)]\mathrm{d}s \in C^\alpha([0,b];X).$$

□

2.2 Existence des solutions

Dans cette section, nous étudions l'existence des solutions intégrales (mild solutions) du problème (2.1)-(2.2). Pour introduire le concept d'une solution intégrale, nous notons que si $u \in C([0,a];[D(A)])$ est une solution du problème (2.1)-(2.2), alors nous pouvons nous attendre à ce que

$$I_0^\alpha D^\alpha(x(t) + g(t,x(t))) = I_0^\alpha Ax(t) + I_0^\alpha f(t,x(t)).$$

D'où

$$u(t) = x_0 + g\,(0,x_0) - g(t,u(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{Au(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f(s,u(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s, \quad t \in [0,a]. \tag{2.6}$$

Motivés par le Lemme 2.1 et la représentation (2.6), nous introduisons le concept suivant d'une solution.

Définition 2.4 *Une fonction $u \in C([0,b];X), 0 < b \leq a$, est dite solution intégrale (mild solution) du problème (2.1)-(2.2) sur l'intervalle $[0,b]$ si $\int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s \in D(A)$ pour tout $t \in [0,b]$ et*

$$u(t) = x_0 + g\,(0,x_0) - g(t,u(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}A\int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f(s,u(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s, \quad t \in [0,a]. \tag{2.7}$$

Remarque 2.1 *Dans ce qui suit, pour simplifier l'étude du problème (2.1)-(2.2), pour une fonction* $u \in C([0,b];X)$*, nous utilisons les notations* G_u, F_u *pour les fonctions* G_u, F_u : $[0,b] \to X$ *définies par* $G_u(s) = x_0 + g(0,x_0) - g(s,u(s))$ *et*

$$F_u(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \frac{f(\tau, u(\tau))}{(s-\tau)^{1-\alpha}}\, d\tau.$$

Théorème 2.2 *Supposons que* $f, g \in C([0,a] \times X; [D(A)])$ *et qu'il existe des fonctions* $L_g, L_f \in C([0,a]; \mathbb{R}^+)$ *telles que* $L_g(0) < 1$ *et*

$$\|g(t,x) - g(t,y)\|_{[D(A)]} \leq L_g(t)\|x-y\|,$$
$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_{[D(A)]} \leq L_f(t)\|x-y\|,$$

pour tout $t \in [0,a]$*, et tout* $x, y \in X$*. Alors il existe une solution intégrale (mild solution) unique du problème (2.1)-(2.2) sur l'intervalle* $[0,b]$ *pour* $0 < b \leq a$*.*

Démonstration. Nous allons établir l'existence d'une dolution intégrale du problème (2.1)-(2.2), en utilisant un critère de point fixe pour les applications continues.
Puisque $L_g(0) < 1$, $|L_g|_{C([0,c];\mathbb{R}^+)} \to L_g(0)$ et $\|\varphi_A\|_{L^1([0,c];\mathbb{R}^+)} \to 0$ lorsque $c \to 0$, alors il existe $0 < b \leq a$ tel que

$$\Lambda = \left(|L_g|_{C([0,b];\mathbb{R}^+)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |L_f|_{C([0,b];\mathbb{R}^+)} \frac{b^\alpha}{\alpha} \right) \left(1 + \| \varphi_A|_{L^1([0,b];\mathbb{R}^+)} \right) < 1.$$

En considérant le lemme 2.1(c), nous introduisons l'application $\Gamma : C([0,b];X) \to C([0,b];X)$ définie par

$$\Gamma u(t) = G_u(t) + F_u(t) + \int_0^t S'(t-s)\, [G_u(s) + F_u(s)]\, ds, \quad t \in [0,b].$$

Soit $u \in C([0,b];X)$. Les hypothèse sur $f(\cdot), g(\cdot)$ permettent d'obtenir

$$G_u \in C([0,b];[D(A)]),$$

car $x_0 \in D(A)$ (x_0 une solution de l'eq pour $t = 0$), $g \in C([0,a] \times X; [D(A)])$,
et

$$F_u \in C([0,b];[D(A)])$$

car $f(\cdot, u(\cdot)) \in C([0,a];[D(A)])$ et $F_u = I_0^\alpha f(t,u(t))$.
D'où

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|S'(t-s)\,[G_u(s)+F_u(s)]\|\; ds \\
&\quad\leq \int_0^t \varphi_A(t-s)\,\|G_u(s)+F_u(s)\|_{[D(A)]}\; ds \\
&\quad\leq \|G_u\|_{C([0,b];[D(A)])} \int_0^t \varphi_A(t-s)\,ds \\
&\qquad + \int_0^t \varphi_A(t-s)\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \frac{\|f(\tau,u(\tau))\|_{[D(A)]}}{(s-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau\,ds \\
&\quad\leq \|G_u\|_{C([0,b];[D(A)])}\,\|\varphi_A\|_{L^1([0,b];\mathbb{R}^+)} \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|f(\cdot,u(\cdot))\|_{C([0,b];[D(A)])} \int_0^t \varphi_A(t-s)\frac{s^\alpha}{\alpha}\,ds \\
&\quad\leq \left(\|G_u\|_{C([0,b];[D(A)])} + \|f(\cdot,u(\cdot))\|_{C([0,b];[D(A)])}\frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)\alpha}\right)\|\varphi_A\|_{L^1([0,b];\mathbb{R}^+)}\,.
\end{aligned}$$

Cela implique que la fonction $s \mapsto S'(t-s)\,(G_u(s)+F_u(s))$ est intégrable sur $[0,t]$ pour tout $t \in [0,b]$ et $\Gamma u \in C([0,b];X)$. Puisque $F_u(\cdot)$ et $G_u(\cdot)$ sont continues, ce qui précède montre que Γ est bien définie. De plus, pour $u, v \in C([0,b];X)$ et $t \in [0,b]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &\leq \|G_u(t)-G_v(t)\| + \|F_u(t)-F_v(t)\| + \int_0^t \|f'(t-s)\,(G_u(s)-G_v(s))\|\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left\|S'(t-s)\int_0^s \frac{f(\tau,u(\tau))-f(\tau,v(\tau))}{(s-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau\right\|\mathrm{d}s \\
&\leq |L_g|_{C([0,b];\mathbb{R}^+)}\,\|u-v\|_{C(X)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{L_f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s\|u-v\|_{C(X)} \\
&\quad + \int_0^t \varphi_A(t-s)\,\|G_u(s)-G_v(s)\|_{[D(A)]}\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \varphi_A(t-s)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s \frac{\|f(\tau,u(\tau))-f(\tau,v(\tau))\|_{[D(A)]}}{(s-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s \\
&\leq \left(|L_g|_{C([0,b];\mathbb{R}^+)} + |L_f|_{C([0,b];\mathbb{R}^+)}\frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)\alpha}\right)\|u-v\|_{C(X)} \\
&\quad + \int_0^t \varphi_A(t-s)L_g(s)\mathrm{d}s\|u-v\|_{C(X)} \\
&\quad + \int_0^t \varphi_A(t-s)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s \frac{L_f(s)}{(s-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\|u-v\|_{C(X)} \\
&\leq \Lambda\|u-v\|_{C(X)}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que Γ est une contraction et qu'il existe un point fixe unique $u(\cdot)$ de Γ. D'après le Lemme 2.1(c), nous concluons que $u(\cdot)$ est une solution intégrale du problème (2.1)-(2.2). $\square$

Lemme 2.2 *Supposons $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $u \in C([0,b]; X)$. Alors $F_u \in C^{1-\alpha}([0,b]; X)$ et*

$$[|F_u|]_{C^{1-\alpha}([0,b];X)} \leq \frac{b^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right) \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C([0,b];X)}.$$

Démonstration. Pour $t \in [0,b)$ et $h > 0$ tel que $t+h \in [0,b]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|F_u(t+h) - F_u(t)\| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[\frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}}\right] \|f(\tau, u(\tau))\| \mathrm{d}\tau \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t+h} \frac{\|f(\tau, u(\tau))\|}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[\frac{(t+h-\tau)^{1-\alpha} - (t-\tau)^{1-\alpha}}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\alpha}}\right] \|f(\tau, u(\tau))\| \mathrm{d}\tau \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t+h} \frac{\|f(\tau, u(\tau))\|}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C([0,b];X)} h^{1-\alpha} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{2(1-\alpha)}} \mathrm{d}\tau \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C([0,b];X)} \left(\frac{h^\alpha}{\alpha}\right) \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C([0,b];X)} \left(h^{1-\alpha} \frac{b^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + \frac{h^\alpha}{\alpha}\right) \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C([0,b];X)} \left(\frac{b^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + \frac{b^{2\alpha-1}}{\alpha}\right) h^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Donc

$$[|F_u|]_{C^{1-\alpha}([0,b];X)} \leq \frac{b^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right) \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C([0,b];X)}$$

et $F_u \in C^{1-\alpha}([0,b]; X)$. $\square$

Lemme 2.3 *Si $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $f(\cdot, u(\cdot)) \in C([0,b]; [D(A)])$, alors $F_u \in C^{1-\alpha}([0,b]; [D(A)])$ et*

$$[|F_u|]_{C^{1-\alpha}([0,b];[D(A)])} \leq \frac{b^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right) \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C([0,b];[D(A)])}.$$

Théorème 2.3 *Soit $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $f \in C([0,a]; \mathcal{L}(X))$, $g \in C^{1-\alpha}([0,a]; \mathcal{L}(X))$ et $S(\cdot)x_0 \in C^{1-\alpha}([0,a]; X)$. S'il existe $0 < b \leq a$ tel que*

$$\left(M_0 + \frac{2M_1}{1-\alpha} + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right) \|g\|_{C^{1-\alpha}([0,b];\mathcal{L}(X))} < 1,$$

alors il existe une solution intégrale (mild solution) du problème (2.1)-(2.2) sur l'intervalle $[0, b_1]$ *pour* $0 < b_1 \leq b$.

Démonstration. D'après les hypothèses, nous pouvons choisir $0 < b_1 < b$ tel que

$$\left(M_0 + \frac{2M_1}{1-\alpha} + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha} + \Lambda(g, b_1)\right) \|g\|_{C^{1-\alpha}([0,b_1];\mathcal{L}(X))} + \left(\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)}\frac{b_1^\alpha}{\alpha} + \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)}\frac{b_1^\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right) + \Lambda(f, b_1)\right) \|f\|_{C([0,b_1];\mathcal{L}(X))} < 1,$$

où

$$\Lambda(g, b_1) = \left(M_0 b_1^{1-\alpha} + M_1\left(\frac{b_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{b_1^\alpha}{\alpha}\right)\right)$$

et

$$\Lambda(f, b_1) = \frac{b_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(M_1\left(\frac{2}{1-\alpha} + \frac{b_1^\alpha}{\alpha}\right) + M_0 + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right).$$

En considérant le Lemme 2.1(b), nous définissons l'application
$\Gamma : C^{1-\alpha}([0, b_1]; X) \to C^{1-\alpha}([0, b_1]; X)$ par

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2,$$

où

$$\Gamma_1 u(t) = S(t)(G_u(t) - x_0) + \int_0^t S'(t-s)[G_u(s) - G_u(t)]\,\mathrm{d}s + S(t)x_0, \quad t \in [0, b_1],$$

$$\Gamma_2 u(t) = S(t)F_u(t) + \int_0^t S'(t-s)[F_u(s) - F_u(t)]\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0, b_1].$$

Pour montrer que l'application Γ est une contraction, d'abord nous établissons que Γ prend ses valeurs dans $C^{1-\alpha}([0, b_1]; X)$.
Soit $u \in C^{1-\alpha}([0, b_1]; X)$. Pour $t \in [0, b_1]$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\|G_u(s) - G_u(t)\| \\
&= \|g(s, u(s)) - g(t, u(t))\| \\
&= \|g(s)u(s) - g(t)u(t) + g(t)u(s) - g(t)u(s)\| \\
&\leqslant \|(g(s) - g(t))u(s)\| + \|g(t)(u(t) - u(s))\|.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|S'(t-s)\,[G_u(s)-G_u(t)]\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq M_1 \int_0^t \frac{\|(g(s)-g(t))u(s)\| + \|g(t)(u(t)-u(s))\|}{t-s}\,\mathrm{d}s \\
&\leq M_1 \left([|g|]_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C(X)} + \|g\|_{C(\mathcal{L}(X))}[|u|]_{C^{1-\alpha}(X)}\right) \int_0^t \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{t-s}\,\mathrm{d}s \\
&\leq M_1 \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} \frac{b_1^{1-\alpha}}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que l'application $s \mapsto S'(t-s)\,(G_u(s)-G_u(t))$ est intégrable sur l'intervlle $[0,t]$ pour tout $t \in [0,b_1]$ et que $t \mapsto \int_0^t S'(t-s)\,[G_u(s)-G_u(t)]\ ds \in C([0,b_1];X)$.

De même, d'après le Lemme 2.3, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|S'(t-s)\,[F_u(s)-F_u(t)]\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|f(\cdot,u(\cdot))\|_{C(X)} \int_0^t \|S'(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)} \frac{b_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right)(t-s)^{1-\alpha}\mathrm{d}s \\
&\leq M_1 \|f\|_{C(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C(X)} \frac{b_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right) \int_0^t \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{t-s}\,\mathrm{d}s \\
&\leq M_1 \|f\|_{C(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C(X)} \frac{b_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right) \frac{b_1^{1-\alpha}}{1-\alpha},
\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'affirmer que $t \mapsto \int_0^t S'(t-s)\,[F_u(s)-F_u(t)]\ ds \in C([0,b_1];X)$.

À partir des remarques ci-dessus, nous concluons que $\Gamma u \in C([0,b_1];X)$.

De plus

$$\begin{aligned}
&\|S(t)\,(G_u(t)-x_0)\,\| \\
&\leqslant M_0\,\|g\,(0,x_0)-g(t,u(t))\| \\
&\leqslant M_0\,\|g(0)x_0-g(t)u(t)+g(0)u(t)-g(0)u(t)\| \\
&\leqslant M_0\,\|g(0)\,(x_0-u(t))\| + M_0\|u(t)(g(0)-g(t))\| \\
&\leqslant M_0\|g\|_{C(\mathcal{L}(X))}[|u|]_{C^{1-\alpha}(x)} b_1^{1-\alpha} + M_0\|u\|_{C(X)}[|g|]_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))} b_1^{1-\alpha} \\
&\leqslant M_0\|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} b_1^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\|S(t)F_u(t)\| \\
&\leqslant M_0 \|F_u(t)\| \\
&\leqslant \frac{M_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\|f(s,u(s)\|}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \\
&\leqslant \frac{M_0}{\Gamma(\alpha)} \|f\|_{C(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C(X)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \leqslant \frac{M_0}{\alpha\Gamma(\alpha)} b_1^{\alpha} \|f\|_{C(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C(X)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u\|_{C(X)} \leq &\int_0^t \|S'(t-s)\left[G_u(s)-G_u(t)\right]\| \,\mathrm{d}s + \int_0^t \|S'(t-s)\left[F_u(s)-F_u(t)\right]\| \,\mathrm{d}s \\
&+ \|S(t)\left(G_u(t)-x_0\right)\| + \|S(t)x_0\| + \|S(t)F_u(t)\| \\
&\leq M_1 \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} \frac{b_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\
&+ M_1 \|f\|_{C(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C(X)} \frac{b_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right) \frac{b_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\
&+ M_0 \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} b_1^{1-\alpha} + \|S(\cdot)x_0\|_{C(X)} + \frac{M_0}{\alpha\Gamma(\alpha)} b_1^{\alpha} \|f\|_{C(\mathcal{L}(X))} \cdot \|u\|_{C(X)} \\
&\leq \left(M_0 b_1^{1-\alpha} + M_1 \frac{b_1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} + \|S(\cdot)x_0\|_{C(X)} \\
&+ \left(\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)} \frac{b_1^{\alpha}}{\alpha} + M_1 \frac{b_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1-\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right)\right) \|f\|_{C(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C(X)}.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u\|_{C(X)} \leq &\left(M_0 b_1^{1-\alpha} + M_1 \frac{b_1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} + \|S(\cdot)x_0\|_{C(X)} \\
&+ \left(\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)} \frac{b_1^{\alpha}}{\alpha} + M_1 \frac{b_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1-\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right)\right) \|f\|_{C(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C(X)}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Maintenant, nous prouvons que $\Gamma_i u \in C^{1-\alpha}([0,b_1];X)$ pour $i=1,2$.

En utilisant l'inégalité

$$\ln\left(\frac{t+h}{h}\right) \leq \frac{h^{\alpha}}{\alpha}$$

pour tous $t \in [0, b_1)$ et $h > 0$ tels que $t + h \in [0, b_1]$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma_1 u(t+h) - \Gamma_1 u(t)\| \\
&= \left\| S(t+h)\left(G_u(t+h) - x_0\right) + \int_0^{t+h} S'(t+h-s)\left[G_u(s) - G_u(t+h)\right] \mathrm{d}s \right. \\
&\quad \left. + S(t+h)x_0 - S(t)\left(G_u(t) - x_0\right) - \int_0^t S'(t-s)\left[G_u(s) - G_u(t)\right] \mathrm{d}s - S(t)x_0 \right\| . \\
&\leq \left\| S(t+h)\left(G_u(t+h) - x_0\right) - S(t)\left(G_u(t) - x_0\right) + S(t+h)G_u(t) - S(t+h)G_u(t) \right\| . \\
&+ \left\| \int_0^{t+h} S'(t+h-s)\left[G_u(s) - G_u(t+h)\right] \mathrm{d}s - \int_0^t S'(t-s)\left[G_u(s) - G_u(t)\right] \mathrm{d}s \right\| . \\
&+ \left\| S(t+h)x_0 - S(t)x_0 \right\| .
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\left\| S(t+h)\left(G_u(t+h) - x_0\right) - S(t)\left(G_u(t) - x_0\right) + S(t+h)G_u(t) - S(t+h)G_u(t) \right\| . \\
&\leq \|(S(t+h) - S(t))(Gu(t) - x_0)\| + \|S(t+h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|Gu(t+h) - Gu(t)\| \\
&\leq \int_t^{t+h} \|S'(\tau)(Gu(t) - x_0)\| \,\mathrm{d}\tau + M_0 \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} h^{1-\alpha} \\
&\leq M_1 \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} \int_t^{t+h} \frac{\tau^{1-\alpha}}{\tau} \mathrm{d}\tau + M_0 \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} h^{1-\alpha} \\
&\leq M_1 \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} \frac{[\tau^{1-\alpha}]_t^{t+h}}{1-\alpha} + M_0 \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} h^{1-\alpha} \\
&\leq M_1 \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} + M_0 \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} h^{1-\alpha},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t+h} S'(t+h-s)\left[G_u(s) - G_u(t+h)\right] \mathrm{d}s - \int_0^t S'(t-s)\left[G_u(s) - G_u(t)\right] \mathrm{d}s \\
&= \int_t^{t+h} S'(t+h-s)\left[G_u(s) - G_u(t+h)\right] \mathrm{d}s + \int_0^t S'(t+h-s)\left[G_u(s) - G_u(t+h)\right] \\
&- S'(t-s)\left[G_u(s) - G_u(t)\right] \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

On pose $s = t - r$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t S'(t+h-s)\left[G_u(s) - G_u(t+h)\right] - S'(t-s)\left[G_u(s) - G_u(t)\right] \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t S'(r+h)\left[G_u(t-r) - G_u(t+h)\right] - S'(r)\left[G_u(t-r) - G_u(t)\right] \\
&+ S'(r+h)G_u(t) - S'(r+h)G_u(t) \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

On peut remplacer r par s. D'où

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t+h} S'(t+h-s)\left[G_u(s)-G_u(t+h)\right]\mathrm{d}s-\int_0^{t} S'(t-s)\left[G_u(s)-G_u(t)\right]\mathrm{d}s\\
&=\int_t^{t+h} S'(t+h-s)\left[G_u(s)-G_u(t+h)\right]\mathrm{d}s\\
&+\int_0^{t}\left(S'(h+s)-S'(s)\right)\left[Gu(t-s)-Gu(t)\right]\mathrm{d}s\\
&+\int_0^{t} S'(h+s)\left[Gu(t)-Gu(t+h)\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^{t+h} S'(t+h-s)\left[G_u(s)-G_u(t+h)\right]\mathrm{d}s - \int_0^t S'(t-s)\left[G_u(s)-G_u(t)\right]\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \int_t^{t+h} \|S'(t+h-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \|G_u(\tau)-G_u(t+h)\|\,\mathrm{d}\tau \\
&+ \int_0^t \|S'(h+\tau)-S'(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \|G_u(t-\tau)-G_u(t)\|\,\mathrm{d}\tau \\
&+ \int_0^t \|S'(h+\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \|G_u(t)-G_u(t+h)\|\,\mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_t^{t+h} \|S'(t+h-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}(t+h-\tau)^{1-\alpha}\mathrm{d}\tau \\
&+ \int_0^t \int_\tau^{\tau+h} \|S''(\xi)\|_{\mathcal{L}(X)} \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}\tau^{1-\alpha}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\
&+ \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}h^{1-\alpha}\int_0^t \|S'(h+\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\,\mathrm{d}\tau \\
&\leq M_1\|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}\int_t^{t+h}\frac{\mathrm{d}\tau}{(t+h-\tau)^\alpha} \\
&+ M_2\|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}\int_0^t\int_\tau^{\tau+h}\frac{1}{\xi^{1+\alpha}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\
&+ \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}h^{1-\alpha}M_1\ln\left(\frac{t+h}{h}\right) \\
&\leq M_1\|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}\frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\
&+ M_2\|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}\frac{h^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \\
&+ \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}h^{1-\alpha}M_1\frac{b_1^\alpha}{\alpha}
\end{aligned}$$

et

$$\|S(t+h)x_0 - S(t)x_0\| \leq [|S(\cdot)x_0|]_{C^{1-\alpha}(X)}h^{1-\alpha}.$$

Ainsi

$$[|\Gamma_1 u|]_{C^{1-\alpha}(X)} \leq \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}\left(M_1\left(\frac{2}{1-\alpha}+\frac{b_1^\alpha}{\alpha}\right)+M_0+\frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right)+[|S(\cdot)x_0|]_{C^{1-\alpha}(X)}. \tag{2.9}$$

En utilisant le lemme 2.3 et en procédant comme précédemment,

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma_2 u(t+h) - \Gamma_2 u(t)\| \\
&\leq \|(S(t+h) - S(t))(F_u(t))\| \\
&+ \|S(t+h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|F_u(t+h) - F_u(t)\| \\
&+ \int_t^{t+h} \|S'(t+h-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \|F_u(\tau) - F_u(t+h)\| \,\mathrm{d}\tau \\
&+ \int_0^t \|S'(h+\tau) - S'(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \|F_u(t-\tau) - F_u(t)\| \,\mathrm{d}\tau \\
&+ \int_0^t \|S'(h+\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \|F_u(t) - F_u(t+h)\| \,\mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_t^{t+h} \|S'(\tau)F_u(t)\| \,\mathrm{d}\tau + M_0 [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} h^{1-\alpha} \\
&+ \int_t^{t+h} \|S'(t+h-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} (t+h-\tau)^{1-\alpha} \mathrm{d}\tau \\
&+ \int_0^t \int_\tau^{\tau+h} \|S''(\xi)\|_{\mathcal{L}(X)} [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} \tau^{1-\alpha} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau + [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} h^{1-\alpha} \int_0^t \|S'(h+\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \,\mathrm{d}\tau \\
&\leq M_1 [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} \int_t^{t+h} \frac{\tau^{1-\alpha}}{\tau} \mathrm{d}\tau + M_0 [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} h^{1-\alpha} + M_1 [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} \int_t^{t+h} \frac{\mathrm{d}\tau}{(t+h-\tau)^\alpha} \\
&+ M_2 [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} \int_0^t \int_\tau^{\tau+h} \frac{1}{\xi^{1+\alpha}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau + [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} h^{1-\alpha} M_1 \ln\left(\frac{t+h}{h}\right) \\
&\leq M_1 [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} + M_0 [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} h^{1-\alpha} + M_1 [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\
&+ M_2 [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} \frac{h^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} + [|F_u|]_{C^{1-\alpha}(X)} h^{1-\alpha} M_1 \frac{b_1^\alpha}{\alpha},
\end{aligned}$$

on obtient

$$[|\Gamma_2 u|]_{C^{1-\alpha}(X)} \leq \frac{b_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right) \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C(X)} \left(M_1 \left(\frac{2}{1-\alpha} + \frac{b_1^\alpha}{\alpha}\right) + M_0 + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right), \tag{2.10}$$

et on a

$$[|\Gamma u|]_{C^{1-\alpha}(X)} \leq [|\Gamma_1 u|]_{C^{1-\alpha}(X)} + [|\Gamma_2 u|]_{C^{1-\alpha}(X)}. \tag{2.11}$$

Donc $\Gamma u \in C^{1-\alpha}([0,b_1];X)$. De plus, en notant que $f(t)$ et $g(t)$ sont linéaires pour tout $t \in [0,b_1]$, des estimations $(2.8)-(2.10)$ nous avons

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma u - \Gamma v\|_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&= \|\Gamma(u-v) - S(t)x_0\|_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&= \|\Gamma_1(u-v) - S(t)x_0 + \Gamma_2(u-v)\|_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&= \|\Gamma(u-v) - S(t)x_0\|_{C(X)} + [|\Gamma_1(u-v) - S(t)x_0 + \Gamma_2(u-v)|]_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&\leq \|\Gamma(u-v) - S(t)x_0\|_{C(X)} + [|\Gamma_1(u-v) - S(t)x_0|] + [|\Gamma_2(u-v)|]_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&\leq \left(M_0 b_1^{1-\alpha} + M_1 \frac{b_1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u-v\|_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&\quad + \left(\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)}\frac{b_1^{\alpha}}{\alpha} + M_1\frac{b_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right)\right)\|f\|_{C(\mathcal{L}(X))}\|u-v\|_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&\quad + \|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u-v\|_{C^{1-\alpha}(X)}\left(M_1\left(\frac{2}{1-\alpha}+\frac{b_1^{\alpha}}{\alpha}\right) + M_0 + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right) \\
&\quad + \frac{b_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(M_1\left(\frac{2}{1-\alpha}+\frac{b_1^{\alpha}}{\alpha}\right) + M_0 + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right)\|f\|_{C(\mathcal{L}(X))}\|u-v\|_{C^{1-\alpha}(X)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma u - \Gamma v\|_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&\leq \left[M_0 + \frac{2M_1}{1-\alpha} + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha} + \Lambda(g,b_1)\right]\|g\|_{C^{1-\alpha}(\mathcal{L}(X))}\|u-v\|_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&+ \left[\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)}\frac{b_1^{\alpha}}{\alpha} + \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)}\frac{b_1^{\alpha}}{1-\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right) + \Lambda(f,b_1)\right]\|f\|_{C(\mathcal{L}(X))}\|u-v\|_{C^{1-\alpha}(X)},
\end{aligned}$$

pour tout $u,v \in C^{1-\alpha}([0,b_1];X)$.

Maintenant, à partir du choix de b_1, on déduit qu'il existe un point fixe unique de Γ, qui, d'après le Lemme 2.1(b), est une solution intégrale du problème (2.1)-(2.2) sur l'intervalle $[0,b_1]$. □

Il nous reste à montrer l'existence d'une solution intégrale du problème (2.1)-(2.2) dans le cas où $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$. Pour cela, nous devons supposer que la fonction f est Hölderienne d'une manière appropriée. Pour commencer, nous établissons le lemme suivant.

Lemme 2.4 *Supposons que $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$, $f \in C([0,b];\mathcal{L}(X))$ et $u \in C([0,b];X)$ pour tout $0 < b \leq a$. Si la fonction $f(\cdot,u(\cdot))$ appartient à $C^{\alpha}([0,b];X)$, alors $F_u \in C^{\alpha}([0,b];X)$ et*

$$[|F_u|]_{C^{\alpha}([0,b];X)} \leq \|f(\cdot,u(\cdot))\|_{C^{\alpha}(X)}\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(1+b^{\alpha}\right).$$

Démonstration. Pour $t \in [0, b)$ et $h > 0$ tel que $t + h \in [0, b]$, on a

$$F_u(t+h) - F_u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t+h} \frac{f(\tau, u(\tau))}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t} \frac{f(\tau, u(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t+h} \frac{f(\tau, u(\tau))}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{h} \frac{f(\tau, u(\tau))}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_h^{t+h} \frac{f(\tau, u(\tau))}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau.$$

En posant $s = \tau - h$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_h^{t+h} \frac{f(\tau, u(\tau))}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t} \frac{f(s+h)u(s+h)}{(t-s)^{1-\alpha}} \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t} \frac{f(\tau+h)u(\tau+h)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\|F_u(t+h) - F_u(t)\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{h} \frac{\|f(\tau, u(\tau))\|}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t} \frac{\|f(\tau+h)u(\tau+h) - f(\tau)u(\tau)\|}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau \\ &\leq \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C(X)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{h} \frac{1}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau + [|f(\cdot, u(\cdot))|]_{C^\alpha(X)} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t} \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau \\ &\leq \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C(X)} \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} [(t+h)^\alpha - t^\alpha] + [|f(\cdot, u(\cdot))|]_{C^\alpha(X)} \frac{h^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} [t^\alpha] \\ &\leq \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C^\alpha(X)} \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} (1 + b^\alpha) h^\alpha.\end{aligned}$$

Donc

$$[|F_u|]_{C^\alpha([0,b];X)} \leq \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C^\alpha(X)} \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} (1 + b^\alpha)$$

et $F_u \in C^\alpha([0, b]; X)$. □

La preuve du théorème suivantt se fait en argumentant comme dans la preuve du Théorème 2.3.

Théorème 2.4 *Supposons que* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $f, g \in C^\alpha([0, a]; \mathcal{L}(X))$, $S(\cdot)x_0 \in C^\alpha([0, a]; X)$ *et il existe* $0 < b \leq a$ *tel que*

$$\left(M_0 + \frac{2M_1}{\alpha} + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right) \left(\|g\|_{C^\alpha([0,b];\mathcal{L}(X))} + \|f\|_{C^\alpha([0,b];\mathcal{L}(X))} \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right) < 1.$$

Alors il existe une solution intégrale du problème (2.1)-(2.2) sur l'intervalle $[0, b_1]$ *pour* $0 < b \leq b_1$.

Démonstration. À partir des hypothèses, nous pouvons choisir $0 < b_1 < b$, tel que

$$\left[M_0 + \frac{2M_1}{\alpha} + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha} + \Lambda(g,b_1)\right] \|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))} + \left[\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(M_0 + \frac{2M_1}{\alpha} + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right) + \Lambda(f,b_1)\right] \|f\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))} < 1,$$

où

$$\Lambda(g,b_1) = b_1^\alpha\left(M_0 + \frac{2M_1}{\alpha}\right)$$

et

$$\Lambda(f,b_1) = \frac{b_1^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(M_1\left(\frac{4+2b_1^\alpha}{\alpha}\right) + 2M_0 + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right).$$

En considérant le Lemme 2.1(b), nous définissons l'application
$\Gamma : C^\alpha([0,b_1];X) \to C^\alpha([0,b_1];X)$ par $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ où

$$\Gamma_1 u(t) = S(t)(G_u(t) - x_0) + \int_0^t S'(t-s)[G_u(s) - G_u(t)]\,\mathrm{d}s + S(t)x_0, \quad t \in [0,b_1],$$

$$\Gamma_2 u(t) = S(t)F_u(t) + \int_0^t S'(t-s)[F_u(s) - F_u(t)]\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,b_1].$$

Pour démontrer que l'application Γ est une contraction, nous devons d'abord établir que Γ prend ses valeurs dans $C^\alpha([0,b_1];X)$.
Soit $u \in C^\alpha([0,b_1];X)$. Pour $t \in [0,b_1]$, nous avons :

$$\begin{aligned}\|G_u(s) - G_u(t)\| &= \|g(s,u(s)) - g(t,u(t))\| \\ &= \|g(s)u(s) - g(t)u(t) + g(t)u(s) - g(t)u(s)\| \\ &\leqslant \|(g(s)-g(t))u(s)\| + \|g(t)(u(t)-u(s))\|.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|S'(t-s)[G_u(s) - G_u(t)]\|\,\mathrm{d}s \\ &\leq M_1 \int_0^t \frac{\|(g(s)-g(t))u(s)\| + \|g(t)(u(t)-u(s))\|}{t-s}\,\mathrm{d}s \\ &\leq M_1\left([|g|]_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C(X)} + \|g\|_{C(\mathcal{L}(X))}[|u|]_{C^\alpha(X)}\right)\int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{t-s}\,\mathrm{d}s \\ &\leq M_1\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}\frac{b_1^\alpha}{\alpha}.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $s \mapsto S'(t-s)(G_u(s) - G_u(t))$ est intégrable sur $[0,t]$ pour tout $t \in [0,b_1]$ et que

$$t \mapsto \int_0^t S'(t-s)[G_u(s) - G_u(t)]\; ds \in C([0,b_1];X).$$

De même, d'après le Lemme 2.4, nous avons également que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|S'(t-s)\,[F_u(s)-F_u(t)]\|\,\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^t \|S'(t-s)\|\|f(\cdot,u(\cdot))\|_{C^\alpha(X)}\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}(1+b_1^\alpha)(t-s)^\alpha \mathrm{d}s \\
&\le M_1\|f(\cdot,u(\cdot))\|_{C^\alpha(X)}\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}(1+b_1^\alpha)\int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{t-s}\,\mathrm{d}s \\
&\le M_1\|f(\cdot,u(\cdot))\|_{C^\alpha(X)}\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}(1+b_1^\alpha)\frac{b_1^\alpha}{\alpha}.
\end{aligned}$$

D'où

$$t \mapsto \int_0^t S'(t-s)\,[F_u(s)-F_u(t)]\;ds \in C([0,b_1];X).$$

Donc $\Gamma u \in C([0,b_1];X)$. De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
&\|S(t)\,(G_u(t)-x_0)\| \\
&\leqslant M_0\,\|g\,(0,x_0)-g(t,u(t))\| \\
&\leqslant M_0\,\|g(0)x_0-g(t)u(t)+g(0)u(t)-g(0)u(t)\| \\
&\leqslant M_0\,\|g(0)\,(x_0-u(t))\|+M_0\|u(t)(g(0)-g(t))\| \\
&\leqslant M_0\|g\|_{C(\mathcal{L}(X))}[|u|]_{C^\alpha(x)}b_1^\alpha+M_0\|u\|_{C(X)}[|g|]_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}b_1^\alpha \\
&\leqslant M_0\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}b_1^\alpha
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|S(t)F_u(t)\| \leqslant & M_0\,\|F_u(t)\| \\
\leqslant & \frac{M_0}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{\|f(s,u(s)\|}{(t-s)^{1-\alpha}}ds \\
\leqslant & \frac{M_0}{\Gamma(\alpha)}\|f\|_{C(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C(X)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
\leqslant & \frac{M_0}{\alpha\Gamma(\alpha)}b_1^\alpha\|f\|_{C(\mathcal{L}(X))}\cdot\|u\|_{C(X)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma u\|_{C(X)} \leq & \int_0^t \|S'(t-s)\,[G_u(s)-G_u(t)]\|\,\mathrm{d}s + \int_0^t \|S'(t-s)\,[F_u(s)-F_u(t)]\|\,\mathrm{d}s \\
& + \|S(t)\,(G_u(t)-x_0)\,\| + \|S(t)x_0\| + \|S(t)F_u(t)\| \\
& \leq M_1\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}\frac{b_1^\alpha}{\alpha} \\
& + M_1\|f(\cdot,u(\cdot))\|_{C^\alpha(X)}\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}(1+b_1^\alpha)\frac{b_1^\alpha}{\alpha} \\
& + M_0\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}b_1^\alpha + \|S(\cdot)x_0\|_{C(X)} + \frac{M_0}{\alpha\Gamma(\alpha)}b_1^\alpha\|f\|_{C(\mathcal{L}(X))}\cdot\|u\|_{C(X)} \\
& \leq \left(M_0b_1^\alpha + M_1\frac{b_1^\alpha}{\alpha}\right)\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)} + \|S(\cdot)x_0\|_{C(X)} \\
& + \left(\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)}\frac{b_1^\alpha}{\alpha} + M_1\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}(1+b_1^\alpha)\frac{b_1^\alpha}{\alpha}\right)\|f\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}.
\end{aligned}
$$

Maintenant, nous prouvons que $\Gamma_i u \in C^\alpha([0,b_1];X)$.
En utilisant la propriété
$\ln\left(\frac{t+h}{h}\right) \leq \frac{h^\alpha}{\alpha}$ pour tout $t>0$ et $h>0$, pour $t\in[0,b_1)$ et $h>0$ tels que $t+h\in[0,b_1]$, nous avons

$$
\begin{aligned}
& \|\Gamma_1u(t+h)-\Gamma_1u(t)\| \\
& = \left\| S(t+h)\,(G_u(t+h)-x_0) + \int_0^{t+h} S'(t+h-s)\,[G_u(s)-G_u(t+h)]\,\mathrm{d}s \right. \\
& \left. + S(t+h)x_0 - S(t)\,(G_u(t)-x_0) - \int_0^t S'(t-s)\,[G_u(s)-G_u(t)]\,\mathrm{d}s - S(t)x_0 \right\| \\
& \leq \|S(t+h)\,(G_u(t+h)-x_0) - S(t)\,(G_u(t)-x_0) + S(t+h)G_u(t) - S(t+h)G_u(t)\| \\
& + \left\| \int_0^{t+h} S'(t+h-s)\,[G_u(s)-G_u(t+h)]\,\mathrm{d}s - \int_0^t S'(t-s)\,[G_u(s)-G_u(t)]\,\mathrm{d}s \right\| \\
& + \|S(t+h)x_0 - S(t)x_0\|.
\end{aligned}
$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\|S(t+h)\left(G_u(t+h)-x_0\right)-S(t)\left(G_u(t)-x_0\right)+S(t+h)G_u(t)-S(t+h)G_u(t)\| \\
&\leq \|(S(t+h)-S(t))(G_u(t)-x_0)\|+\|S(t+h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|G_u(t+h)-G_u(t)\| \\
&\leq \int_t^{t+h}\|S'(\tau)(G_u(t)-x_0)\|\,\mathrm{d}\tau+M_0\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}h^\alpha \\
&\leq M_1\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}\int_t^{t+h}\frac{\tau^\alpha}{\tau}\mathrm{d}\tau+M_0\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}h^\alpha \\
&\leq M_1\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}\frac{[\tau^\alpha]_t^{t+h}}{\alpha}+M_0\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}h^\alpha \\
&\leq M_1\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}\frac{h^\alpha}{\alpha}+M_0\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}h^\alpha,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t+h}S'(t+h-s)\left[G_u(s)-G_u(t+h)\right]\mathrm{d}s-\int_0^t S'(t-s)\left[G_u(s)-G_u(t)\right]\mathrm{d}s \\
&=\int_t^{t+h}S'(t+h-s)\left[G_u(s)-G_u(t+h)\right]\mathrm{d}s \\
&+\int_0^t S'(t+h-s)\left[G_u(s)-G_u(t+h)\right]-S'(t-s)\left[G_u(s)-G_u(t)\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

On pose $s=t-r$, d'où

$$\begin{aligned}
&\int_0^t S'(t+h-s)\left[G_u(s)-G_u(t+h)\right]-S'(t-s)\left[G_u(s)-G_u(t)\right]\mathrm{d}s \\
&=\int_0^t S'(r+h)\left[G_u(t-r)-G_u(t+h)\right]-S'(r)\left[G_u(t-r)-G_u(t)\right] \\
&+S'(r+h)G_u(t)-S'(r+h)G_u(t)\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

En remplaçant r par s, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t+h}S'(t+h-s)\left[G_u(s)-G_u(t+h)\right]\mathrm{d}s-\int_0^t S'(t-s)\left[G_u(s)-G_u(t)\right]\mathrm{d}s \\
&=\int_t^{t+h}S'(t+h-s)\left[G_u(s)-G_u(t+h)\right]\mathrm{d}s \\
&+\int_0^t S'(h+s)-S'(s)\left[G_u(t-s)-G_u(t)\right]\mathrm{d}s \\
&+\int_0^t S'(h+s)\left[G_u(t)-G_u(t+h)\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^{t+h} S'(t+h-s)\left[G_u(s)-G_u(t+h)\right]\mathrm{d}s - \int_0^{t} S'(t-s)\left[G_u(s)-G_u(t)\right]\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \int_t^{t+h} \left\|S'(t+h-\tau)\right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\|G_u(\tau)-G_u(t+h)\right\|\mathrm{d}\tau \\
&+ \int_0^{t} \left\|S'(h+\tau)-S'(\tau)\right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\|G_u(t-\tau)-G_u(t)\right\|\mathrm{d}\tau \\
&+ \int_0^{t} \left\|S'(h+\tau)\right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\|G_u(t)-G_u(t+h)\right\|\mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_t^{t+h} \left\|S'(t+h-\tau)\right\|_{\mathcal{L}(X)} \|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}(t+h-\tau)^\alpha \mathrm{d}\tau \\
&+ \int_0^{t}\int_\tau^{\tau+h} \left\|S''(\xi)\right\|_{\mathcal{L}(X)} \|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}\tau^\alpha \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\
&+ \|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}h^\alpha \int_0^{t} \left\|S'(h+\tau)\right\|_{\mathcal{L}(X)}\mathrm{d}\tau \\
&\leq M_1\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)} \int_t^{t+h} \frac{\mathrm{d}\tau}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}} \\
&+ M_2\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)} \int_0^{t}\int_\tau^{\tau+h} \frac{1}{\xi^{2-\alpha}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\
&+ \|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}h^\alpha M_1 \ln\left(\frac{t+h}{h}\right) \\
&\leq M_1\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}\frac{h^\alpha}{\alpha} \\
&+ M_2\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\left((t+h)^\alpha-h^\alpha-t^\alpha\right) \\
&+ \|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}h^\alpha M_1\frac{h^\alpha}{\alpha} \\
&\leq M_1\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}\frac{h^\alpha}{\alpha} \\
&+ M_2\|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}\frac{h^\alpha}{\alpha(1-\alpha)} \\
&+ \|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}h^\alpha M_1\frac{b_1^\alpha}{\alpha}
\end{aligned}$$

et

$$\|S(t+h)x_0 - S(t)x_0\| \leq [|S(\cdot)x_0|]_{C^\alpha(X)}h^\alpha.$$

Ainsi

$$[|\Gamma_1 u|]_{C^\alpha(X)} \leq \|g\|_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}\left(M_1\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{b_1^\alpha}{\alpha}\right)+M_0+\frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right)+[|S(\cdot)x_0|]_{C^\alpha(X)}.$$

En utilisant le Lemme 2.4 et en procédant comme précédemment, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma_2 u(t+h)-\Gamma_2 u(t)\| \\
&\leq \|(S(t+h)-S(t))(F_u(t))\| \\
&+\|S(t+h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|F_u(t+h)-F_u(t)\| \\
&+\int_t^{t+h}\|S'(t+h-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\|F_u(\tau)-F_u(t+h)\|\,\mathrm{d}\tau \\
&+\int_0^t\|S'(h+\tau)-S'(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\|F_u(t-\tau)-F_u(t)\|\,\mathrm{d}\tau \\
&+\int_0^t\|S'(h+\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\|F_u(t)-F_u(t+h)\|\,\mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_t^{t+h}\|S'(\tau)F_u(t)\|\,\mathrm{d}\tau+M_0[|F_u|]_{C^\alpha(X)}h^\alpha \\
&+\int_t^{t+h}\|S'(t+h-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}[|F_u|]_{C^\alpha(X)}(t+h-\tau)^\alpha\mathrm{d}\tau \\
&+\int_0^t\int_\tau^{\tau+h}\|S''(\xi)\|_{\mathcal{L}(X)}[|F_u|]_{C^\alpha(X)}\tau^\alpha\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+[|F_u|]_{C^\alpha(X)}h^\alpha\int_0^t\|S'(h+\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\,\mathrm{d}\tau \\
&\leq M_1[|F_u|]_{C^\alpha(X)}\int_t^{t+h}\frac{\tau^\alpha}{\tau}\mathrm{d}\tau+M_0[|F_u|]_{C^\alpha(X)}h^\alpha+M_1[|F_u|]_{C^\alpha(X)}\int_t^{t+h}\frac{\mathrm{d}\tau}{(t+h-\tau)^{1-\alpha}} \\
&+M_2[|F_u|]_{C^\alpha(X)}\int_0^t\int_\tau^{\tau+h}\frac{1}{\xi^{2-\alpha}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+[|F_u|]_{C^\alpha(X)}h^\alpha M_1\ln\left(\frac{t+h}{h}\right) \\
&\leq M_1[|F_u|]_{C^\alpha(X)}\frac{h^\alpha}{\alpha}+M_0[|F_u|]_{C^\alpha(X)}h^\alpha+M_1[|F_u|]_{C^\alpha(\mathcal{L}(X))}\|u\|_{C^\alpha(X)}\frac{h^\alpha}{\alpha} \\
&+M_2[|F_u|]_{C^\alpha(X)}\frac{h^\alpha}{\alpha(1-\alpha)}+[|F_u|]_{C^\alpha(X)}h^\alpha M_1\frac{b_1^\alpha}{\alpha}.
\end{aligned}$$

D'où

$$[|\Gamma_2 u|]_{C^\alpha(X)} \leq \|f(\cdot,u(\cdot))\|_{C^\alpha(X)}\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(1+b^\alpha\right)\left(M_1\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{b_1^\alpha}{\alpha}\right)+M_0+\frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right).$$

Donc

$$[|\Gamma u|]_{C^\alpha(X)} \leq [|\Gamma_1 u|]_{C^\alpha(X)}+[|\Gamma_2 u|]_{C^\alpha(X)}.$$

Ce qui implique que $\Gamma u \in C^{\alpha}([0,b_1];X)$. De plus, en notant que $f(t)$ et $g(t)$ sont linéaires pour tout $t \in [0,b_1]$, alors

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma u - \Gamma v\|_{C^{\alpha}(X)} \\
&= \|\Gamma(u-v) - S(t)x_0\|_{C^{\alpha}(X)} \\
&= \|\Gamma_1(u-v) - S(t)x_0 + \Gamma_2(u-v)\|_{C^{\alpha}(X)} \\
&= \|\Gamma(u-v) - S(t)x_0\|_{C(X)} + [|\Gamma_1(u-v) - S(t)x_0 + \Gamma_2(u-v)|]_{C^{\alpha}(X)} \\
&\leq \|\Gamma(u-v) - S(t)x_0\|_{C(X)} + [|\Gamma_1(u-v) - S(t)x_0|] + [|\Gamma_2(u-v)|]_{C^{\alpha}(X)} \\
&\leq \left(M_0 b_1^{\alpha} + M_1 \frac{b_1^{\alpha}}{\alpha}\right) \|g\|_{C^{\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u-v\|_{C^{\alpha}(X)} \\
&+ \left(\frac{M_0}{\Gamma(\alpha)} \frac{b_1^{\alpha}}{\alpha} + M_1 \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}(1+b_1^{\alpha})\frac{b_1^{\alpha}}{\alpha}\right) \|f\|_{C^{\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u-v\|_{C^{\alpha}(X)} \\
&+ \|g\|_{C^{\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u-v\|_{C^{\alpha}(X)} \left(M_1 \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{b_1^{\alpha}}{\alpha}\right) + M_0 + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right) \\
&+ \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}(1+b^{\alpha}) \left(M_1 \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{b_1^{\alpha}}{\alpha}\right) + M_0 + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right) \|f\|_{C^{\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u-v\|_{C^{\alpha}(X)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma u - \Gamma v\|_{C^{\alpha}(X)} \\
&\leq \left[M_0 + \frac{2M_1}{\alpha} + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha} + \Lambda(g,b_1)\right] \|g\|_{C^{\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u-v\|_{C^{\alpha}(X)} \\
&+ \left[\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left(M_0 + \frac{2M_1}{\alpha} + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right) + \Lambda(f,b_1)\right] \|f\|_{C^{\alpha}(\mathcal{L}(X))} \|u-v\|_{C^{\alpha}(X)},
\end{aligned}$$

pour tout $u, v \in C^{\alpha}([0,b_1];X)$.

Maintenant, à partir du choix de b_1, on déduit qu'il existe un point fixe unique de Γ, qui, d'après le Lemme 2.1(b), est une solution intégrale (mild solution) du problème (2.1)-(2.2) sur l'intervalle $[0,b_1]$. $\square$

Chapitre 3

Étude d'une équation différentielle abstraite neutre non autonome d'ordre fractionnaire avec arguments déviés

3.1 Position du problème

Ce chapitre représente une synthèse des résultats obtenus dans l'article de M. Malik et al. [7], intitulé :

"Existence and uniqueness of soultions of fractional order nonautonomous neutral differential equations with deviated argument"

En utilisant une approche basée sur la théorie des opérateurs résolvants d'une équation intégrale et le théorème du point de Banach, nous établissons des résultats d'existence et d'unicité des solutions de ce type d'equations équations. Plus précisément, nous étudionss l'équation différentielle neutre non-autonome d'ordre fractionnaire $\alpha \in (0, 1]$ dans un espace de Banach X :

$$D_t^\alpha(u(t) + g(t, u(a(t)))) = A(t)u(t) + f(t, u(t), u(h(t, u(t)))), \tag{3.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.2}$$

où

— D^α est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo,

— $a(t) \leq t, \forall t > 0$,

— $A(t)$ et une famille d'opérateurs fermés à domaine dense dans X,

— f, g et h sont des fonctions non linéaires vérifiant certaines hypothèses à donner après.

Nous notons $A = A(0)$ et supposons que $0 \in \rho(A)$.

Motivés par le travail présenté au chapitre 2 (de Hernández et al.) et en utilisant la même méthode, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution intégrale (mild solution) du problème (3.1)-(3.2).

Soit $C([0, T_0], X)$ l'espace de toutes les fonctions continues $\psi : J = [0, T_0] \to X$; muni de la norme du sup, c'est un espace de Banach. Nous définissons un autre ensemble :

$$C_L(J, X) = \{\psi \in C(J, X) : \|\psi(t) - \psi(s)\| \leq L|t - s|, \forall t, s \in J\},$$

où L est une constante positive appropriée.

Pour prouver l'existence d'une solution intégrale du problème (3.1)-(3.2), nous avons besoin des **hypothèses suivantes** :

(A1) $f : J \times X \times X \to X$ est une fonction continue et il existe $L_f \in C([0, T], \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)\| \leq L_f(t) (\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|)$$

pour tout x_1, x_2, y_1 et $y_2 \in X$;

(A2) $g : J \times X \to X$ est une fonction continue et il existe $L_g \in C([0, T], \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\|g(t, x_1) - g(s, x_2)\| \leq L_g(t) (|t - s| + \|x_1 - x_2\|)$$

pour tout $x_1, x_2 \in X$;

(A3) $h : X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfait la condition Lipschitz

$$|h(s, x_1) - h(s, x_2)| \leq L_h \|x_1 - x_2\|$$

(A4) $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfait la condition

$$|a(t) - a(s)| \leq L_a|t - s|.$$

3.2 Existence des solutions

Pour obtenir la forme de la solution du problème (3.1)-(3.2), nous définissons la fonction $A_v^* : [0, T_0] \to X$ par $A_v^*(t) = A(t)v(t) - Av(t)$ (voir [11]). De plus, supposons qu'il existe

$L_A \in C([0,T],\mathbb{R}^+)$ tel que

$$\|A_u^*(t) - A_v^*(t)\| \leq L_A(t)\|u - v\| \quad \text{pour tout } u, v \in X.$$

Notons

$$\widehat{A}_v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A_v^*(s)\mathrm{d}s.$$

Définissons également

$$F_u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s), u(h(s, u(s))))\mathrm{d}s.$$

En appliquant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α aux deux côtés du problème (3.1)-(3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&u(t) + g(t, u(a(t))) \\
&\quad = u_0 + g(0, u(a(0))) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A(s)u(s)\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s), u(h(s, u(s))))\mathrm{d}s \\
&\quad = u_0 + g(0, u(a(0))) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(A_u^*(s) + Au(s)\right)\mathrm{d}s + F_u(t) \\
&\quad = u_0 + g(0, u(a(0))) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A_u^*(s)\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s)\mathrm{d}s + F_u(t) \\
&\quad = u_0 + g(0, u(a(0))) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s)\mathrm{d}s + \widehat{A}_u(t) + F_u(t)
\end{aligned}$$

pour chaque $t \in [0, T_0]$.

Par conséquent, nous obtenons

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s)\mathrm{d}s + \widehat{A}_u(t) + F_u(t) - g(t, u(a(t))) + u_0 + g(0, u(a(0))).$$

Nous utilisons la notation G_u pour la fonction $G_u : [0, T_0] \to X$ donnée par

$$G_u(t) = u_0 + g(0, u(a(0))) - g(t, u(a(t))).$$

En incorporant ces notations, nous obtenons la forme suivante

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s)\mathrm{d}s + \widehat{A}_u(t) + F_u(t) + G_u(t).$$

Définition 3.1 *Une fonction continue* $u \in C([0, T_0], X)$ *est appelée solution intégrale (mild solution) du problème (3.1)-(3.2) sur l'intervalle* $[0, T_0]$*, avec* $0 < T_0 \leq T$*, si*

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) \mathrm{d}s \in D(A)$$

pour chaque $t \in [0, T_0]$ *et si* u *satisfait l'équation intégrale*

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} A \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) \mathrm{d}s + \widehat{A}_u(t) + F_u(t) + G_u(t).$$

Théorème 3.1 *Supposons que* $A_u^*, f(\cdot, u(\cdot), u(h(\cdot, u(\cdot)))) \in C([0,T], [D(A)])$*,* $g \in C([0,T] \times X, [D(A)])$ *et que la fonction* $L_g \in C([0,T], \mathbb{R}^+)$ *est telle que* $L_g(0) < 1$ *et*

$$\|g(t,x) - g(t,y)\|_{[D(A)]} \leq L_g(t) \|x - y\|$$

pour tout $t \in [0,T], x, y \in X$*. Alors il existe une solution intégrale (mild solution) unique du problème (3.1)-(3.2) sur l'intervalle* $[0, T_0]$ *pour un certain* $0 < T_0 \leq T$*, si les hypothèses (A1)-(A4) sont satisfaites.*

Démonstration. Puisque $L_g(0) < 1$, $|L_g|_{C([0,T_1],\mathbb{R}^+)} \to L_g(0)$ et $\|\phi_A\|_{L^1([0,T_1],\mathbb{R}^+)} \to 0$ lorsque $T_1 \to 0$, il existe $0 < T_0 \leq T$ tel que

$$\mu = \left(|L_g|_C + \frac{(2 + L \cdot L_h) |L_f|_C}{\alpha \Gamma(\alpha)} T_0^\alpha + \frac{|L_A|_C}{\alpha \Gamma(\alpha)} T_0^\alpha \right) \left(1 + \|\phi_A\|_{L^1([0,T_0],\mathbb{R}^+)} \right) < 1.$$

De la partie (c) du Lemme 2.1, nous avons

$$u(t) = \int_0^t \mathcal{S}'(t-s) \left[\widehat{A}_u(s) + F_u(s) + G_u(s) \right] \mathrm{d}s + \widehat{A}_u(t) + F_u(t) + G_u(t).$$

Maintenant, nous introduisons l'application $\mathcal{F} : C_L([0, T_0], X) \to C_L([0, T_0], X)$ définie par la formule

$$\mathcal{F}u(t) = \int_0^t \mathcal{S}'(t-s) \left[\widehat{A}_u(s) + F_u(s) + G_u(s) \right] \mathrm{d}s + \widehat{A}_u(t) + F_u(t) + G_u(t).$$

Il est facile de déduire que (la preuve est identique à celle de Théorème 2.2, voir chapitre 2)

$$\widehat{A}_u + F_u + G_u \in C([0,T], [D(A)]).$$

Nous observons que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left\| \mathcal{S}'(t-s)\left[\widehat{A}_u(s)+F_u(s)+G_u(s)\right]\right\| \mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \phi_A(t-s)\left\|\left[\widehat{A}_u(s)+F_u(s)+G_u(s)\right]\right\|_{D(A)} \mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \phi_A(t-s)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}\left\|A_u^*(\tau)\right\|_{D(A)} \mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \phi_A(t-s)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau,u(\tau),u[h(\tau,u(\tau))])\|_{D(A)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \\
&+ \|G_u\|_C\int_0^t \phi_A(t-s)\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|A_u^*\|_C\int_0^t \phi_A(t-s)\frac{s^\alpha}{\alpha}\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|f\|_C\int_0^t \phi_A(t-s)\frac{s^\alpha}{\alpha}\mathrm{d}s \\
&+ \|G_u\|_C\|\phi_A\|_{L^1} \\
&\leq \left(\|A_u^*\|_C\frac{T_0^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}+\|f\|_C\frac{T_0^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}+\|G_u\|_C\right)\|\phi_A\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Cela montre que la fonction $s \mapsto \mathcal{S}'(t-s)\left[\widehat{A}_u(s)+F_u(s)+G_u(s)\right]$ est intégrable et que $\mathcal{F}u \in C([0,T_0],X)$. Montrons que $\mathcal{F}u \in C_L([0,T_0],X)$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}A_u^*(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}A_u^*(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (t-\tau)^{\alpha-1}-(s-\tau)^{\alpha-1}A_u^*(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}A_u^*(\tau)\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\widehat{A}_u(s)-\widehat{A}_u(t)\| &\leq \|\widehat{A}_u(s)-\widehat{A}_u(t)\|_{[D(A)]} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (t-\tau)^{\alpha-1}-(s-\tau)^{\alpha-1}\|A_u^*(\tau)\|_{[D(A)]}\mathrm{d}\tau \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|A_u^*(\tau)\|_{[D(A)]}\mathrm{d}\tau \\
&\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|A_u^*\|_C\left(\int_0^s (t-\tau)^{\alpha-1}-(s-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau+\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau\right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|A_u^*\|_C|t^\alpha-s^\alpha|.
\end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis $\exists c \in]s,t[$

$$|t^\alpha-s^\alpha| \leq \alpha\ c^{\alpha-1}|t-s|.$$

D'où

$$\|\widehat{A}_u(s) - \widehat{A}_u(t)\| \leq \frac{c^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|A_u^*\|_C \, |t-s|.$$

Donc

$$\|F_u(s) - F_u(t)\| \leq \| \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|f\|_C \, |t^\alpha - s^\alpha| \leq \frac{c^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|f\|_C \, |t-s|,$$

et

$$\begin{aligned}
\|G_u(s) - G_u(t)\| &\leq \|G_u(s) - G_u(t)\|_{[D(A)]} \\
&\leq \|g(t, u(a(t))) - g(s, u(a(s)))\|_{[D(A)]} \\
&\leq L_g(t) \left(|s-t| + \|u(a(s)) - u(a(t))\|\right) \\
&\leq L_g(t) \left(|s-t| + L|a(s) - a(t)|\right) \\
&\leq L_g(t) \|u(a(s)) - u(a(t))\| \\
&\leq |L_g(t)|_C (1 + LL_a)|s-t|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\|G_u(s) + F_u(s) + \widehat{A}_u(s) - \widehat{A}_u(t) - F_u(t) - G_u(t)\| \\
&\leq \left(|L_g(t)|_C (1 + LL_a) + \frac{c^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|f\|_C + \frac{c^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|A_u^*\|_C \right) |s-t|.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{F}u \in C_L\left([0, T_0], X\right)$ (voir [7]).

D'autre part, pour tous $u, v \in C_L\left([0, T_0], X\right)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\| \widehat{A}_u(t) - \widehat{A}_v(t) \right\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} \left\| \left(A_u^*(\tau) - A_v^*(\tau)\right) \right\| \mathrm{d}\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} L_A(\tau) \|u - v\| \mathrm{d}\tau \\
&\leq \frac{|L_A|_C}{\alpha\Gamma(\alpha)} T_0^\alpha \|u - v\|_C
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\|F_u(t) - F_v(t)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} \|(f(\tau, u(\tau), u[h(\tau, u(\tau)])) - f(\tau, v(\tau), v[h(\tau, v(\tau))]))\| \mathrm{d}\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} L_f(t) \left(\|u(\tau) - v(\tau)\| + \|u[h(\tau, u(\tau)] - v[h(\tau, v(\tau))]\|\right) \mathrm{d}\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} L_f(t)(\|u(\tau) - v(\tau)\| + \|u[h(\tau, u(\tau)] - v[h(\tau, v(\tau))] \\
&+ u[h(\tau, v(\tau))] - u[h(\tau, v(\tau))]\|)\mathrm{d}\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} L_f(t)(2\|u - v\|_C + \|u[h(\tau, u(\tau)] - u[h(t, v(t))]\|)\mathrm{d}\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} L_f(t)(2\|u - v\|_C + L\|h(\tau, u(\tau) - h(\tau, v(\tau))\|)\mathrm{d}\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} L_f(t)(2\|u - v\|_C + LL_h\|u - v\|_C)\mathrm{d}\tau \\
&\leq \frac{(2 + LL_h)\left|L_f\right|_C}{\alpha\Gamma(\alpha)} T_0^\alpha \|u - v\|_C
\end{aligned}$$

et

$$\|G_u(t) - G_v(t)\| \leq \left|L_g\right|_C \|u - v\|_C.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\|(\mathcal{F}u)(t)-(\mathcal{F}v)(t)\| \\
&\leq \left\|\widehat{A}_u(t)-\widehat{A}_v(t)\right\|+\|F_u(t)-F_v(t)\|+\|G_u(t)-G_v(t)\| \\
&+\int_0^t\left\|\mathcal{S}'(t-s)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}\left(A_u^*(\tau)-A_v^*(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right\|\mathrm{d}s \\
&+\int_0^t\|\mathcal{S}'(t-s)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}(f(\tau,u(\tau),u[h(\tau,u(\tau)]))\\
&-f(\tau,v(\tau),v[h(\tau,v(\tau))]))\mathrm{d}\tau\|\mathrm{d}s \\
&+\int_0^t\|\mathcal{S}'(t-s)\left(G_u(s)-G_v(s)\right)\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{|L_A|_C}{\alpha\Gamma(\alpha)}T_0^\alpha\|u-v\|_C+\frac{(2+LL_h)\,|L_f|_C}{\alpha\Gamma(\alpha)}T_0^\alpha\|u-v\|_C \\
&+|L_g|_C\,\|u-v\|_C+\int_0^t\phi_A(t-s)\mathrm{d}s\frac{|L_A|_C}{\alpha\Gamma(\alpha)}T_0^\alpha\|u-v\|_C \\
&+\int_0^t\phi_A(t-s)\mathrm{d}s\frac{(2+LL_h)\,|L_f|_C}{\alpha\Gamma(\alpha)}T_0^\alpha\|u-v\|_C \\
&+\int_0^t\phi_A(t-s)\mathrm{d}s\,|L_g|_C\,\|u-v\|_C \\
&\leq \mu\|u-v\|_C.
\end{aligned}
$$

D'après le théorème du point fixe de Banach, il existe un unique point fixe $u(\cdot)$ de l'application $\mathcal{F}$. Ainsi, $u(\cdot)$ est une solution intégrale (mild solution) du problème (3.1)-(3.2). $\square$

Lemme 3.1 *Supposons que $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ et $u\in C(J,X)$. Alors, $F_u\in C^{1-\alpha}(J,X)$ et*

$$[|F_u|]_{C^{1-\alpha}([0,T_0],X)}\leq\frac{T_0^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right)\|f(\cdot,u(\cdot),u(h(\cdot,u(\cdot))))\|_{C([0,T_0],X)}.$$

Démonstration. Pour $t \in [0, T_0)$ et $h_1 > 0$ tel que $t + h_1 \in [0, T_0]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|F_u(t+h_1) - F_u(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[-\frac{1}{(t+h_1-s)^{1-\alpha}} + \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}} \right] \|f\|_X \, \mathrm{d}s \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t+h_1} \frac{\|f\|_X}{(t+h_1-s)^{1-\alpha}} \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(\frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}} \frac{h_1^{1-\alpha}}{(t-s)^{1-\alpha}} \right) \|f\|_X \, \mathrm{d}s \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t+h_1} \frac{\|f\|_X}{(t+h_1-s)^{1-\alpha}} \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f(\cdot, u(\cdot), u(h(\cdot, u(\cdot))))\|_C h_1^{1-\alpha} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{2(1-\alpha)}} \mathrm{d}s \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f(\cdot, u(\cdot), u(h(\cdot, u(\cdot))))\|_C \int_t^{t+h_1} \frac{1}{(t+h_1-s)^{1-\alpha}} \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|F_u(t+h_1) - F_u(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f(\cdot, u(\cdot), u(h(\cdot, u(\cdot))))\|_C \left(h_1^{1-\alpha} \frac{T_0^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + \frac{h_1^{\alpha}}{\alpha} \right) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f(\cdot, u(\cdot), u(h(\cdot, u(\cdot))))\|_C \left(\frac{T_0^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + \frac{T_0^{2\alpha-1}}{\alpha} \right) h_1^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Donc

$$[|F_u|]_{C^{1-\alpha}([0,T_0],X)} \leq \frac{T_0^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha} \right) \|f(\cdot, u(\cdot), u(h(\cdot, u(\cdot))))\|_C.$$

$\square$

Lemme 3.2 *Supposons que $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $u \in C(J, X)$. Alors, $\widehat{A}_u \in C^{1-\alpha}(J, X)$ et*

$$\left[\left|\widehat{A}_u\right|\right]_{C^{1-\alpha}([0,T_0],X)} \leq \frac{T_0^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha} \right) \|A_u^*\|_{C([0,T_0],X)}.$$

Théorème 3.2 *Supposons que $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $f \in C\left(J_1, L(X)\right)$, $g \in C^{1-\alpha}\left(J_1, L(X)\right)$ et $\mathcal{S}(\cdot)u_0 \in C^{1-\alpha}([0,T], X)$, où $J_1 = [0, T]$. S'il existe $0 < T_0 \leq T$ tel que*

$$\left(M_0 + \frac{2M_1}{1-\alpha} + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha} \right) \|g\|_{C^{1-\alpha}}\left([0, T_0], L(X)\right) < 1,$$

alors il existe une unique solution intégrale (mild solution) du problème (3.1)-(3.2) sur l'intervalle $[0, T_1]$ pour $0 < T_1 < T_0$.

Démonstration. Nous choisissons un T_0 approprié tel que $0 < T_1 < T_0$ et

$$\begin{aligned}
&\left(M_0 + \frac{2M_1}{1-\alpha} + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha} + \lambda(g, T_1)\right) \|g\|_{C^{1-\alpha}([0,T_1],L(X))} \\
&+ \left(\frac{M_0 T_1^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{M_1 T_1^\alpha}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right) + \lambda(f, T_1)\right) \|f\|_{C(L(X))} \\
&+ \left(\frac{M_0 T_1^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{M_1 T_1^\alpha}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right) + \lambda(A_u^*, T_1)\right) \|A_u^*\|_{C(L(X))} < 1,
\end{aligned}$$

où $\lambda(g, T_1), \lambda(f, T_1)$ et $\lambda(A_u^*, T_1)$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
\lambda(g, T_1) &= \left(M_0 T_1^{1-\alpha} + M_1\left(\frac{T_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{T_1^\alpha}{\alpha}\right)\right), \\
\lambda(f, T_1) &= \frac{T_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(M_1\left(\frac{2}{1-\alpha} + \frac{T_1^\alpha}{\alpha}\right) + M_0 + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right), \\
\lambda(A_u^*, T_1) &= \frac{T_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(M_1\left(\frac{2}{1-\alpha} + \frac{T_1^\alpha}{\alpha}\right) + M_0 + \frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Nous définissons l'application $\mathcal{F} : C^{1-\alpha}([0, T_1], X) \to C^{1-\alpha}([0, T_1], X)$ par

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3,$$

où

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_1 u)(t) &= \mathcal{S}(t)(G_u(t) - u_0) + \int_0^t \mathcal{S}'(t-s)[G_u(s) - G_u(t)]\,\mathrm{d}s + \mathcal{S}(t)u_0, \\
(\mathcal{F}_2 u)(t) &= \mathcal{S}(t)F_u(t) + \int_0^t \mathcal{S}'(t-s)[F_u(s) - F_u(t)]\,\mathrm{d}s, \\
(\mathcal{F}_3 u)(t) &= \mathcal{S}(t)\widehat{A}_u(t) + \int_0^t \mathcal{S}'(t-s)\left[\widehat{A}_u(s) - \widehat{A}_u(t)\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Montrons que $\mathcal{F}$ est bien définie. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mathcal{S}'(t-s)[G_u(s) - G_u(t)]\,\mathrm{d}s \\
&\quad \le M_1 \int_0^t \frac{\|g(s, u(a(s))) - g(t, u(a(t)))\|}{t-s}\,\mathrm{d}s \\
&\quad \le M_1 \int_0^t \frac{\|(g(s) - g(t))u(a(t))\| + \|g(t)(u(a(t)) - u(a(s)))\|}{t-s}\,\mathrm{d}s \\
&\quad \le M_1\left([|g|]_{C^{1-\alpha}}\|u\|_C + \|g\|_C[|u|]_{C^{1-\alpha}}\right)\int_0^t \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{t-s}\,\mathrm{d}s \\
&\quad \le M_1 \|g\|_{C^\alpha L(X)}\|u\|_{C^\alpha(X)}\frac{(T_1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Cela montre que la fonction $s \mapsto \mathcal{S}'(t-s)\,[G_u(s) - G_u(t)]$ est intégrable sur l'intervalle $[0, T_1]$ et que

$$t \mapsto \int_0^t \mathcal{S}'(t-s)\,[G_u(s) - G_u(t)]\,\mathrm{d}s \in C\left([0, T_1], X\right).$$

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathcal{S}'(t-s)\,[F_u(s) - F_u(t)]\,\mathrm{d}s &\leq M_1 \|f\|_{C(X)} \frac{T_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right) \int_0^t \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{t-s}\,\mathrm{d}s \\ &\leq M_1 \|f\|_{C(L(X))} \|u\|_{C(X)} \frac{T_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{T_1^{1-\alpha}}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Cela montre que la fonction $s \mapsto \mathcal{S}'(t-s)\,[F_u(s) - F_u(t)]$ est intégrable sur l'intervalle $[0, T_1]$ et que

$$t \mapsto \int_0^t \mathcal{S}'(t-s)\,[F_u(s) - F_u(t)]\,\mathrm{d}s \in C\left([0, T_1], X\right).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathcal{S}'(t-s) \left[\widehat{A}_u(s) - \widehat{A}_u(t)\right] \mathrm{d}s &\leq M_1 \left\|A_u^*\right\|_{C(X)} \frac{T_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right) \int_0^t \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{t-s}\,\mathrm{d}s \\ &\leq M_1 \left\|A_u^*\right\|_{C(L(X))} \|u\|_{C(X)} \frac{T_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{T_1^{1-\alpha}}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

D'où

$$t \mapsto \int_0^t \mathcal{S}'(t-s) \left[\widehat{A}_u(s) - \widehat{A}_u(t)\right] \mathrm{d}s \in C\left([0, T_1], X\right).$$

Par conséquent, $\mathcal{F} \in C\left([0, T_1], X\right)$.
Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}u\|_{C(X)} \leq& \left(M_0 T_1^{1-\alpha} + M_1 \frac{T_1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \|g\|_{C^\alpha L(X)} \|u\|_{C^\alpha(X)} + \|\mathcal{S}(\cdot)u_0\|_{C(X)} \\ &+ \left(M_0 \frac{T_1^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + M_1 \frac{T_1^\alpha}{\Gamma(\alpha)(1-\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right)\right) \|f\|_{C(L(X))} \|u\|_{C(X)} \\ &+ \left(M_0 \frac{T_1^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + M_1 \frac{T_1^\alpha}{\Gamma(\alpha)(1-\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\right)\right) \left\|A_u^*\right\|_{C(L(X))} \|u\|_{C(X)}.\end{aligned}$$

Montrons que

$$\mathcal{F}_i \in C^{1-\alpha}\left([0, T_1], X\right), i = 1, 2, 3.$$

En prenant $\ln\left(\frac{t+h_1}{h_1}\right) \leq \frac{h_1^\alpha}{\alpha}$ pour tous $t \in [0, T_1)$ et $t + h_1 \in [0, T_1]$, où $h_1 > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\| (\mathcal{F}_1 u)(t+h_1) - (\mathcal{F}_1 u)(t) \| \\
&\leq \| (\mathcal{S}(t+h_1) - \mathcal{S}(t)) (G_u(t) - u_0) \| \\
&+ \|\mathcal{S}(t+h_1)\|_{L(X)} \|(G_u(t+h_1) - G_u(t))\| \\
&+ \int_t^{t+h_1} \|\mathcal{S}'(t+h_1-s)\|_{L(X)} \|(G_u(s) - G_u(t+h_1))\| \,\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \|\mathcal{S}'(h_1+s) - \mathcal{S}'(s)\|_{L(X)} \|(G_u(t+s) - G_u(t))\| \,\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \|\mathcal{S}'(h_1+s)\|_{L(X)} \|G_u(t) - G_u(t+h_1)\| \,\mathrm{d}s + \|\mathcal{S}' u_0\|_{C^{1-\alpha}(X)} h_1^{1-\alpha} \\
&+ \int_0^t \|\mathcal{S}'(h_1+s) - \mathcal{S}'(s)\|_{L(X)} \|(G_u(t+s) - G_u(t))\| \,\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \|\mathcal{S}'(h_1+s)\|_{L(X)} \|G_u(t) - G_u(t+h_1)\| \,\mathrm{d}s + \|\mathcal{S}' u_0\|_{C^{1-\alpha}(X)} h_1^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\| (\mathcal{F}_1 u)(t+h_1) - (\mathcal{F}_1 u)(t) \| \\
&\quad \leq \int_t^{t+h_1} \|\mathcal{S}'(s)(G_u(t) - u_0)\| \,\mathrm{d}s + M_0 \|g\|_{C^{1-\alpha}(L(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} h_1^{1-\alpha} \\
&\quad + \int_t^{t+h_1} \|\mathcal{S}'(t+h_1-s)\| \|g\|_{C^{1-\alpha}(L(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} (t+h_1-s)^{1-\alpha} \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \int_t^{t+h_1} \|\mathcal{S}''(\eta)\|_{L(X)} \|g\|_{C^{1-\alpha}(L(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} (s)^{1-\alpha} \mathrm{d}\eta \mathrm{d}s \\
&\quad + \|g\|_{C^{1-\alpha}(L(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} h_1^{1-\alpha} \int_0^t \|\mathcal{S}'(h_1+s)\| \,\mathrm{d}s + \|\mathcal{S}' u_0\| h_1^{1-\alpha} \\
&\quad \leq M_1 \|g\|_{C^{1-\alpha}(L(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}} \int_t^{t+h_1} \frac{s^{1-\alpha}}{s} \,\mathrm{d}s \\
&\quad + M_0 \|g\|_{C^{1-\alpha}(L(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} h_1^{1-\alpha} \\
&\quad + M_1 \|g\|_{C^{1-\alpha}(L(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} \int_t^{t+h_1} \frac{\mathrm{d}s}{(t+h_1-s)^\alpha} \\
&\quad + M_2 \|g\|_{C^{1-\alpha}(L(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} \int_0^t \int_s^{s+h_1} \frac{1}{\eta^{1+\alpha}} \mathrm{d}\eta \mathrm{d}s \\
&\quad + \|g\|_{C^{1-\alpha}(L(X))} \|u\|_{C^{1-\alpha}(X)} h_1^{1-\alpha} M_1 \ln\left(\frac{t+h_1}{h_1}\right) \\
&\quad + \|\mathcal{S}' u_0\|_{C^{1-\alpha}(X)} h_1^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{F}_1 u)(t+h_1)-(\mathcal{F}_1 u)(t)\| \\
&\qquad \leq \left[\|g\|_{C^{1-\alpha}(L(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}\left(M_1\left(\frac{2}{1-\alpha}+\frac{T_1^\alpha}{\alpha}\right)+M_0+\frac{M_2}{\alpha(1-\alpha)}\right)\right. \\
&\qquad \left. +\|\mathcal{S}'u_0\|_{C^{1-\alpha}(X)}\right] h_1^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}
&[|\mathcal{F}_1 u|]_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&\quad \leq \|g\|_{C^{1-\alpha}(L(X))}\|u\|_{C^{1-\alpha}(X)}\left(M_1\left(\frac{2}{1-\alpha}+\frac{T_1^\alpha}{\alpha}\right)+M_0+\frac{M_2}{\alpha(1-\alpha)}\right) \\
&\quad +\|\mathcal{S}'u_0\|_{C^{1-\alpha}(X)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[|\ \mathcal{F}_2 u]_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&\quad \leq \frac{T_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right)\|f\|_{C(L(X))}\|u\|_{C(X)}\left(M_1\left(\frac{2}{1-\alpha}+\frac{T_1^\alpha}{\alpha}\right)\right), \\
&\quad +M_0+\frac{M_2}{\alpha(1-\alpha)}\Bigg)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&[|\mathcal{F}_3 u|]_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&\quad \leq \frac{T_1^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right)\|A_u^*\|_{C(L(X))}\|u\|_{C(X)}\left(M_1\left(\frac{2}{1-\alpha}+\frac{T_1^\alpha}{\alpha}\right)\right. \\
&\quad \left. +M_0+\frac{M_2}{\alpha(1-\alpha)}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}u \in C^{1-\alpha}([0,T_1],X)$.

En utilisant les inégalités ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{F}u-\mathcal{F}v\| \\
&\quad \leq \left[M_0+\frac{2M_1}{1-\alpha}+\frac{M_2}{(1-\alpha)\alpha}+\lambda(g,T_1)\right]\|g\|_{C^{1-\alpha}(L(X))}\|u-v\|_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&\quad + \left[\frac{M_0T_1^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}+\frac{M_1T_1^\alpha}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right)+\lambda(f,T_1)\right]\|f\|_{C(L(X))}\|u-v\|_{C^{1-\alpha}(X)} \\
&\quad + \left[\frac{M_0T_1^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}+\frac{M_1T_1^\alpha}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right)+\lambda(A_u^*,T_1)\right]\|A_u^*\|_{C(L(X))}\|u-v\|_{C^{1-\alpha}(X)}.
\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{F}$ est une application contractante.

Donc, par le théorème du point fixe de Banach, $\mathcal{F}$ a un point fixe unique. $\square$

3.2.1 Exemple d'application

Nous allons présenter un exemple d'application des résultats abstraits obtenus : Soit l'espace de Banach $X = L^2(0,1)$. Nous considérons les équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire avec argument dévié :

$$\partial_t^\alpha \left[w(t,x) + f_1(t, w(a(t),x))\right] - m(t)\partial_x^2 w(t,x) = f_2(x, w(t,x)) + f_3(t,x,w(t,x)), \qquad (3.3)$$

$$w(t,0) = w(t,1) = 0, \quad t \in [0,T], \quad 0 < T < \infty, \qquad (3.4)$$

$$w(0,x) = u_0, \quad x \in (0,1), \qquad (3.5)$$

où

$$f_2(x, w(t,x)) = \int_0^x K(x,s) w\left(s, h_0(t)\left(a_1|w(s,t)| + b_1\left|w_s(s,t)\right|\right)\right) \mathrm{d}s,$$

pour plus de détails, voir [5]. De plus, nous supposons que $a_1, b_1 \geq 0, (a_1, b_1) \neq (0,0), h_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est localement continue en t avec $h_0(0) = 0$ et $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Nous définissons l'opérateur A comme suit :

$$A(t)u = m(t)u'' \quad \text{avec} \quad u \in D(A) = \left\{u \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1) : u'' \in X\right\}.$$

Nous pouvons choisir $m(t)$ tel que $m(0) = 1$. Ainsi, $A(0) = A$, qui est auto-adjoint avec un résolvant compact et est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $S(t)$ tel que $S(t)u = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\left(u, \phi_n\right)\phi_n$, où $\phi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, n = 1, 2, 3, ...$

— Le problème **(3.3)**-**(3.5)** peut être reformulé sous **la forme abstraite** suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}[u(t) + g(t, u(a(t)))] = A(t)u(t) + f(t, u(t), u[h(u(t),t)]), \quad t > 0, \qquad (3.6)$$

$$u(0) = u_0, \qquad (3.7)$$

où $u(t) = w(t,\cdot)$, c'est-à-dire $u(t)(x) = w(t,x), x \in (0,1)$.

— La fonction $g : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ est telle que $g(t, u(a(t)))(x) = f_1(t, w(a(t),x))$.

— L'opérateur A est le même que dans la formule (3.3).

— La fonction $f : \mathbb{R}^+ \times X \times X \to X$ est définie par

$$f(t, \psi, \xi)(x) = f_2(x, \xi) + f_3(t, x, \psi),$$

où $f_2 : [0, 1] \times X \to H_0^1(0, 1)$ est définie par

$$f_2(t, \xi) = \int_0^x K(x, y)\xi(y)\mathrm{d}y. \tag{3.8}$$

et $f_3 : \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \times H^2(0, 1) \to H_0^1(0, 1)$ vérifie :

$$\|f_3(t, x, \psi)\| \leq Q(x, t)\left(1 + \|\psi\|_{H^2(0,1)}\right) \tag{3.9}$$

avec $Q(\cdot, t) \in X$. La fonction h est définie par

$$h(t, u(t, x)) = h_0(t)\left(a_1|u(t, x)| + b_1\left|u_x(t, x)\right|\right). \tag{3.10}$$

avec $Q(\cdot, t) \in X$ et Q est continue en son second argument, pour plus de détails, voir [5]. Pour la fonction a, nous pouvons prendre :

— (i) $a(t) = kt$, où $t \in [0, T]$ et $0 < k \leq 1$,

— (ii) $a(t) = kt^n$ pour $t \in I = [0, 1], k \in (0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

— (iii) $a(t) = k \sin t$ pour $t \in I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $k \in (0, 1]$.

Les hypothèses $(A1) - (A4)$ sont vérifiées. Donc le problème abstrait fractionnaire (3.6)-(3.7) admet une solution intégrale unique.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude des équations différentielles abstraites d'ordre fractionnaire dans un espace de Banach.
Dans le cas autonome, nous avons retravaillé l'article des auteurs Hernandez et al. intitulé :

"On recent developments in the theory of abstract differential equations with fractional derivatives".

Dans le cas non autonome, nous avons présenté l'étude fait dans l'article des M. Malik et al. intitulé :

"Existence and uniqueness of soultions of fractional order nonautonomous neutral differential equations with deviated argument".

La méthode utilisée dans ces deux travaux est basée sur la théorie des opérateurs résolvants, les équations intégrales et le théorème du point fixe de Banach. Nous avons montré l'existence et l'unicité des solutions intégrales pour ces équations fractionnaires.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Belmekki, M. Benchohra, *A survey on semilinear differential equations and inclusions involving Riemann-Liouville fractional derivative,* Adv. Difference Equ. (2009) 47. Art. ID 981728.

[2] G. A. Anastassiou, *Strong right fractional calculus for Banach space valued functions*, University of Memphis, U.S.A.Vol. 36, No 1, pp. 149-186, 2017.

[3] O. Belhamiti, *Etude dans les espaces de Hölder de problèmes aux limites et de transmission dans un domaine avec couche mince*, Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université du Havre, 2008.

[4] J. Droniou, *Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles*, 2001. hal-01382368v2. https ://hal.science/hal-01382368v2.

[5] *C. G. Gal, Nonlinear abstract differential equations with deviated argument*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 333 (2007), no. 2, 971-983.

[6] E. Hernández, D. O'Regan, K. Balachandran, *On recent developments in the theory of abstract differential equations with fractional derivatives*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications 73 (2010), no. 10, 3462-3471.

[7] M. Malik, S. Abbas, A. Kumar, *Existence and uniqueness of soultions of fractional order nonautonomous neutral differential equations with deviated argument*, J. Nonl. Evol. Equ. Appl. 2017 (2018), 81-93.

[8] A. J. Mikusinski, *The Bochner integral, Academic Press*, New-York, 1978.

[9] A. pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[10] J. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*, Monographs in Mathematics 87, Birkhauser Verlag, Basel, 1993.

[11] M. Pierri, D. O'Regan, *On non-autonomous abstract nonlinear fractional differential equations*, Applicable Analysis , 94 (2015), no. 5, 879-890.

[12] M.H.M. Rashid, Y. El-Qaderi, *Semilinear fractional integro-differential equations with compact semigroup*, Nonlinear Anal. 71 (12)(2009), 6276-6282.