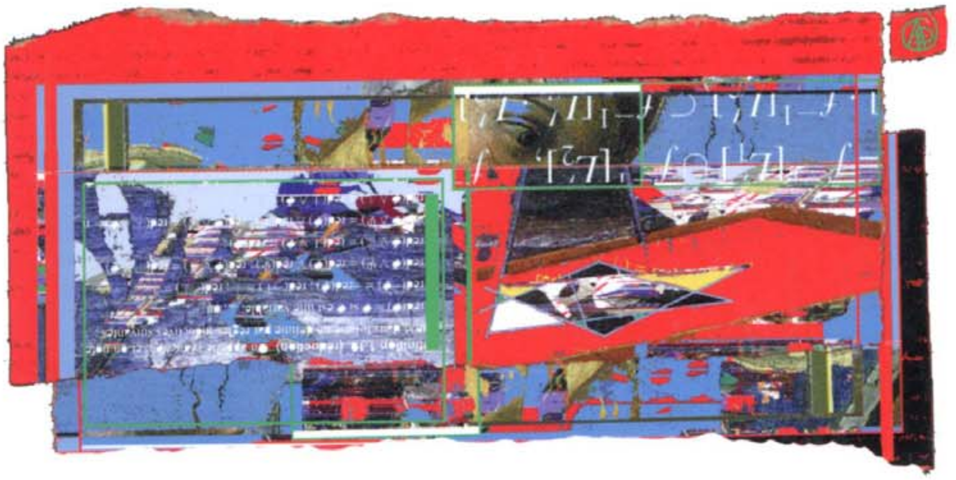
Patrick Dehornoy

LICENCE • MAÎTRISE • AGRÉGATION

Mathématiques de l'informatique

Cours et exercices corrigés



DUNOD

Table des matières

AVANT-PROPOS XI

CHAPITRE 1 • MOTS, LANGAGES ET ARBRES 1

1.1 Le type mot 1

1.1.1 Mots 2

1.1.2 Concaténation 3

1.1.3 Monoïdes 4

1.1.4 Ordre préfixe 6

1.2 Le type langage 7

1.2.1 Opérations sur les langages 8

1.2.2 Homomorphismes 10

1.2.3 Notion de langage décidable 11

1.3 Le type arbre 12

1.3.1 Ordres et graphes 12

1.3.2 Arbres 15

1.3.3 Arbres et graphes 17

1.3.4 Niveaux et branches 19

1.3.5 Parcours d'arbres 21

CHAPITRE 2 • **MONOÏDES ET GROUPES LIBRES** 23

2.1 Structures libres 23
- 2.1.1 Variétés équationnelles 24
- 2.1.2 Sous-structure engendrée par une partie 25
- 2.1.3 Familles libres 26
- 2.1.4 Bases 27
- 2.1.5 Congruences et quotients 29

2.2 Monoïdes libres 32
- 2.2.1 Familles génératrices 32
- 2.2.2 Familles libres 33
- 2.2.3 Bases 33
- 2.2.4 Congruences 34
- 2.2.5 Présentations 35

2.3 Groupes libres 36
- 2.3.1 Construction des groupes libres 37
- 2.3.2 Présentations de groupes 40

CHAPITRE 3 • **AUTOMATES** 47

3.1 Automates 47
- 3.1.1 La notion d'automate 47
- 3.1.2 Langages automatiques 51

3.2 Construction d'automates 52
- 3.2.1 Construction directe 52
- 3.2.2 Opérations booléennes 54
- 3.2.3 Homomorphismes 56

3.3 Extensions de la notion d'automate 57
- 3.3.1 Automates non déterministes 57
- 3.3.2 Epsilon-transitions 62

CHAPITRE 4 • **LANGAGES AUTOMATIQUES** 69

4.1 L'automate minimal d'un langage 69
- 4.1.1 Minimalisation d'un automate 69
- 4.1.2 Classes à droite suivant un langage 75
- 4.1.3 Un exemple important 79
- 4.1.4 Applications 80

4.2 Expressions régulières 82
4.2.1 Propriétés de clôture 82
4.2.2 Le théorème de Kleene 83
4.2.3 Applications 85
4.2.4 Alphabet à un élément 86
4.3 Propriétés d'itération 87

CHAPITRE 5 • **GRAMMAIRES FORMELLES** 93
5.1 Réécriture et productions 93
5.1.1 Règles de réécriture 94
5.1.2 Productions 94
5.2 Construction de grammaires 97
5.2.1 Grammaires régulières 98
5.2.2 Quelques exemples 98
5.2.3 Systèmes d'équations dans les langages 100
5.2.4 Grammaires formelles comme modèles 103
5.2.5 Opérations sur les langages algébriques 104
5.3 Grammaires de formes particulières 105
5.3.1 Suppression des epsilon-productions 106
5.3.2 Suppression des productions-unité 108
5.3.3 Forme normale de Chomsky 110
5.3.4 Forme normale de Greibach 111

CHAPITRE 6 • **ARBRES DE DÉRIVATION ET AUTOMATES À PILE** 117
6.1 Arbres de dérivation 117
6.1.1 Arbres de dérivation 117
6.1.2 La propriété d'itération 121
6.1.3 Propriétés de non-clôture 123
6.2 Principe de l'analyse syntaxique 124
6.2.1 Analyse descendante 124
6.2.2 Tables d'analyse 126
6.3 Automates à pile 128
6.3.1 Automates à pile 129
6.3.2 Automates à pile déterministes 134

CHAPITRE 7 • **MACHINES DE TURING** 137

7.1 Machines de Turing 137

7.1.1 Notion générale de calcul 138

7.1.2 Machines de Turing pour un ruban 139

7.1.3 Ensemble décidé par une machine de Turing 142

7.2 Simulation entre machines de Turing 145

7.2.1 Machines de Turing pour plusieurs rubans 146

7.2.2 Simulation 150

7.3 Construction de machines de Turing 156

7.3.1 Fonctions MT-calculables 156

7.3.2 Représentation des entiers 159

7.3.3 Quelques exemples 160

7.3.4 Indépendance du choix de la base 163

7.3.5 Propriétés de clôture 164

7.3.6 Réels MT-calculables 165

CHAPITRE 8 • **FONCTIONS RÉCURSIVES** 171

8.1 Notion de fonction récursive 171

8.1.1 Définitions de fonctions 171

8.1.2 Calculabilité 175

8.1.3 Ensembles récursifs 176

8.2 Récursivité des fonctions MT-calculables 179

8.2.1 Fonctions usuelles 179

8.2.2 Récurrence multiple 180

8.2.3 Contrôle d'une machine de Turing 182

8.3 Deux contre-exemples 186

8.3.1 Le castor affairé 186

8.3.2 La fonction d'Ackermann 188

CHAPITRE 9 • **COMPLEXITÉ ALGORITHMIQUE** 197

9.1 La thèse de Church 197

9.1.1 Modèle de calcul 197

9.1.2 Classes de complexité 200

9.2 Machines de Turing non déterministes 203

9.2.1 Résolution et vérification 203

9.2.2 Complexité non déterministe 205

9.2.3 Le problème P = NP 206

9.3 Évaluation d'algorithmes 207
9.3.1 Algorithmes de tri 207
9.3.2 Multiplication des entiers 209
9.3.3 Calcul du pgcd 212
9.3.4 Multiplication des matrices 214

CHAPITRE 10 • **LOGIQUE BOOLÉENNE** 221

10.1 Formules et réalisations 221
10.1.1 Formules booléennes 222
10.1.2 Valeurs de vérité 223
10.1.3 Le théorème de compacité 227

10.2 Notion de preuve 228
10.2.1 Preuves par coupure 228
10.2.2 La méthode de résolution 231

10.3 Complexité du problème de satisfaisabilité 236
10.3.1 Le problème SAT 236
10.3.2 Problèmes NP-complets 239

CHAPITRE 11 • **LOGIQUE DU PREMIER ORDRE** 243

11.1 Calcul des prédicats 243
11.1.1 Termes et formules 243
11.1.2 Réalisations et satisfaction 246
11.1.3 Pouvoir d'expression 249

11.2 Théorèmes de complétude 252
11.2.1 Preuves 253
11.2.2 Applications 257
11.2.3 La méthode de résolution 259

11.3 Logique et complexité 262
11.3.1 Semidécidabilité 262
11.3.2 Indécidabilité 264
11.3.3 Incomplétude 265
11.3.4 Suites de Goodstein 266

SOLUTIONS DES EXERCICES 272

BIBLIOGRAPHIE 299

INDEX 301

SCIENCES SUP

Patrick Dehornoy

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Cours et exercices corrigés

Cet ouvrage, destiné en priorité aux étudiants de second cycle de mathématiques, intéressera également un public plus large : enseignants de mathématiques pratiquant l'informatique et désireux d'en approfondir les bases théoriques, étudiants ou ingénieurs en informatique intéressés par les aspects mathématiques de leur discipline.

Centré sur les notions de calcul et de définition, ce cours est une introduction à l'étude des structures mathématiques sous-jacentes à l'informatique. Les principaux développements concernent les automates, les langages algébriques, la calculabilité effective et la complexité des algorithmes, la logique booléenne et les logiques du premier ordre, dont les définitions et propriétés élémentaires usuelles sont exposées.

L'approche proposée est résolument mathématique et souligne une orientation générale tournée vers la théorie. Une attention spéciale a été portée à la rigueur et à la précision de la rédaction, en particulier dans les démonstrations.

Cent cinquante exercices d'application et de complément sont proposés, dont plus de la moitié avec un corrigé rédigé.

PATRICK DEHORNOY,

professeur à l'université de Caen, est un mathématicien de notoriété internationale. Il a publié plus de cinquante articles de recherche dans plusieurs domaines des mathématiques : théorie des ensembles, algèbre, topologie des tresses. Il a été lauréat du prix Ferran Sunyer i Balaguer en 1999.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE