

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DE BLIDA 1  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



## Mémoire de projet de Fin d'Étude

En vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Thème

**Méthode de déchargement appliquée aux  
problèmes de colorations injectives des graphes**

Présenté par : MANSOUR Hafsa

**Soutenu publiquement le 24/07/2019, devant le jury composé de :**

M. BENZITOUNI Radhia	Maitre assistante A	Président
M. RAMOUL Amina	Maitre de conférences B	Examinatrice
M. KERDJOUDJ Samia	Maitre de conférences B	Promotrice

Année Universitaire 2018-2019



# Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes très chères parents pour toute leurs éducation, leurs sacrifices, leurs amour, leur tendresse, leurs soutient tout au long des mes études et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.

Mes chères soeurs Asma, Soumia et Kaouther, pour leurs encouragements et leur soutien moral.

Mes chères frères, Abdellah et Idris, pour leurs appuis et leurs encouragements.

Toute ma famille pour leurs soutiens tout au long de mon parcours universitaire.

Mes amis et à tous ceux qui me connaissent et qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

# Remerciements

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à :

Allah qui m'a donné la volonté de réaliser ce travail.

Ma promotrice madame KERDJOUJ Samia, pour ses conseils, son aide, sa gentillesse, sa disponibilité à tous les instants ainsi que pour sa patience qui ont été d'un grand support moral afin de mener à terminer ce travail.

Madame BENZITOUNI Radhia, pour l'honneur et le plaisir qu'elle nous a fait en acceptant de présider ce jury.

Madame RAMOUL Amina, qui a bien voulu examiner ce mémoire et d'accepter à participer au jury.

Aux enseignants du Département de Mathématiques et plus particulièrement les enseignants de spécialité Recherche Opérationnelle.

# Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié la coloration injective des graphes en utilisant la méthode de déchargement. Après avoir expliqué le principe du raisonnement par déchargement, nous l'avons appliqué pour démontrer quelques propriétés des graphes planaires. Nous nous sommes par la suite intéressés à la recherche de l'indice chromatique injectif des graphes subcubiques de degré moyen maximum borné, ceci nous a permis de déduire une borne supérieure de l'indice chromatique des graphes planaires subcubiques de maille au moins 18.

**Mots clés :** graphe - graphe planaire - coloration injective - degré moyen maximum - méthode de déchargement.

# Abstract

In this work, we have studied the injective coloring of graphs by using the discharging method. After given the principle of the discharging method, we give some example to proof some structural properties of planar graphs. Next, we have considered the upper bound of the chromatic injective index of subcubic graph in term of maximum average degree, which give us an upper bound of the chromatic injectif index of subcubics planars graphs with the girth at least 18.

**Key words :** graph - planar graph - injective coloring - maximum average degree - discharging method.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions de bases</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Définitions et notations . . . . .	3
1.2.1 Graphe . . . . .	3
1.2.2 Adjacence et incidence . . . . .	4
1.2.3 Sous-graphes . . . . .	4
1.2.4 Degrés . . . . .	5
1.2.5 Chaîne, cycle et maille . . . . .	7
1.2.6 Connexité . . . . .	7
1.2.7 Distance et diamètre . . . . .	8
1.3 Quelques classes de graphes . . . . .	8
1.3.1 Graphe complet et clique . . . . .	8
1.3.2 Graphe biparti et biparti complet . . . . .	9
1.3.3 Arbre et forêt . . . . .	9
1.3.4 Graphe planaire . . . . .	10
1.3.5 Graphe complémentaire . . . . .	11
1.3.6 Graphe triangulé et non triangulé . . . . .	11
1.3.7 Graphe représentatif des arêtes . . . . .	12
1.3.8 Graphe subcubique . . . . .	12
1.4 Quelques notions de colorations . . . . .	13
1.4.1 Coloration propre des sommets d'un graphe . . . . .	13
1.4.2 Coloration propre des arêtes d'un graphe . . . . .	15
<b>2 Méthode de déchargement</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	17
2.2 Principe de la méthode de déchargement . . . . .	17
2.3 Exemples d'applications de la méthode de déchargement . . . . .	18

## TABLE DES MATIÈRES

---

2.3.1	Démonstration de la formule d'Euler en utilisant la méthode de déchargement . . . . .	21
2.3.2	Lemme structurel de Wernicke . . . . .	24
2.4	Méthode de déchargement appliquée aux problèmes de coloration . . . . .	25
2.4.1	Exemple d'application : coloration injective des sommets . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Coloration injective des arêtes</b>	<b>34</b>
3.1	Introduction . . . . .	34
3.2	Exemple d'application de la coloration injective des arêtes . . . . .	35
3.3	Indice chromatique injectif de quelques classes de graphe . . . . .	36
3.4	Coloration injective des graphes subcubiques . . . . .	38
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>43</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>



# Table des figures

<b>1</b>	<b>Notions de bases</b>	<b>3</b>
1.1	Graphe simple et graphe non simple . . . . .	4
1.2	Graphe et sous-graphe . . . . .	5
1.3	Prisme $P$ est d'ordre 6 et 3-régulier . . . . .	6
1.4	Graphe connexe et graphe non connexe . . . . .	8
1.5	Graphe complet . . . . .	9
1.6	Graphe biparti et biparti complet . . . . .	9
1.7	Arbre et forêt . . . . .	10
1.8	Représentation planaire du $K_4$ . . . . .	10
1.9	Graphe et son complémentaire . . . . .	11
1.10	Exemple de graphe triangulé et de graphe non triangulé . . . . .	12
1.11	Graphe et son graphe représentatif des arêtes . . . . .	12
1.12	Graphe subcubique . . . . .	13
1.13	Coloration propre des sommets d'un graphe $G$ . . . . .	14
1.14	Coloration propre des arêtes d'un graphe $G$ . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Méthode de déchargement</b>	<b>17</b>
2.1	Polyèdre convexe . . . . .	22
2.2	Assignment des poids . . . . .	22
2.3	Processus de déchargement . . . . .	23
2.4	Évaluation des nouveaux poids . . . . .	23
2.5	Coloration des sommets de $G$ . . . . .	26
2.6	Première configuration réductible . . . . .	28
2.7	Deuxième configuration réductible . . . . .	29
2.8	Troisième configuration réductible . . . . .	30
2.9	Quatrième configuration réductible . . . . .	31
2.10	Règle de déchargement ( $R1$ ) . . . . .	32

2.11	Règle de déchargement ( <i>R2</i> ) . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Coloration injective des arêtes</b>	<b>34</b>
3.1	Coloration des arêtes de $G$ . . . . .	35
3.2	Coloration injective d'un graphe et son graphe représentatif des arêtes . . . .	35
3.3	$\chi'_{inj}(G) \leq 2(\Delta - 1)^2 + 1$ . . . . .	36
3.4	5-coloration injective des arêtes du graphe petersen. . . . .	37
3.5	Configuration Faît 1 . . . . .	40
3.6	Configuration Faît 2 . . . . .	40
3.7	Configuration de la chaine $xvwy$ dans le graphe $H$ . . . . .	41

# Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes, elle représente un moyen très utile et efficace pour modéliser et résoudre beaucoup de problèmes pratiques dans plusieurs domaines. Par exemple, les problématiques de réseaux : électriques, informatiques, télécommunications et de transports. Elle est née en 1736 [16] quand Euler a démontré le problème des ponts de Koenigsberg, énoncé comme suit : "Peut-on traverser les 7 ponts de la ville Koenigsberg, en passant chaque pont une et une seule fois et de revenir au pont de départ?".

Euler a résolu ce problème en le modélisant à l'aide d'un graphe. Il a proposé de représenter les rives de cette ville par un ensemble de point (*appelé sommets*), reliés entre eux par des traits (*appelé arêtes*) lorsque deux rives ont un pont en commun. Trouver une solution à ce problème revient à chercher une chaîne qui passe par toutes les arêtes une et une seule fois.

Les problèmes de la coloration dans les graphes sont au coeur de la théorie des graphes. L'une des premières sources d'inspiration de la coloration, a été le problème des quatre couleurs posé par Francis Guthrie en 1852. Il consiste à répondre à la question suivante : "est-il possible de colorer toute carte de géographie avec quatre couleurs en respectant la condition que deux pays voisins ne soient pas recouverts par la même couleur?". En 1976 les chercheurs Appel, Haken et Koch [2, 3] ont proposé une solution à cette question à l'aide de l'ordinateur. Plus tard, Robertson, Sanders, Seymour et Thomas [23] ont obtenu une preuve plus simple et plus courte, mais toujours à l'aide de l'ordinateur. Bien que ce problème ait été résolu, il attire toujours de nombreux chercheurs, qui tentent de le résoudre mathématiquement sans l'aide d'ordinateurs.

Il existe de nombreux résultats sur plusieurs types de colorations elles sont définies par la coloration des éléments du graphe (sommets, arêtes,...), avec une ou plusieurs variantes. Pour plus d'information, nous pouvons citer l'ouvrage de Jensen et Toft [19], "Graph Coloring Problems", qui rassemble la plupart des résultats sur plusieurs types de colorations de graphes ainsi que de nombreuses questions ouvertes.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la *coloration injective des arêtes* en utilisant une méthode de raisonnement appelée "*méthode de déchargement*".

Dans le premier chapitre, nous présentons les définitions et les notions de base de la théorie des graphes qui nous seront nécessaires dans la suite. Nous présentons aussi des notions et certains résultats fondamentaux de la coloration propre des sommets et la coloration propre des arêtes.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons une technique de démonstration appelée "*méthode de déchargement*". Nous expliquons son principe puis nous l'appliquons à quelques propriétés des graphes planaires et aux problèmes de coloration injective des sommets.

Dans le troisième chapitre, nous abordons le problème de la coloration injective des arêtes. Une coloration injective des arêtes est une coloration des arêtes d'un graphe, telle que pour toutes trois arêtes consécutif  $e_1, e_2$  et  $e_3$  la couleur de l'arête  $e_1$  doit être différente de la couleur de l'arête  $e_3$ .

Nous terminons ce mémoire par une conclusion dans laquelle nous résumons tout ce que nous avons fait dans ce travail et proposons des perspectives de recherche.

# Chapitre 1

## Notions de bases

### 1.1 Introduction

Comme toute discipline, la théorie des graphes se distingue par son propre langage. Dans ce chapitre, nous présentons la terminologie et les concepts de bases utilisées en théorie des graphes. Ensuite, nous abordons les notions de la coloration propres des sommets et la coloration propres des arêtes. Nous donnons leurs définitions ainsi que certains résultats fondamentaux. Pour plus de détails, nous conseillons aux lecteurs de se référer aux ouvrages [5, 6, 7, 14, 19].

### 1.2 Définitions et notations

#### 1.2.1 Graphe

Un *graphe orienté* est un couple  $G = (V(G), A(G))$  où  $V(G)$  est un ensemble non vide de points dont les éléments sont appelés *sommets* et  $A(G)$  un ensemble des couples de sommets de  $V(G)$ , appelés *arcs*. On note habituellement un arc  $(u, v)$  par  $\vec{uv}$ .

Un *graphe non orienté* est un couple  $G = (V(G), E(G))$  où  $V(G)$  est un ensemble non vide de points dont les éléments sont appelés *sommets* et  $E(G)$  un ensemble des paires de sommets de  $G$ , appelées *arêtes*. On note habituellement une arête  $\{u, v\}$  par  $uv$ .

Si  $u = v$  alors l'arête  $uv$  est appelée *boucle*. Les arêtes qui ont les mêmes extrémités sont appelées *arêtes multiples*. Un graphe est dit *simple* s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Dans toute la suite, nous considérons seulement les graphes simples. Le nombre de sommets d'un graphe est appelé *l'ordre* du graphe et le nombre d'arête d'un graphe est appelé *la taille* du graphe.

**Exemple :** Le graphe  $G = (V(G), E(G))$  donné sur la Figure 1.1(a) est un graphe simple, ayant pour ensemble de sommets  $V(G) = \{x, u, v, w, y\}$  et pour ensemble des arêtes  $E(G) = \{xu, uv, vw, wy, yx, yu\}$ . Le graphe  $G = (V(G), E(G))$  est d'ordre  $|V(G)| = 5$  et de taille  $|E(G)| = 6$ .

Le graphe  $H = (V(H), E(H))$  donné sur la Figure 1.1(b) n'est pas un graphe simple, car il possède une boucle en  $x$  et une arête multiple  $uv$ .



FIGURE 1.1 – Graphe simple et graphe non simple

### 1.2.2 Adjacence et incidence

Deux sommets  $u$  et  $v$  d'un graphe  $G = (V, E)$  sont dit *adjacents* s'il existe une arête entre  $u$  et  $v$  dans  $G$ . Les sommets  $u$  et  $v$  sont appelés *extrémités* de l'arête  $uv$ .

On dit aussi que  $u$  et  $v$  sont *voisins* et que l'arête  $uv$  est *incidente* aux sommets  $u$  et  $v$ . L'ensemble des sommets adjacents à  $u$  est appelé le voisinage de  $u$ ; il sera noté par  $N_G(u)$  (ou  $N(u)$ ). Deux arêtes sont adjacentes si elles possèdent une extrémité commune.

**Exemple :** Dans la Figure 1.1(a) :

- Les voisins de  $x$  sont :  $N_G(x) = \{y, u\}$ .
- Les voisins de  $y$  sont :  $N_G(y) = \{x, u, w\}$

### 1.2.3 Sous-graphes

Soit  $G = (V(G), E(G))$  un graphe.

- Un graphe  $H = (V(H), E(H))$  est un *sous-graphe* de  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  et toutes les arêtes de  $E(H)$  ont leurs extrémités dans  $V(H)$ . On note  $H \subseteq G$ . (Voir l'exemple de la Figure 1.2(b) ).
- Un graphe  $G' = (V(G'), E(G'))$  est un *sous-graphe partiel* de  $G$  si  $V(G') = V(G)$  et  $E(G') \subseteq E(G)$ . (Voir l'exemple de la Figure 1.2(c)).

- Soit  $S$  un sous-ensemble non vide de  $V(G)$ . Le sous-graphe de  $G$  induit par  $S$ , noté  $G[S]$ , est le graphe défini comme suit :
  1.  $V(G[S]) = S$ .
  2. Toutes les arêtes de  $E(G)$  ayant leurs deux extrémités dans  $S$  sont également dans  $E(G[S])$ . Autrement dit  $E(G[S]) = \{uv \mid u, v \in S \text{ et } uv \in E(G)\}$ . (Voir l'exemple de la Figure 1.2(d)).
- Le sous-graphe de  $G$  obtenu en supprimant un sommet  $v$  et toutes les arêtes incidentes à ce dernier est noté  $G \setminus \{v\}$  (ou simplement  $G \setminus v$ ). (Voir l'exemple de la Figure 1.2(e)). De même, le sous-graphe de  $G$  obtenu en supprimant une arête  $uv$  est noté  $G \setminus \{uv\}$  (ou simplement  $G \setminus uv$ ). La suppression de l'arête  $uv$  n'implique pas la suppression des sommets  $u$  et  $v$ . (Voir l'exemple de la Figure 1.2(f)).

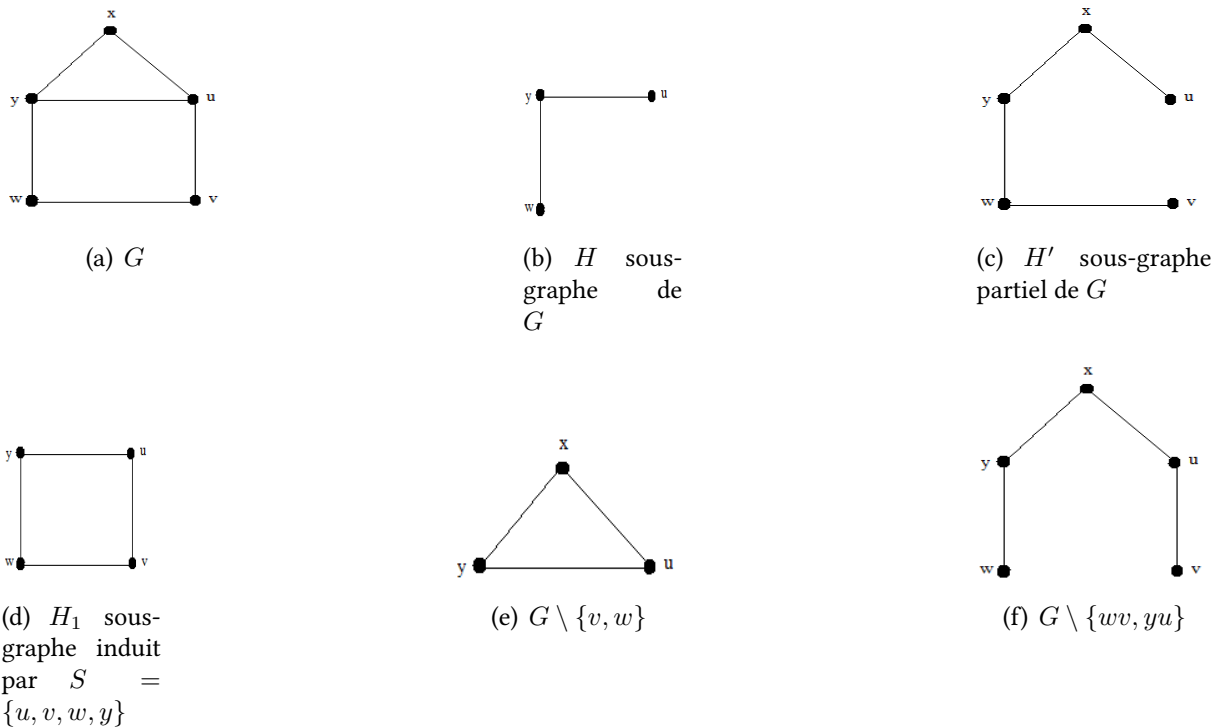


FIGURE 1.2 – Graphe et sous-graphe

### 1.2.4 Degrés

Soit  $G = (V(G), E(G))$  un graphe.

- Le degré d'un sommet  $u$  de  $G$ , noté  $d_G(u)$  (ou  $d(u)$ ), est égal au nombre de ses voisins, autrement dit  $d_G(u) = |N_G(u)|$ . Un sommet de degré  $k$  (respectivement au moins  $k$ , au plus  $k$ ) est noté  $k$ -sommet (respectivement  $k^+$ -sommet,  $k^-$ -sommet).  
Un sommet de degré 0 est dit *isolé*.

**Lemme des poignées de mains :** [16] Pour tout graphe  $G = (V(G), E(G))$  on a

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|.$$

On peut déduire que dans un graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

- *Le degré maximum* d'un graphe  $G$ , noté  $\Delta(G)$ , est le maximum des degrés des sommets de  $G$ . En d'autres termes,  $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v)$ .
- *le degré minimum* de  $G$ , noté  $\delta(G)$ , est le minimum des degrés des sommets de  $G$ . En d'autres termes,  $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d(v)$ .

**Exemple :** Dans le graphe  $G$  de la Figure 1.1(a) on a :

- Les degrés des sommets  $x, u, y, v$  et  $w$  sont :  $d_G(x) = 2, d_G(u) = 3, d_G(y) = 3, d_G(v) = 2$  et  $d_G(w) = 2$ .
- Le degré maximum de  $G$  est  $\Delta(G) = 3$ .
- Le degré minimum de  $G$  est  $\delta(G) = 2$ .

Un graphe  $G$  est dit *k-régulier* si tous ces sommets sont de degré  $k$ . En particulier, un graphe 3-régulier est appelé *cubique*.

**Exemple :** Le graphe  $P$  de la Figure 1.3 est un graphe cubique (3-régulier)

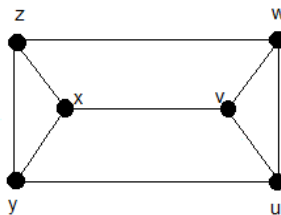


FIGURE 1.3 – Prisme  $P$  est d'ordre 6 et 3-régulier

- Le *degré moyen* de  $G$ , noté  $Ad(G)$ , est égal à  $\frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$ . D'après le lemme de poignées de mains  $Ad(G) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$  et pour tout graphe  $G$ , on a :

$$\delta(G) \leq Ad(G) \leq \Delta(G).$$

Le degré moyen d'un graphe  $G$  et le nombre de ses arêtes sont étroitement liés. En fait, nous avons la proposition suivante :



**Proposition 1.1.** [16] Soit  $G = (V(G), E(G))$  un graphe et  $Ad(G)$  son degré moyen, on a

$$|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \frac{|V(G)| Ad(G)}{2}.$$

- Le degré moyen maximum de  $G$ , noté  $mad(G)$ , est défini comme étant le maximum des degrés moyens  $Ad(H) = \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}$  pris sur tout les sous-graphe  $H$  de  $G$ . Autrement dit

$$mad(G) = \max\{Ad(H), H \subseteq G\}$$

### 1.2.5 Chaîne, cycle et maille

Une chaîne  $P_k$  dans un graphe  $G$  est une suite  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  de sommets telle que deux sommets consécutifs  $v_i$  et  $v_{i+1}$  sont reliés par une arête. Une chaîne qui ne contient pas deux fois le même sommet est dite *élémentaire*. La *longueur* d'une telle chaîne est le nombre des arêtes qui la compose.

Une chaîne hamiltonienne d'un graphe  $G$  est une chaîne qui passe par tous les sommets de  $G$  une et une seule fois.

Une chaîne eulérienne d'un graphe  $G$  est une chaîne qui passe par toutes les arêtes de  $G$  une et une seule fois.

Un cycle  $C_k$  est une chaîne élémentaire  $(u_0, u_1, \dots, u_k)$  où les extrémités sont confondues c-à-d :  $u_0 = u_k$ .

Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe par tous les sommets de  $G$  une et une seule fois.

Un cycle eulérien est un cycle qui passe par toutes les arêtes de  $G$  une et une seule fois.

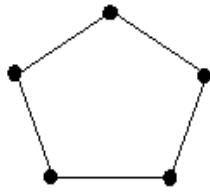
La maille d'un graphe  $G$ , notée  $g(G)$ , est la longueur d'un plus petit cycle contenu dans  $G$ .

### 1.2.6 Connexité

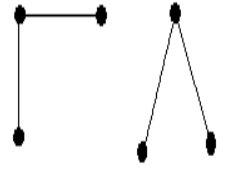
Un graphe  $G$  est dit *connexe* si pour toute paire  $u, v$  de sommets distincts, il existe une chaîne reliant  $u$  à  $v$ .

Une *composante connexe* d'un graphe  $G$  est un sous-graphe connexe maximal de  $G$ , c-à-d un sous-graphe tel que tout sous- graphe de  $G$  le contenant strictement n'est pas connexe.

**Exemple :** la Figure 1.4(a) représente un graphe connexe et la Figure 1.4(b) représente un graphe non connexe ayant deux composantes connexe.



(a) Graphe connexe



(b) Graphe non connexe

FIGURE 1.4 – Graphe connexe et graphe non connexe

**Théorème 1.2.** (Théorème d'Euler) [13]

- Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
- Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 (tous les sommets ont un degré pair).

### 1.2.7 Distance et diamètre

La *distance* entre deux sommets  $u$  et  $v$  d'un graphe  $G = (V, E)$ , notée  $dist_G(u, v)$  (ou  $dist(u, v)$ ), est la longueur d'une plus courte chaîne reliant  $u$  et  $v$ .

Le *diamètre* d'un graphe  $G = (V, E)$ , noté  $diam(G)$ , est la plus grande distance entre deux sommets quelconques de  $G$ , i.e  $diam(G) = \max_{x, y \in V(G)} \{dist_G(x, y)\}$ .

## 1.3 Quelques classes de graphes

### 1.3.1 Graphe complet et clique

Un graphe *complet* à  $n$  sommets, noté  $K_n$ , est un graphe tel que toute paire de sommets est reliée par une arête.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe.

Une *clique* d'un graphe  $G$  est un sous-ensemble des sommets de  $G$  dont le sous-graphe induit est complet.

Une *clique maximale* d'un graphe est une clique dont le cardinal est le plus grand (c'est-à-dire qu'elle possède le plus grand nombre de sommets).

On appelle *nombre de clique* d'un graphe  $G$ , noté  $\omega(G)$ , le cardinal de la plus grande clique de  $G$ .

**Exemple :** Le graphe de la Figure 1.5 est un graphe complet à 4 sommets, noté  $K_4$ .

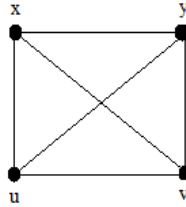


FIGURE 1.5 – Graphe complet

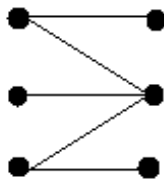
### 1.3.2 Graphe biparti et biparti complet

Un graphe est dit *biparti* s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles  $V_1$  et  $V_2$  telle que chaque arête ait une extrémité dans  $V_1$  et l'autre dans  $V_2$ .

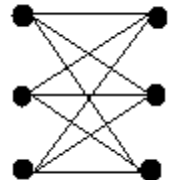
Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle de longueur impaire.

Un graphe biparti est dit complet si chaque sommet de  $V_1$  est relié à chaque sommet de  $V_2$ , on le note  $K_{|V_1|,|V_2|}$ .

**Exemple :** Le graphe  $G$  de la Figure 1.6(a) représente un graphe biparti et le graphe  $K_{3,3}$  de la Figure 1.6(b) représente un graphe biparti complet.



(a)  $G$



(b)  $K_{3,3}$

FIGURE 1.6 – Graphe biparti et biparti complet

### 1.3.3 Arbre et forêt

Un graphe ne contenant pas de cycle est dit *forêt*. Chaque composante connexe d'une forêt est appelé *arbre*. Les sommets de degré 1 d'une forêt sont appelés *feuilles*, les autres sont appelés sommets *internes*.

**Exemple :** Le graphe  $G$  de la Figure 1.7(a) représente un arbre et le graphe  $H$  de la Figure 1.7(b) représente une forêt.



FIGURE 1.7 – Arbre et forêt

### 1.3.4 Graphe planaire

Un graphe  $G$  est *planaire* s'il peut être représenté sur le plan de façon tel que deux arêtes ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités. (Voir l'exemple de la Figure 1.8)



FIGURE 1.8 – Représentation planaire du  $K_4$

Une *face*  $f$  de  $G$  est une région du plan bordée par un ensemble des arêtes de  $G$ . L'unique face infinie est la face *extérieure* de  $G$ . Les sommets et les arêtes sur la frontière de  $f$  sont dit incidents à  $f$ . Deux faces différentes incidentes à la même arête sont dites adjacentes.

Le *degré* d'une face  $f$ , noté  $d_G(f)$  (ou  $d(f)$ ), est le nombre des arêtes bordant  $f$ . L'*ensemble des faces* d'un graphe planaire  $G$  est noté  $F(G)$ .

**Exemple :** Le graphe de la Figure 1.8(b), a exactement 4 faces, elles sont toutes bordées par 3 arêtes, c'est-à-dire qu'elles sont toutes de degré 3 ( $\forall f \in F(G) ; d(f) = 3$ ).

Si nous plaçons un point à l'intérieur de chaque face d'un graphe  $G$  dessiné dans le plan et que, pour chaque paire de faces adjacentes suivant une arête  $e$ , nous relierons les points correspondants par une courbe traversant  $e$ , nous obtenons la représentation planaire d'un graphe appelé graphe dual  $G'$  de  $G$ .

**Lemme 1.3.** [8] *Pour tout graphe planaire  $G = (V(G), E(G), F(G))$ , on a :*

$$\sum_{f \in F(G)} d_G(f) = 2 |E(G)|.$$

De plus, il existe une formule simple établissant une relation entre le nombre des sommets, des arêtes et des faces d'un graphe planaire, établie par Euler en 1752 et connue sous le nom de *formule d'Euler* :

**Théorème 1.4.** [16] *Si  $G$  est un graphe planaire connexe,  $|V(G)|$  son nombre des sommets,  $|E(G)|$  son nombre des arêtes et  $|F(G)|$  son nombre des faces, alors :*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Étendue aux graphes non connexes, cette formule nous donne :

**Corollaire 1.5.** [16] *Pour tout graphe planaire  $G$  ayant  $k$  composantes connexes,*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = k + 1$$

### 1.3.5 Graphe complémentaire

Le graphe *complémentaire* d'un graphe simple  $G = (V(G), E(G))$  noté  $\bar{G} = (V(G), E(\bar{G}))$  est un graphe ayant le même ensemble de sommets que  $G$  et  $E(\bar{G})$  a exactement les paires de sommets qui ne sont pas des arêtes de  $G$ .

La Figure 1.9 représente un graphe  $G$  et son complémentaire  $\bar{G}$



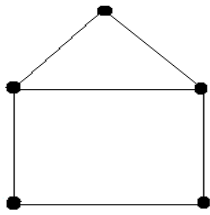
FIGURE 1.9 – Graphe et son complémentaire

### 1.3.6 Graphe triangulé et non triangulé

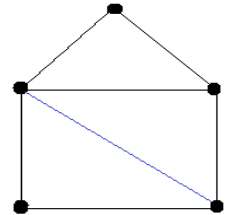
Une *corde* est une arête qui relie deux sommets non adjacents dans un cycle.

Un graphe  $G$  est *triangulé* si tout cycle dans  $G$  de longueur supérieure à 3 admet une *corde*.

**Exemple :** Le graphe de la Figure 1.10(a) n'est pas un graphe triangulé car il existe un cycle de longueur 4 qui n'admet pas de corde. Le graphe de la Figure 1.10(b) est un graphe triangulé



(a) Non triangulé



(b) Triangulé

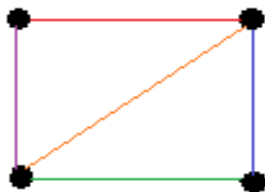
FIGURE 1.10 – Exemple de graphe triangulé et de graphe non triangulé

### 1.3.7 Graphe représentatif des arêtes

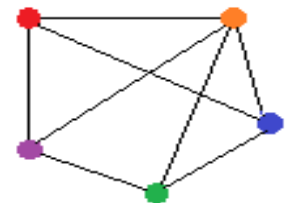
Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Le *graphe représentatif des arêtes* de  $G$  (en anglais *line graph*), noté  $L(G)$ , est le graphe défini de la façon suivante :

Chaque sommet de  $L(G)$  représente une arête de  $G$  et deux sommets de  $L(G)$  sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes ont une extrémité commune dans  $G$  (on dit alors qu'elles sont adjacentes).

**Exemple :** La Figure 1.11 représente un graphe  $G$  et son graphe représentatif des arêtes  $L(G)$ .



(a)  $G$



(b)  $L(G)$

FIGURE 1.11 – Graphe et son graphe représentatif des arêtes

### 1.3.8 Graphe subcubique

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. On dit que  $G$  est un graphe *subcubique*, si son degré maximum  $\Delta(G) \leq 3$ . (Voir l'exemple de la Figure 1.12).

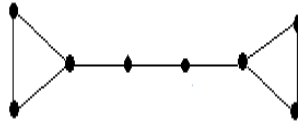


FIGURE 1.12 – Graphe subcubique

## 1.4 Quelques notions de colorations

Un des premiers problèmes de coloration de graphe est certainement le problème de quatre couleurs. Ce problème posé par Francis Guthrie en 1852, il consiste à répondre à la question suivante : " est-il possible de colorer toute carte de géographie avec quatre couleurs en respectant la condition que deux pays voisins ne soient pas recouverts par la même couleur ?". Mathématiquement et en théorie des graphes, ce problème consiste à répondre à la question suivante : "Peut-on colorer les sommets d'un graphe planaire en utilisant quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes ?".

### 1.4.1 Coloration propre des sommets d'un graphe

Une *k-coloration propre des sommets* d'un graphe  $G = (V(G), E(G))$  est une application  $c$  de l'ensemble des sommets  $V(G)$  dans l'ensemble des entiers de couleurs  $\{1, \dots, k\}$  de telle sorte que deux sommets adjacents dans  $G$  reçoivent des couleurs différentes, c-à-d, pour toute arête  $uv \in E(G)$ ,  $c(u) \neq c(v)$ .

Un graphe qui admet une *k-coloration* est dit *k-colorable*. Le *nombre chromatique* de  $G$ , noté  $\chi(G)$ , est le plus petit entier  $k$  telle que  $G$  admet une *k-coloration propre des sommets*.

**Exemple :** La Figure 1.13(a) représente une 5-coloration propre des sommets d'un graphe  $G$ , mais le nombre de couleur utilisé n'est pas minimum. Le nombre chromatique de  $G$  vérifie :  $3 \leq \chi(G)$ , car  $G$  contient  $C_3$  donc au moins 3 couleurs sont nécessaires pour colorer le graphe  $G$ . Comme il existe une coloration utilisant 3 couleurs (voir Figure 1.13(b)), alors  $\chi(G) \leq 3$ . On conclue que  $\chi(G) = 3$ .

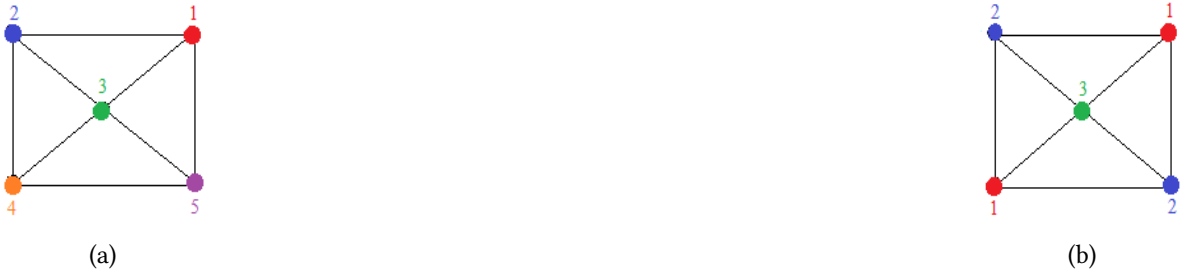


FIGURE 1.13 – Coloration propre des sommets d'un graphe  $G$

En 1941, Brooks [9] a proposé une majoration de  $\chi(G)$  en fonction de degré maximum  $\Delta(G)$ .

**Théorème 1.6.** [9] Soit  $G$  un graphe connexe. Si  $G$  n'est ni un cycle impair ni un graphe complet, alors on a :

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

De plus, si  $G$  est complet ou contient un cycle impair, alors

$$\chi(G) = \Delta(G) + 1.$$

**Théorème 1.7.** [9] Pour tout graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta(G)$  on a :

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Parmi les nombreux résultats du nombre chromatique, nous pouvons citer le théorème des quatre couleurs, démontrer par Appel et Haken à l'aide d'un ordinateur [1] :

**Théorème 1.8.** [1] Si  $G$  est un graphe planaire, alors  $\chi(G) \leq 4$ .

**Théorème 1.9.** [4] Soit  $G$  un graphe et  $\overline{G}$  le graphe complémentaire de  $G$ , on a :

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

Dans un graphe biparti  $G = (V_1 \cup V_2, E)$ , chaque arête doit joindre un sommet de  $V_1$  et un sommet de  $V_2$ , alors on peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème 1.10.** [29] Un graphe  $G$  est 2-colorable si et seulement si  $G$  est biparti.

La borne inférieure du nombre chromatique d'un graphe  $G$  implique le nombre chromatique de ses sous-graphes.

**Théorème 1.11.** [29] Si  $H$  est un sous-graphe d'un graphe  $G$ , alors  $\chi(H) \leq \chi(G)$ .



Une borne inférieure de  $\chi(G)$  est donnée en fonction de la taille maximum d'une clique  $\omega(G)$ . En effet, si  $G$  contient une  $k$ -clique alors d'après le théorème 1.11, il faut au moins  $k$  couleurs pour le colorer.

**Théorème 1.12.** [29] *Pour tout graphe  $G$  on a :  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .*

Pour plus d'information, nous conseillons aux lecteurs de se référer aux ouvrages [8, 27, 28, 29]

### 1.4.2 Coloration propre des arêtes d'un graphe

Une  $k$ -coloration propre des arêtes d'un graphe  $G = (V(G), E(G))$  est une application  $c$  de l'ensemble des arêtes  $E(G)$  dans l'ensemble des entiers de couleurs  $\{1, \dots, k\}$  telle que pour toutes arêtes adjacentes  $uv$  et  $vw \in E(G)$ ,  $c(uv) \neq c(vw)$ . L'indice chromatique de  $G$ , noté  $\chi'(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -coloration propre des arêtes. On peut remarquer que  $\chi'(G) = \chi(L(G))$ .

**Exemple :** La Figure 1.14(a) représente une 5-coloration propre des arêtes d'un graphe  $G$ , mais le nombre de couleur utilisé n'est pas minimum. L'indice chromatique de  $G$  vérifie :  $3 \leq \chi'(G)$ , car  $G$  contient  $C_3$  donc au moins 3 couleurs sont nécessaires pour colorier le graphe  $G$ , comme il existe une coloration utilisant 3 couleurs (voir Figure 1.14(b)), alors  $\chi'(G) \leq 3$ . On conclue que  $\chi'(G) = 3$ .



FIGURE 1.14 – Coloration propre des arêtes d'un graphe  $G$

Dans une coloration propre des arêtes, les arêtes incidentes à un même sommet doivent évidemment avoir toutes des couleurs différentes. Cette observation donne la borne inférieure de l'indice chromatique :

$$\chi'(G) \geq \Delta(G).$$

Le résultat le plus important portant sur l'indice chromatique est dû à vizing en 1964 :

**Théorème 1.13.** [25] *Pour tout graphe  $G$ , nous avons  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*

Le théorème de Vizing permet donc de classer les graphes en deux classes : les graphes ayant un indice chromatique égal à  $\Delta$ , dit de *classe 1*, (par exemple les graphes bipartis) et ceux ayant un indice chromatique égal à  $\Delta + 1$  dit de *classe 2* (par exemple les cycles impaires).

# Chapitre 2

## Méthode de déchargement

### 2.1 Introduction

Une des techniques de démonstration qui intervient et qui joue un rôle décisif dans les preuves du théorème des quatre couleurs est la *méthode de déchargement*. Cette méthode a été introduite pour la première fois par Werniche en 1904, afin de prouver une propriété structurelle des graphes planaires.

L'objectif principal de ce chapitre est de se familiariser avec la méthode de déchargement. Pour plus d'exemples d'applications nous renvoyons le lecteur aux références [11, 21, 18]

### 2.2 Principe de la méthode de déchargement

Le principe de la méthode de déchargement est le suivant :  
Supposons qu'on veuille montrer qu'une classe de graphe  $g$  a une propriété  $P$ . On procède par l'absurde. Soit  $G \subseteq g$  un contre exemple minimal de  $P$ , c-à-d,  $G$  ne satisfait pas la propriété  $P$ . Soit  $S$  un ensemble associé aux éléments de  $G$  (sommets, arêtes, faces, ...) :

1. On considère la fonction poids :

$$\omega : S \rightarrow \mathbb{R}$$

Autrement dit, on assigne à chaque élément  $a \in S$  un poids  $\omega(a)$  telle que la somme totale des poids vérifie une certaine propriété.

2. On définit des règles de déchargement appropriée, puis on effectue un processus de déchargement autours de  $S$  qui laisse le poids total fixe et inchangé. A la fin de cette étape, on obtient une nouvelle fonction poids  $\omega^*$  pour tout élément  $a \in S$ .

3. On calcule la nouvelle fonction poids  $\omega^*$  pour tout  $a \in S$ .

4. On montre la contradiction suivante  $\sum \omega(a) \neq \sum \omega^*(a)$ .

On déduit que le contre-exemple  $G$  ne peut pas exister. Par conséquent, la propriété  $P$  est vérifiée pour tout graphe dans  $g$ .

## 2.3 Exemples d'applications de la méthode de déchargement

Pour illustrer la méthode de déchargement, nous donnons quelques exemples de propriétés des graphes planaires.

Le premier exemple est celui donné dans la proposition suivante :

**Proposition 2.1.** *Tout graphe planaire a un sommet de degré au plus 5.*

**Démonstration.** Soit  $G = (V, E, F)$  un graphe planaire. D'après la formule d'Euler :

$$6m - 6n - 6f = -12 \iff 2m - 6n + 4m - 6f = -12 \quad (2.1)$$

où  $m$ ,  $n$  et  $f$  sont respectivement, le nombre d'arêtes, de sommets et de faces.

Comme  $\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{f \in F} d(f) = 2m$ , par substitution dans (2.1), on obtient :

$$\sum_{v \in V} d(v) - 6n + \sum_{f \in F} 2d(f) - 6f = -12$$

D'où :

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2d(f) - 6) = -12 \quad (2.2)$$

Soit la fonction poids  $\omega : V \cup F \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que :

$$\begin{cases} \forall v \in V; \omega(v) = d(v) - 6; \\ \forall f \in F; \omega(f) = 2d(f) - 6. \end{cases}$$

D'après l'équation (2.2), on a

$$\sum_{x \in V \cup F} \omega(x) = \sum_{v \in V} \omega(v) + \sum_{f \in F} \omega(f) = -12.$$

Comme le degré d'une face est au moins 3, alors  $\sum_{f \in F} \omega(f) \geq 0$ . On déduit alors qu'il existe au moins un sommet  $v \in V$  telle que  $d_G(v) \leq 5$ .

□

Un autre résultat classique qui lie le degré moyen maximum à la maille peut être vu comme un deuxième exemple d'application de la méthode de déchargement.

**Théorème 2.2.** *Si  $G = (V, E, F)$  est un graphe planaire de maille  $g$  et de degré moyen maximum  $mad(G)$ , alors  $mad(G) < \frac{2g}{g-2}$ .*

**Démonstration.** Étant donné que tout graphe sans cycle est de maille infinie et a un degré moyen inférieur à 2 alors, sans perte de généralité, on suppose que  $G$  possède au moins un cycle, par conséquent sa maille est finie.

Soit  $G$  un graphe planaire de maille  $g$ . La formule d'Euler peut être reformuler comme suit :

$$gm - gn - gf = -2g \iff 2m - gf + gm - 2m - gn = -2g \quad (2.3)$$

où  $m$ ,  $n$  et  $f$  sont respectivement, le nombre d'arêtes, de sommets et de faces.

D'où :

$$\sum_{f \in F} (d(f) - g) + \sum_{v \in V} \left(\frac{g-2}{2}d(v) - g\right) = -2g \quad (2.4)$$

Soit la fonction poids  $\omega : V \cup F \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que :

$$\begin{cases} \forall v \in V; \omega(v) = \frac{g-2}{2}d(v) - g; \\ \forall f \in F; \omega(f) = d(f) - g. \end{cases}$$

D'après l'équation (2.4)

$$\sum_{x \in V \cup F} \omega(x) = \sum_{v \in V} \omega(v) + \sum_{f \in F} \omega(f) = -2g.$$

Donc, le poids total est strictement négatif.

Comme  $G$  est un graphe de maille  $g$ , on déduit que :  $\sum_{f \in F} \omega(f) \geq 0$  et  $\sum_{v \in V} \omega(v) < 0$ .

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \in V} \left( \frac{g-2}{2} d(v) - g \right) < 0 &\iff \sum_{v \in V} \frac{g-2}{2} d(v) - \sum_{v \in V} g < 0 \\
 &\iff \frac{g-2}{2} \sum_{v \in V} d(v) - \sum_{v \in V} g < 0 \\
 &\iff \frac{g-2}{2} 2|E| - g|V| < 0 \\
 &\iff \frac{g-2}{2} 2|E| < g|V| \\
 &\iff \frac{g-2}{2} 2 \frac{|E|}{|V|} < g \\
 &\iff \frac{g-2}{2} Ad(G) < g \\
 &\iff Ad(G) < \frac{2g}{g-2}
 \end{aligned}$$

de même pour tout sous-graphe  $G'$  de  $G$ , de maille  $g'$ , nous avons  $Ad(G') < \frac{2g'}{g'-2}$  et comme  $2 < g' \leq g$  alors  $\frac{2g'}{g'-2} \leq \frac{2g}{g-2}$ .

On déduit que  $mad(G) < \frac{2g}{g-2}$ .

□

Un troisième exemple d'application à la méthode de déchargement est donné dans le théorème suivant :

**Théorème 2.3.** *Si  $G = (V, E, F)$  est un graphe planaire d'ordre  $n$ , de taille  $m \geq 2$  et de nombre de face  $f$  alors  $3f \leq 2m$  et  $m < 6n$ .*

**Démonstration.** Soit  $G$  un graphe planaire telle que  $m \geq 2$ . D'après la formule d'Euler :

$$3m - 3n - 3f = -6 \iff 2m - 3f + m - 3n = -6$$

où  $m$ ,  $n$  et  $f$  sont respectivement, le nombre d'arêtes, de sommets et de faces.

d'où

$$\begin{aligned}
 \sum_{f \in F} d(f) - 3f + \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) - 3n &= -6 \\
 \sum_{f \in F} (d(f) - 3) + \sum_{v \in V} \left( \frac{1}{2} d(v) - 3 \right) &= -6. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Soit la fonction poids  $\omega : V \cup F \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que :

$$\begin{cases} \forall v \in V; \omega(v) = \frac{1}{2}d(v) - 3; \\ \forall f \in F; \omega(f) = d(f) - 3. \end{cases}$$

D'après l'équation (2.5), on a

$$\sum_{x \in V \cup F} \omega(x) = \sum_{v \in V} \omega(v) + \sum_{f \in F} \omega(f) = -12$$

Étant donnée le degré d'une face est au moins 3, alors

$$\sum_{f \in F} \omega(f) \geq 0 \iff \sum_{f \in F} (d(f) - 3) \geq 0 \iff 2m - 3f \geq 0 \iff 2m \geq 3f$$

et

$$\sum_{v \in V} \omega(v) < 0 \iff \sum_{v \in V} \left(\frac{1}{2}d(v) - 3\right) < 0 \iff \frac{1}{2}m - 3n < 0 \iff \frac{1}{2}m < 3n \iff m < 6n$$

On déduit que si  $G$  est un graphe planaire ayant au moins 2 arêtes alors  $3f \leq 2m$  et  $m < 6n$ .

□

### 2.3.1 Démonstration de la formule d'Euler en utilisant la méthode de déchargement

Comme nous venons de le voir dans les exemples précédents, la formule d'Euler, joue un rôle essentiel dans les preuves utilisant la méthode de déchargement. Elle permet de prouver que la somme des poids initiaux est une constante (positive ou négative). Cependant, même si cette formule est un outil simple et classique, Thurston [24] montre qu'elle peut également être démontrée en utilisant la méthode de déchargement.

Pour un polyèdre convexe, on veut calculer la valeur exacte de  $|V| - |E| + |F|$  où  $V$ ,  $E$  et  $F$  sont respectivement, l'ensemble des sommets, des arêtes et des faces du polyèdre. On dispose le polyèdre dans l'espace tel qu'aucune arête ne soit horizontale et qu'il existe un seul sommet haut  $U$  et un seul sommet bas  $L$ . (Voir Figure 2.1)

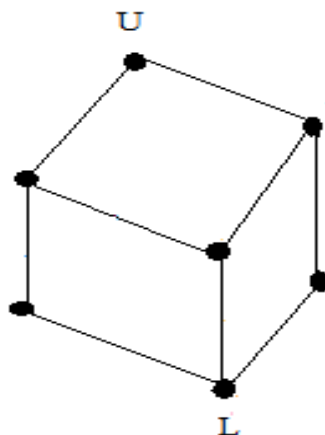


FIGURE 2.1 – Polyèdre convexe

1. On considère une fonction poids :

$$\omega : V \cup E \cup F \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que :

$$\begin{cases} \forall v \in V; \omega(v) = +1; \\ \forall e \in E; \omega(e) = -1; \\ \forall f \in F; \omega(f) = +1. \end{cases}$$

Autrement dit : On assigne à chaque sommet un poids +1, à chaque arête un poids -1 et à chaque face (y compris la face extérieure) un poids +1. (Voir Figure 2.2)

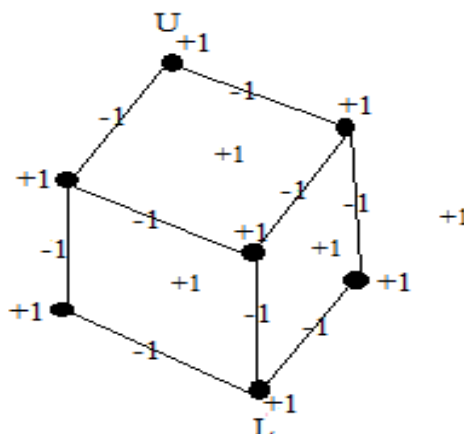


FIGURE 2.2 – Assignment des poids



2. On définit la règle de déchargement suivante :

(R) Chaque sommet et chaque arête donne tout son poids, horizontalement de gauche à droite, à sa face voisine. (Voir Figure 2.3)

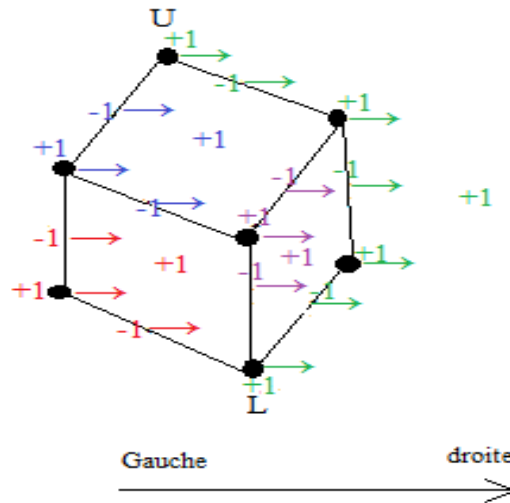


FIGURE 2.3 – Processus de déchargement

La règle (R) est bien définie car toutes les arêtes ne sont pas horizontales. De plus, il n'est pas difficile de voir qu'après le processus de déchargement (application de (R)), tous les sommets et toutes les arêtes terminent avec un poids final égal à 0.

(Voir Figure 2.4).

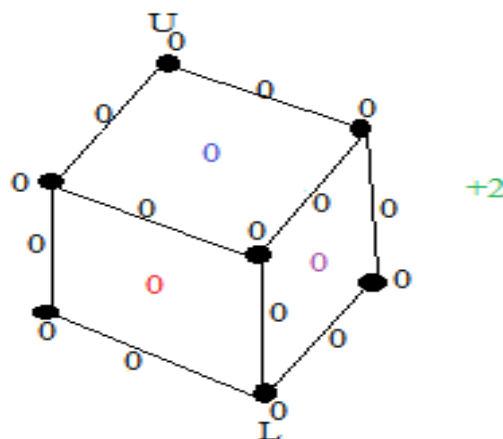


FIGURE 2.4 – Évaluation des nouveaux poids

3. Évaluons maintenant le poids des faces. Indépendamment de la forme du polyèdre, les sommets et les arêtes de la frontière gauche d'une face forment nécessairement

une séquence de sommets et d'arêtes en alternance, où les deux extrémités (les sommets) donnent leur poids à une autre face. Ainsi, le nombre de sommets de la frontière gauche d'une face interne sera toujours égal au nombre d'arêtes de cette séquence -1. Il s'ensuit, que le poids final de chaque face interne est de 0. Nous pouvons donc nous concentrer uniquement sur la face extérieure. La même analyse précédente peut être faite dans ce cas, sauf que les deux extrémités de chaque séquence ne donnent pas leur poids à une autre face. Par conséquent, le nombre de sommets de la frontière droite d'une face interne sera égal au nombre d'arêtes de cette séquence+1. Alors la face extérieure reçoit au total un poids de +1. On conclue que

$$|V| - |E| + |F| = 1 + 1 = 2.$$

### 2.3.2 Lemme structurel de Wernicke

**Lemme 2.4.** [26] *Si  $G$  est un graphe planaire triangulé de degré minimum au moins 5, alors l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

1.  $G$  contient un sommet de degré 5 adjacent à un sommet de degré 5.
2.  $G$  contient un sommet de degré 5 adjacent à un sommet de degré 6.

*Démonstration.* On procède par contradiction. Supposons que  $G = (V, E, F)$  est un graphe planaire triangulé de degré minimum 5 et tel que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1.  $G$  ne contient pas de sommet de degré 5 adjacent à un sommet de degré 5.
2.  $G$  ne contient pas de sommet de degré 5 adjacent à un sommet de degré 6.

On définit une fonction poids  $\omega$  par  $\omega(v) = d(v) - 6$  si  $v \in V$  et  $\omega(f) = 2d(f) - 6$  si  $f \in F$ .

Par l'équation (2.2), on a :

$$\sum_{x \in V \cup F} \omega(x) = \sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2d(f) - 6) = -12 \quad (2.6)$$

D'où, la somme totale des poids est strictement négative. L'étape suivante consiste à redistribuer les poids du graphe, de telle sorte que le poids final de chaque sommet et de chaque face soit positif, ce qui constitue une contradiction.

On définit la règle de déchargement suivante :

- (R)** Chaque sommet  $v$  de degré au moins 7 donne  $\frac{1}{5}$  à chacun de ses sommets voisins de degré 5.

Une fois la procédure de déchargement terminée, un nouveau poids  $\omega^*$  est obtenu sur les sommets et les faces de  $G$ . Évaluons maintenant le nouveau poids de chaque face et de chaque sommet de  $G$ .

Toutes les faces de  $G$  sont de degré 3. Par conséquent, le poids de chaque face  $f$  est égal à 0. Après l'application de (R),  $f$  ne donne et ne reçoit aucun poids. D'où, pour toute face  $f \in F$ ,  $\omega^*(f) = \omega(f) = 2 \times 3 - 6 = 0$ .

Il est facile de voir que seuls les sommets de degré 5 ont un poids négatif et que chaque sommet de degré au moins 7 a un poids positif.

Soit  $u$  un sommet de  $G$

1. Si  $u$  est un sommet de degré 5. Par hypothèse, tous les voisins de  $u$  sont de degré au moins 7. Le poids initial de  $u$  est  $\omega(u) = -1$ . En appliquant la règle de déchargement (R),  $u$  reçoit  $5 \times \frac{1}{5}$  et donc finit avec un poids positif :  $\omega^*(u) = -1 + 5 \times \frac{1}{5} = 0$ .
2. Si  $u$  est un sommet de degré 6, par définition, la règle (R) n'est pas appliquée et donc  $\omega(u) = \omega^*(u) = 0$ .
3. Si  $u$  est un sommet de degré au moins 7. Dans ce cas,  $u$  a un poids initial  $\omega(u) = d(u) - 6 \geq 1$ . Par hypothèse, toutes les faces incidentes à  $u$  sont des triangles. De plus,  $u$  ne peut pas appartenir à un triangle ayant deux sommets de degré 5. Par conséquent, au plus  $\frac{d(u)}{2}$  voisins de  $u$  peuvent être de degré 5. En appliquant la règle de déchargement (R),  $u$  donne au plus  $\frac{d(u)}{2} \times \frac{1}{5}$  et donc finit avec un poids :  $\omega^*(u) = d(u) - 6 - \frac{d(u)}{2} \times \frac{1}{5} \geq \frac{9d(u)-60}{10} > 0$ .

Conclusion :  $0 \leq \sum_{x \in V \cup F} \omega^*(x) = \sum_{x \in V \cup F} \omega(x) < 0$ . Ce qui est impossible.

□

## 2.4 Méthode de déchargement appliquée aux problèmes de coloration

Dans les problèmes de coloration, lorsqu'une proposition est prouvée en utilisant la méthode de déchargement, avant de définir les règles de déchargement, il est utile de prouver certaines propriétés structurelles du graphe. Dans ce cas, on procède comme suit : On suppose que le théorème que l'on veut prouver est faux, puis on considère un contre-exemple minimal  $G$ .

- Dans un premier temps, on prouve que  $G$  ne peut pas contenir un ensemble de structures,  $\{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ , sur ses sommets, ses arêtes ou ses faces, compte tenu de sa minimalité. De telles structures sont appelées *configurations réductibles*. Généralement, pour prouver que ces configurations n'existent pas, on procède par l'absurde. On suppose que si  $G$  contient la configuration  $C_i$ , alors il existe un plus petit graphe  $G'$  qui est un contre-exemple au théorème, puis on prouve une contradiction due à la minimalité de  $G$ .

- Durant la deuxième étape, dite phase de déchargement, on montre que les configurations réductibles décrites dans la première étape sont inévitables. Pour ce faire, on utilise la procédure de déchargement : on attribue des poids aux éléments de  $G$  de manière à ce que le poids total soit un entier strictement négatif, puis on définit les règles de déchargement de telles sorte que le poids total reste inchangé. Enfin, on montre que si aucune des configurations n'existe alors tous les éléments de  $G$  ont un poids positif ou nul. Ainsi, le poids total est positif ou nul, ce qui constitue une contradiction.

### 2.4.1 Exemple d'application : coloration injective des sommets

Une *coloration injective des sommets* d'un graphe  $G$  est une affectation de couleurs aux sommets de  $G$  telle que deux sommets ayant un voisin en commun reçoivent des couleurs différentes. Le *nombre chromatique injectif*,  $\chi_{inj}(G)$ , est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour obtenir une coloration injective des sommets.

**Exemple :** La coloration proposée dans la Figure 2.5(a) ne représente pas une coloration injective des sommets ; car il existe deux sommets  $x$  et  $w$  dans  $G$  ayant un voisin en commun (le sommet  $y$ ) qui ont la même couleur.

La coloration proposée dans la Figure 2.5(b) représente une coloration injective des sommets ; car pour tout deux sommets ayant un voisin en commun, ces sommets reçoivent des couleurs différentes. Le minimum de couleur nécessaire pour obtenir une coloration injective des sommets de  $G$  est 3. En effet,  $xuyx$  est un cycle de longueur 3, donc les sommets  $x$ ,  $u$  et  $y$  doivent avoir 3 couleurs différentes. Comme la coloration injective des sommets n'est pas une coloration propre, on peut colorer  $v$  avec la même couleur de  $u$  et  $w$  avec la même couleur de  $y$ .

Conclusion  $\chi_{inj}(G) = 3$ .



FIGURE 2.5 – Coloration des sommets de  $G$

Cette notion a été définie en 2002 par Hahn et al. [17]. Notons que cette coloration n'est pas propre : deux sommets voisins peuvent recevoir la même couleur.

Afin d'illustrer le principe de démonstration par la méthode de déchargement pour les problèmes de coloration, nous avons choisi de reprendre, étape par étape, un des théorèmes de Cranston et *al.* [12].

Soit  $M$  un réel positif. Nous cherchons à formuler un théorème de la manière suivante :

*"Pour tout graphe  $G$  de  $\text{mad}(G) < M$  tel que  $\Delta(G) \leq 3$ , on a  $\chi_{inj}(G) \leq 5$ ."*

On considère  $H$  un contre-exemple minimal au théorème :  $\Delta(H) \leq 3$ ,  $\text{mad}(H) < M$ ,  $H$  n'admet pas de coloration injective utilisant 5 couleurs, et pour tout sous graphe  $H'$  de  $H$ ,  $\chi_{inj}(H') \leq 5$ .

Par définition  $\text{mad}(H') \leq \text{mad}(H) < M$ . De plus, on peut supposer que  $H$  est connexe, sinon par minimalité de  $H$ , on peut colorer indépendamment chaque composante connexe.

Notre but est de montrer que le contre-exemple minimal  $H$  n'existe pas, car dans le cas contraire  $\text{mad}(H) \geq M$  ce qui contredit l'hypothèse du théorème. Pour ce faire, nous allons exhiber un ensemble  $C$  de configurations réductibles que  $H$  ne peut pas contenir à cause sa minimalité. Nous définirons ensuite, une fonction poids  $\omega : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\omega(x) = d(x) - M$ . D'après l'hypothèse faite sur le degré moyen maximum, la somme totale des poids est strictement négative. En effet, par hypothèse  $\text{mad}(H) < M$ , alors

$$\begin{aligned} \text{Ad}(H) < M &\Leftrightarrow \frac{2 |E(H)|}{|V(H)|} < M \\ &\Leftrightarrow \sum_{x \in V(H)} d(x) < n.M \\ &\Leftrightarrow \sum_{x \in V(H)} (d(x) - M) < 0 \end{aligned}$$

Par la suite, nous énoncerons des règles de déchargement qui permettent de modifier les poids des sommets tout en conservant la somme totale des poids, et d'obtenir une nouvelle fonction poids  $\omega^*$ . Enfin, nous montrerons qu'à la fin du processus de déchargement  $\text{Ad}(H) \geq M$ . Autrement dit, les poids de tous les sommets de  $H$  sont positifs. Ce qui nous donne la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H)} \omega(x) < 0$$

Nous pourrions alors conclure qu'aucun contre-exemple ne peut exister.

Dans toutes les figures qui suivent, les sommets en noir sont de degré fixe et les sommets en blanc sont de degré quelconque.

**Première configuration réductible :**

**Lemme 2.5.** *le contre-exemple minimal  $H$  ne contient pas de 1-sommet.*

*Démonstration.* On procède par contradiction. Supposons que  $H$  contient un sommet  $v$  de degré 1 (voir Figure 2.6).

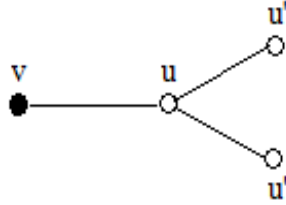


FIGURE 2.6 – Première configuration réductible

Par minimalité de  $H$ , le graphe  $H' = H \setminus \{v\}$  admet une 5-coloration injective  $\phi$ . En comptant le nombre de couleurs disponibles à  $v$  pour étendre la coloration de  $H'$  à  $H$ , on remarque que nous avons au moins trois couleurs libres pour colorer  $v$ . En effet, on peut interdire toutes les couleurs qui sont à distance 2 de  $v$ , soit 2 couleurs. Il reste alors au moins trois couleurs libres pour étendre la coloration  $\phi$  à  $H$ . Ce qui constitue une contradiction. □

La question qui se pose maintenant est : *Pour quelle valeur de  $M$  a-t-on  $Ad(H) \geq M$  ?* La réponse est pour  $M = 2$ . En effet,

**Proposition 2.6.** *Le graphe  $H$  satisfait  $Ad(H) \geq 2$ .*

*Démonstration.* D'après les hypothèses, le contre-exemple  $H$  est connexe. Supposons par contradiction que  $Ad(H) < 2$ . Dans ce cas,  $H$  ne contient pas de cycle. Donc  $H$  est un arbre, ce qui est une contradiction car par le Lemme 2.5,  $H$  ne contient pas de feuilles. □

Nous voulons, bien évidemment, maximiser  $M$ . On pose alors  $M = 2 + a$ , avec  $a \in \mathbb{R}_*^+$ , puis on cherche à déterminer la meilleure valeur pour  $a$ .

**Deuxième configuration réductible :**

**Lemme 2.7.** *Le contre-exemple minimal  $H$  ne contient pas de 2-sommet adjacent à un 2-sommet.*

*Démonstration.* Supposons que  $H$  contient un 2-sommet  $u$  adjacent à un 2-sommet  $v$ . Soient  $t$  (respectivement  $w$ ) le deuxième voisin de  $u$  (respectivement,  $v$ ) (voir figure 2.7).

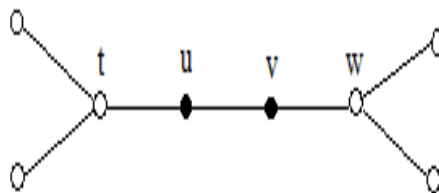


FIGURE 2.7 – Deuxième configuration réductible

Par minimalité de  $H$ , le graphe  $H' = H \setminus \{u, v\}$  admet une coloration injective  $\phi$  utilisant 5 couleurs. Nous pouvons montrer que la coloration  $\phi$  peut être étendue à  $H$ . En effet, le sommet  $u$  a au plus trois couleurs interdites dans  $\phi$  (la couleur de  $w$  et les couleurs des deux voisins de  $t$ ). De même, le sommet  $v$  a au plus trois couleurs interdites dans  $\phi$  (la couleur de  $t$  et les couleurs des deux voisins de  $w$ ). D'où, nous pouvons étendre la coloration  $\phi$  à  $H$ . Ce qui est une contradiction.

□

La question qui se pose maintenant est la suivante : à l'aide du Lemme 2.5 et du Lemme 2.7, pour quelle valeur de  $a$ ,  $a > 0$ , a-t-on  $Ad(H) \geq 2 + a$  ?

La réponse est pour  $a = \frac{2}{5}$ . En effet,

**Proposition 2.8.** *Le graphe  $H$  satisfait  $Ad(H) \geq 2 + \frac{2}{5}$ .*

*Démonstration.* Attribuons à chaque sommet  $v$  un poids  $\omega(v) = d(v) - (2 + a)$ . Nous voulons prouver qu'à la fin de la phase de déchargement tous les sommets finissent avec poids supérieur ou égal à 0. Ce qui implique que le degré moyen et donc le degré moyen maximum soit au moins  $2 + a$ . Intuitivement, pour cela, il faut que les sommets de degré 3 donnent un certain poids aux sommets de petits degrés, qui sont initialement les plus en déficit de poids. D'après le Lemme 2.5, tous les sommets de  $H$  ont un degré au moins 2, donc un 3-sommet va répartir son poids à sur ses 2-sommets voisins. Ainsi nous allons appliquer la règle de déchargement suivante :

**(R)** tout sommet de degré 3 donne un poids  $\alpha$  à chaque sommet voisin de degré 2.

Soit  $v$  un sommet de  $H$ . On considère les cas suivants :

- Si  $v$  est un 2-sommet, alors d'après le Lemme 2.7, il est adjacent à deux 3-sommets. Ainsi il reçoit  $\alpha$  de chacun de ses voisins. Son nouveau poids est de  $\omega^*(v) = 2 - 2 - a + 2 \times \alpha \geq 0$ .
- Si  $v$  est un 3-sommet, il donne au plus  $\alpha$  à chacun de ses voisins de degré 2. Ainsi, son nouveau poids est de  $\omega^*(v) = 3 - 2 - a - 3 \times \alpha \geq 0$ .

Pour que les deux inégalités soient vérifiées, il suffit de prendre  $\alpha = \frac{1}{5}$  et  $a = \frac{2}{5}$  et on obtient  $Ad(H) \geq 2 + \frac{2}{5}$ .

□

Toujours dans le but de maximiser  $M$ , on peut observer que la plus grande contrainte provient du fait qu'un 3-sommet donne tout son poids au sommet de degré 2 voisin. On peut alors se poser la question de savoir à combien de 2-sommets un 3-sommet est voisin ?

**Troisième configuration réductible**

**Lemme 2.9.** *Le contre-exemple minimal  $H$  ne contient pas de 3-sommet adjacent à deux 2-sommets.*

*Démonstration.* Supposons que  $H$  contient un 3-sommet  $u$  adjacent à deux 2-sommets  $v$  et  $w$ . Soit  $t$  le troisième voisin de  $u$  (voir la Figure 2.8).

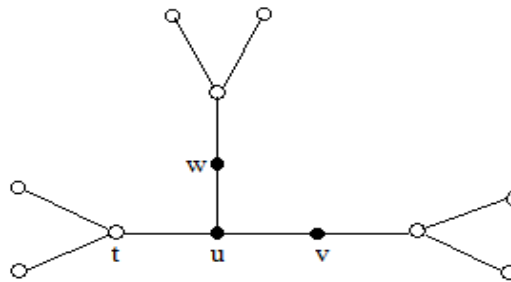


FIGURE 2.8 – Troisième configuration réductible

Par minimalité de  $H$ , le graphe  $H' = H \setminus \{u, v, w\}$  admet une coloration injective  $\phi$  utilisant 5 couleurs. Nous pouvons étendre la coloration  $\phi$  à  $H$  comme suit. Soient  $N_H(v) = \{u, v'\}$  et  $N_H(w) = \{u, w'\}$ . On commence par colorer le sommet  $v$  avec une couleur différente des couleurs de  $t$  et de celles des voisins de  $v'$  (il y a au plus 3 couleurs interdites). Ensuite, on colore  $w$  avec une couleur différente de celles de  $t$ ,  $v$  et des voisins de  $v'$  (il y a au plus 4 couleurs interdites). Finalement, il ne reste plus qu'à colorer le sommet  $u$ . Ceci est possible car  $u$  a au plus 4 contraintes (au plus deux voisins de  $t$ , de  $v$  et de  $v'$ ). Ce qui nous donne une contradiction.

□

Le Lemme 2.9, nous assure qu'un 3-sommet est adjacent à au plus un seul sommet de degré 2. Dans ce cas, en appliquant la même règle de déchargement précédente, un 3-sommet donne au plus une fois  $\alpha$ . Ainsi son nouveau poids est de  $\omega^*(v) = 3 - 2 - a - 1 \times \alpha \geq 0$ . De cette manière, pour  $\alpha = \frac{1}{3}$  et  $a = \frac{2}{3}$ , on obtient  $Ad(H) \geq 2 + \frac{2}{3}$ . D'où :

**Proposition 2.10.** *Le graphe  $H$  satisfait  $Ad(H) \geq 2 + \frac{2}{3}$ .*

En ajoutant d'autres configurations réductibles et en affinant les règles de déchargement, nous obtenons la meilleure valeur de  $M = \frac{36}{13}$ .

On note par 3<sub>1</sub>-sommet, un 3-sommet adjacent à exactement un 2-sommet.



**Quatrième configuration réductible**

**Lemme 2.11.** *Le contre-exemple minimal  $H$  ne contient pas deux  $3_1$ -sommets adjacents.*

*Démonstration.* Supposons que  $H$  contient deux  $3_1$ -sommets  $u$  et  $v$  adjacents. Soient  $x, y$  leurs 2-sommets voisins respectifs.

- (a) Si  $x = y$  (voir Figure 2.9(a)), alors par minimalité de  $H$ , il existe une coloration injective  $\phi$  de  $H_0 = H \setminus \{x, u, v\}$  utilisant 5 couleurs. En comptant le nombre de couleurs libres pour colorer dans l'ordre chacun des sommets  $u, v$  et  $x$ , on peut étendre  $\phi$  à  $H$ . Ce qui est une contradiction.
- (b) Si  $x \neq y$  (voir Figure 2.9(b)), alors par minimalité de  $H$ , il existe une coloration injective  $\phi$  de  $H' = H \setminus \{x, y, u, v\}$  utilisant 5 couleurs. Notons que  $u$  et  $v$  ont chacun au plus 4 couleurs interdites car  $x$  et  $y$  ne sont pas encore colorés. Après avoir coloré  $u$  et  $v$ , on observe que  $x$  et  $y$  ont chacun au plus 4 couleurs interdites. D'où, nous pouvons étendre la coloration à  $H$ , ce qui est une contradiction.



FIGURE 2.9 – Quatrième configuration réductible

□

Rappelons que nous voulons montrer que si  $G$  n'a aucune des quatre configurations citées précédemment, alors  $Ad(G) \geq 2 + a'$ , avec  $a' > \frac{2}{3}$ . Ceci est possible si  $M = 2 + \frac{10}{13}$ .

**Proposition 2.12.** *Le graphe  $H$  satisfait  $Ad(H) \geq 2 + \frac{10}{13}$ .*

*Démonstration.* Attribuons à chaque sommet  $v$  un poids  $\omega(v) = d(v) - (2 + a')$ .

Nous allons appliquer les deux règles de déchargement suivantes :

- (R1) Tout sommet de degré 3 donne un poids  $\alpha$  à chacun de ses voisins de degré 2. (voir Figure 2.10)
- (R2) Tout sommet de degré 3 donne un poids  $\beta$  à chaque 2-sommet qui est à distance 2 de lui, sauf s'ils appartiennent tous deux à un 4-cycle, dans ce cas le 3-sommet donne  $2\beta$  au 2-sommet. (voir Figure 2.11)



FIGURE 2.10 – Règle de déchargement (R1)



FIGURE 2.11 – Règle de déchargement (R2)

Soit  $v$  un sommet de  $H$ . On considère les cas suivants :

- Si  $v$  est un 2-sommet, alors d’après le Lemme 2.7  $v$  est adjacent à deux 3-sommets. De plus, d’après le Lemme 2.9, tous les sommets à distance 2 de  $v$  sont des 3-sommets. Par le Lemme 2.11  $v$  n’appartient à aucun 3-cycle. Par conséquent, si  $v$  appartient à un 4-cycle contenant un 3-sommet  $u$  à distance 2, alors  $v$  reçoit  $2\beta$  (plutôt que  $\beta$ ) de la part de  $u$ . Ainsi son nouveau poids est de  $\omega^*(v) = 2 - 2 - a' + 2 \times \alpha + 4 \times \beta \geq 0$ .
- Si  $v$  est un 3-sommet, d’après les Lemmes 2.7, 2.9 et 2.11,  $v$  ne peut pas avoir de 2-sommets à distance 1 et 2 à la fois. Il s’ensuit, deux cas possibles :

**Cas 1 :**  $v$  n’est pas adjacent à des 2-sommets et a au plus trois 2-sommets à distance 2. Dans ce cas  $\omega^*(v) = 3 - 2 - a' - 3 \times \beta \geq 0$ .

**Cas 2 :**  $v$  est adjacent à au plus un 2-sommet et aucun 2-sommet à distance 2. Dans ce cas  $\omega^*(v) = 3 - 2 - a' - \alpha \geq 0$ .

Pour que les trois inégalités soient vérifiées, il suffit de prendre  $\alpha = \frac{3}{13}$ ,  $\beta = \frac{1}{13}$ ,  $a' = \frac{10}{13}$  et on obtient  $Ad(H) \geq 2 + \frac{10}{13}$ .

□

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Cranston et al. [12].

**Théorème 2.13.** [12] *Pour tout graphe  $G$  de  $mad(G) < \frac{36}{13}$  tel que  $\Delta(G) \leq 3$ , on a  $\chi_{inj}(G) \leq 5$ .*

# Chapitre 3

## Coloration injective des arêtes

### 3.1 Introduction

Dans un graphe  $G$ , trois arêtes  $e_1, e_2$  et  $e_3$  (dans cet ordre) sont dites *consécutives* si pour quatre sommets  $x, y, z$  et  $u$ , alors on a  $e_1 = xy, e_2 = yz$  et  $e_3 = zu$ . En d'autre terme les trois arêtes  $e_1, e_2$  et  $e_3$  forment une chaîne ou un cycle de longueur 3.

Une *coloration injective des arêtes* d'un graphe  $G = (V, E)$  est une application  $\phi$  de l'ensemble des arêtes  $E$  dans l'ensemble des couleurs  $\{1, \dots, k\}$  de telle sorte que si  $e_1, e_2$  et  $e_3$  sont trois arêtes consécutives dans  $G$ , alors  $\phi(e_1) \neq \phi(e_3)$ . L'*indice chromatique injectif* des arêtes de  $G$ , noté  $\chi'_{inj}(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une *k-coloration injective des arêtes*. Notons que cette coloration n'est pas une coloration propre : deux arêtes adjacentes peuvent recevoir la même couleur.

#### Exemple :

La coloration proposée dans la Figure 3.1(a) ne représente pas une coloration injective des arêtes ; car il existe trois arêtes consécutives  $zx, xv$  et  $vu$  telle que  $\phi(zx) = \phi(vu) = 4$ .

La coloration proposée dans la Figure 3.1(b) représente une coloration injective des arêtes avec 6 couleurs ; car pour chaque trois arêtes consécutives  $e_1, e_2$  et  $e_3$  on a  $\phi(e_1) \neq \phi(e_3)$ . Le minimum de couleur nécessaire pour obtenir une coloration injective des arêtes de  $G$  est 6. En effet,  $vwuv$  est un cycle de longueur 3 donc  $\phi(vw) \neq \phi(wu) \neq \phi(uv)$  (on doit utiliser trois couleurs différentes). Le même raisonnement peut se faire pour le cycle  $xyzx$  :  $\phi(xy) \neq \phi(yz) \neq \phi(zx)$ . D'après la définition de la coloration injective des arêtes,  $\phi(zx) \notin \{\phi(vw), \phi(vu), \phi(uw)\}$ ,  $\phi(xy) \notin \{\phi(vw), \phi(vu), \phi(uw)\}$  et  $\phi(yz) \notin \{\phi(vw), \phi(vu), \phi(uw)\}$ . On conclut que au moins 6 couleurs sont nécessaires pour colorer  $G$ . Comme la coloration injective des arêtes n'est pas une coloration propre, on peut poser  $\phi(zw) = \phi(vw)$ ,  $\phi(xv) = \phi(vu)$  et  $\phi(yu) = \phi(yx)$ . Conclusion :  $\chi'_{inj}(G) = 6$ .



FIGURE 3.1 – Coloration des arêtes de  $G$

**Remarque :** Dans une coloration propre des arêtes, l'indice chromatique de  $G$  et le nombre chromatique du graphe représentatif des arêtes  $L(G)$  de  $G$  vérifie l'équation  $\chi'(G) = \chi(L(G))$ . Cependant ; cette égalité n'est pas toujours vraie pour le cas de la coloration injective des arêtes.

**Exemple :** L'indice chromatique injectif du graphe  $K_{1,n}$  est égal à 1 mais le nombre chromatique injectif de son graphe représentatif des arêtes  $L(K_{1,n})$  est égal à  $n$  :  $\chi'_{inj}(K_n) \neq \chi_{inj}(L(K_{1,n}))$ . (Voir l'exemple de la Figure 3.2(a) où  $n = 5$ ).



FIGURE 3.2 – Coloration injective d'un graphe et son graphe représentatif des arêtes

### 3.2 Exemple d'application de la coloration injective des arêtes

La notion de la coloration injective des arêtes a été introduite en 2015 par Domingos *et al.* [15] dans le but de modéliser un réseau radio par paquets : Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté où l'ensemble des sommets  $V(G)$  représente l'ensemble des stations et l'ensemble des arêtes  $E(G)$  représente la propriété commune des fréquences entre deux paires de stations. Deux sommets sont adjacents si et seulement si les stations correspondantes peuvent s'entendre en transmission. En assignant des fréquences aux arêtes de  $G$ , on peut définir l'interférence secondaire comme celle obtenue quand deux stations  $S_1$  et  $S_2$  qui s'entendent partagent la même fréquence avec un voisin de  $S_1$  noté  $S'_1$  et un voisin de  $S_2$  noté  $S'_2$  où

( $S'_1 \neq S_2$ ) et ( $S'_2 \neq S_1$ ). La résolution de ce problème d'assignation de fréquence afin d'éviter les interférences secondaires correspondent à la recherche d'une coloration injective des arêtes du graphe. (Voir [20, 22])

### 3.3 Indice chromatique injectif de quelques classes de graphe

Une majoration naturelle de l'indice chromatique de la coloration injective des arêtes d'un graphe  $G$  en fonction de son degré maximum  $\Delta$  est donnée par :

$$\chi'_{inj}(G) \leq 2(\Delta - 1)^2 + 1.$$

En effet, si on veut colorer une arête quelconque  $uv$  d'un graphe  $G$ , alors pour toute arête incidente au sommet  $v$ , il faut éviter les  $(\Delta - 1)$  couleurs des arêtes qui lui sont adjacentes. Ce processus est répété  $(\Delta - 1)$  fois (voir Figure 3.3). Il faut donc éviter  $(\Delta - 1)^2$  des couleurs du côté de  $v$ . Par symétrie, on obtient le même nombre de couleurs à éviter du côté de  $u$ . Ce qui nous fournit la majoration  $\chi'_{inj}(G) \leq 2(\Delta - 1)^2 + 1$ .

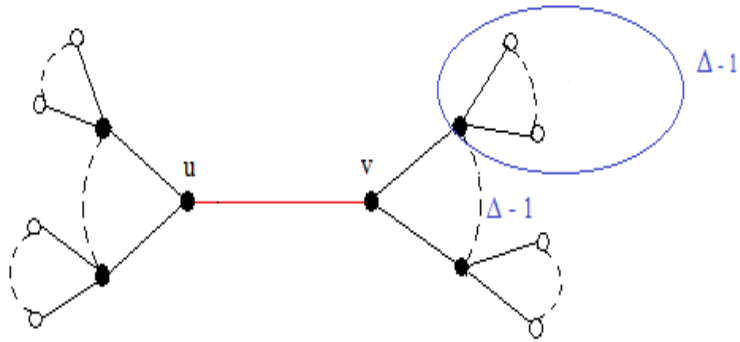


FIGURE 3.3 -  $\chi'_{inj}(G) \leq 2(\Delta - 1)^2 + 1$ .

Domingos *et al.* ont prouvé qu'il était NP-difficile de décider si  $\chi'_{inj}(G)$  est au plus  $k$ . Ils donnent la valeur exacte de  $\chi'_{inj}(G)$  de certaines classes de graphes.

**Proposition 3.1.** [15] Soient  $P_n$  une chaîne de  $n$  sommets,  $C_n$  un cycle de  $n$  sommets,  $K_{p,q}$  un graphe biparti complet et  $P$  le graphe de Petersen.

1.  $\chi'_{inj}(P_n) = 2$ , pour  $n \geq 4$ .
2.  $\chi'_{inj}(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 3, & \text{sinon} \end{cases}$
3.  $\chi'_{inj}(K_{p,q}) = \min\{p, q\}$
4.  $\chi'_{inj}(P) = 5$  (voir Figure 3.4)

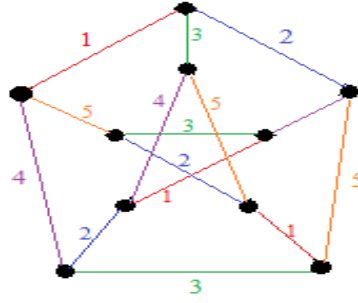


FIGURE 3.4 – 5-coloration injective des arêtes du graphe petersen.

Dans le cas où le graphe est un arbre ou un graphe biparti, ils donnent les bornes suivantes :

**Proposition 3.2.** [15] Si  $G = (V, E)$  est un graphe biparti sans sommet isolé où  $V = V_1 \cup V_2$  alors :

$$\chi'_{inj}(G) \leq \min\{|V_1|, |V_2|\}.$$

Notons que cette borne est atteinte pour le cas des graphes bipartis complets.

**Proposition 3.3.** [15] Pour tout arbre  $T$  d'ordre  $n \geq 2$ , on a :

$$1 \leq \chi'_{inj}(T) \leq 3.$$

Une borne triviale de l'indice chromatique injectif des arêtes d'un graphe  $G$  est donnée par sa taille

$$\chi'_{inj}(G) \leq |E(G)|.$$

La Proposition 3.4 caractérise les graphes pour lesquels cette borne est atteinte.

**Proposition 3.4.** [15] Soit  $G = (V, E)$  un graphe de taille  $m$  et sans sommets isolés.

$$\chi'_{inj}(G) = m \text{ si et seulement si } G \text{ est un graphe complet.}$$

**Démonstration.** Soit  $G$  un graphe de taille  $m$  et sans sommets isolés.

1. Montrons que si  $\chi'_{inj}(G) = m$  alors  $G$  est un graphe complet.

Il est clair que  $G$  est un graphe connexe, sinon les mêmes couleurs pourraient être utilisées dans chaque composantes connexe. Considérons les deux cas suivants :

Cas  $m = 1$  : Dans ce cas  $G$  est un graphe complet d'ordre 2.

Cas  $m \geq 2$  : Supposons que  $G$  n'est pas un graphe complet, alors il existe deux arêtes adjacentes dans  $G$  qui ne sont pas dans le même triangle. On peut colorer ces deux arêtes avec la même couleur et toutes les arêtes restantes avec des couleurs différentes, nous produisons une coloration injective des arêtes avec moins de  $m$  couleurs, ce qui donne une contradiction. Donc  $G$  est un graphe complet.

2. Montrons que si  $G$  est un graphe complet alors  $\chi'_{inj}(G) = m$ .

Soient  $e_i$  et  $e_j$  deux arêtes arbitraires de  $G$ ,  $e_i$  et  $e_j$  sont soit toutes les deux incluses dans un triangle ou il existe une arête  $e_k$  tel que,  $e_i$ ,  $e_j$  et  $e_k$  sont trois arêtes consécutives.

Dans les deux cas  $e_i$  et  $e_j$  doivent avoir des couleurs différentes. Donc  $\chi'_{inj}(G) = m$ .

□

### 3.4 Coloration injective des graphes subcubiques

En 2018, Bu et Qi [10] ont considéré les graphes subcubiques de degré moyen maximum borné, ils montrent le théorème suivant :

**Théorème 3.5.** [10] *Pour tout graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta(G) \leq 3$ , on a*

- (1) *Si  $mad(G) < \frac{5}{2}$ , alors  $\chi'_{inj}(G) \leq 5$ .*
- (2) *Si  $mad(G) < \frac{18}{7}$ , alors  $\chi'_{inj}(G) \leq 6$ .*

Étant donné que pour tout graphe planaire de maille au moins  $g$  satisfait la condition  $mad(G) < \frac{2g}{g-2}$ , nous obtenons le corollaire suivant :

**Corollaire 3.6.** *Soit  $G$  un graphe planaire subcubique de maille  $g$ .*

- (1) *Si  $g \geq 10$ , alors  $\chi'_{inj}(G) \leq 5$ .*
- (2) *Si  $g \geq 9$ , alors  $\chi'_{inj}(G) \leq 6$ .*

Dans ce qui suit, nous améliorons ce résultat pour tout graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta(G) \leq 3$  et de degré moyen maximum  $mad(G) < \frac{9}{4}$ .

**Lemme 3.7.** *Soit  $G$  un graphe subcubique de degré moyen maximum  $mad(G) < \frac{9}{4}$ .*

*$G$  satisfait une des conditions suivantes :*

1.  *$G$  contient un sommet de degré 1.*
2.  *$G$  contient une chaîne  $xuvw$ , telle que  $d_G(u) = d_G(v) = d_G(w) = 2$ .*

*Démonstration.* On procède par contradiction. Supposons que  $G = (V(G), E(G))$  est un graphe subcubique de degré moyen maximum  $mad(G) < \frac{9}{4}$  et tel que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (a)  *$G$  ne contient pas un sommet de degré 1.*
- (b)  *$G$  ne contient pas une chaîne  $xuvw$ , telle que  $d_G(u) = d_G(v) = d_G(w) = 2$ .*



On définit une fonction poids  $\omega$  telle que :

$$\begin{aligned} \omega : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \omega(v) = d(v) - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

D'après les hypothèses

$$\sum_{v \in V(G)} \omega(v) < 0.$$

On redistribue les poids du graphe de telle sorte que le poids final de chaque sommet soit positif.

On définit la règle de déchargement suivante :

(R) : chaque 3-sommet donne un poids  $\frac{1}{4}$  à son 2-sommet voisin.

Évaluons maintenant le nouveau poids de chaque sommet de  $G$ . Soit  $v$  un sommet de  $G$

1. D'après la condition (a),  $G$  ne contient pas de sommet de degré 1.
2. Si  $v$  est un sommet de degré 2, alors d'après la condition (b),  $v$  est adjacent à au moins un 3-sommet. En appliquant (R)  $v$  reçoit au moins  $\frac{1}{4}$ . Son nouveau poids est  $\omega^*(v) \geq 2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = 0$ .
3. Si  $v$  est un sommet de degré 3, alors en appliquant (R)  $v$  donne au plus  $3 \times \frac{1}{4}$ . Son nouveau poids est  $\omega^*(v) \geq 3 - \frac{9}{4} - 3 \times \frac{1}{4} = 0$ .

Ce qui nous conduit à la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{v \in V(G)} \omega^*(v) = \sum_{v \in V(G)} \omega(v) < 0.$$

□

**Théorème 3.8.** *Soit  $G$  un graphe subcubique de degré moyen maximum  $mad(G)$ .*

$$\text{Si } mad(G) < \frac{9}{4} \text{ alors } \chi'_{inj}(G) \leq 4.$$

**Démonstration.** On procède par contradiction. Considérons  $H$  un contre exemple minimale au théorème minimisant  $|E(H)| + |V(H)|$ ;  $H$  subcubique de degré moyen maximum  $mad(H) < \frac{9}{4}$  et  $\chi'_{inj}(H) > 4$ , et pour toute arête  $e$  de  $H$ ,  $\chi'_{inj}(H - e) \leq 4$ .  $H$  est connexe ; sinon on peut colorer indépendamment chacune des composantes connexes.

Le contre-exemple minimale  $H$  possède les propriétés suivantes :

**Fait 1.**  *$H$  ne contient pas de 1-sommet adjacent à un 2-sommet.*

*Démonstration.* On suppose que  $H$  contient un 1-sommet  $u$  adjacent à un 2-sommet  $v$ . Soit  $w$  le deuxième voisin de  $v$ , avec  $N_H(w) = \{v, w', w''\}$  (voir Figure 3.5).

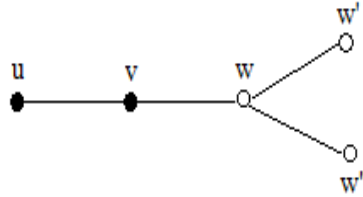


FIGURE 3.5 – Configuration Faît 1

Par hypothèse,  $H$  n'admet pas de 4 coloration injective des arêtes  $\phi$ . Par minimalité de  $H$ , le graphe  $H' = H - \{uv\}$  admet une 4-coloration injective des arêtes. On remarque que nous avons au moins 2 couleurs disponibles pour colorer  $uv$ . En effet ; la couleur de  $uv$  doit être différente de  $\phi(ww')$  et  $\phi(ww'')$ . D'où on peut étendre  $\phi$  à  $H$  ; contradiction. □

**Faît 2.**  $H$  ne contient pas de 3-sommet adjacent à deux 1-sommets.

*Démonstration.* On suppose que  $H$  contient un 3-sommet  $v$  adjacent à deux 1-sommets  $v'$  et  $v''$ . Soit  $w$  le troisième voisin de  $v$ , avec  $N_H(v) = \{v', v'', w\}$  et  $N_H(w) = \{w', w'', v\}$  (voir Figure 3.6).

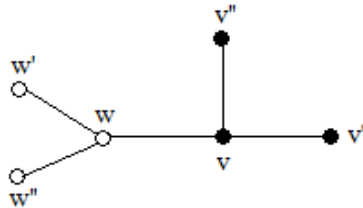


FIGURE 3.6 – Configuration Faît 2

Par hypothèse,  $H$  n'admet pas de 4 coloration injective des arêtes  $\phi$ . Par minimalité de  $H$ , le graphe  $H' = H - \{vv'\}$  admet une 4-coloration injective des arêtes  $\phi$ . En comptant le nombre de couleurs interdites pour colorer  $vv'$ . En effet ; la couleur de  $vv'$  doit être différente de  $\phi(wv')$  et  $\phi(wv'')$ . D'où nous pouvons étendre  $\phi$  à  $H$  ; contradiction. □

On considère le graphe  $H^* = H - \{v \in V(H) \mid d_H(v) = 1\}$ . Comme  $H^* \subseteq H$ ,  $mad(H^*) < \frac{9}{4}$ . D'après Faît 1 et Faît 2,  $H^*$  ne contient pas de sommet de degré 1. Par le Lemme 3.7,  $H^*$  contient une chaîne  $xwvwy$ , telle que  $d_{H^*}(x) = d_{H^*}(y) = d_{H^*}(w) = 2$ . Dans la suite de la preuve, on montre qu'une telle chaîne ne peut pas exister.

On procède par contradiction. On suppose que  $H^*$  contient une chaîne  $xuvwy$ , telle que  $d_{H^*}(u) = d_{H^*}(v) = d_{H^*}(w) = 2$ .

Dans  $H$ , si le sommet  $u$  (respectivement  $v$  et  $w$ ) a un sommet de degré 1 voisin alors on note  $u'$  (respectivement  $v'$  et  $w'$ ) ce voisin.

- 1 Si  $x = y$ , alors soit  $z$  (s'il existe) le troisième voisin de  $x$  dans  $H$ . (Voir Figure 3.7(a)).

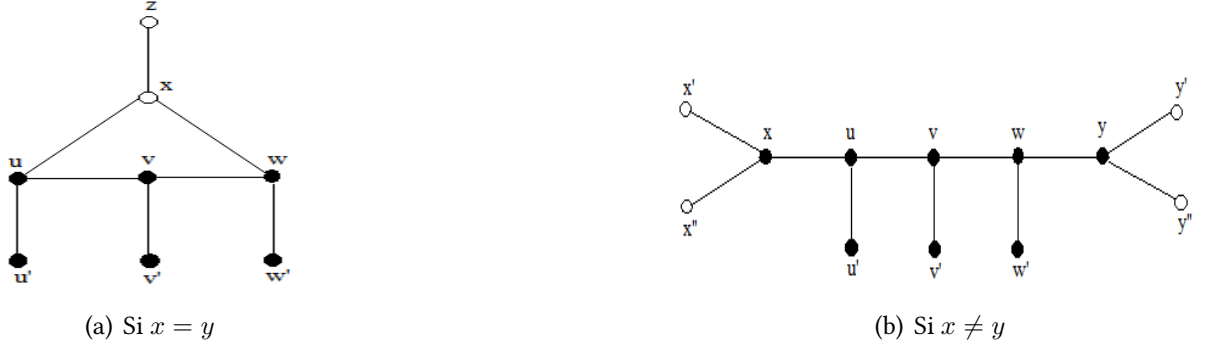


FIGURE 3.7 – Configuration de la chaîne  $xuvwy$  dans le graphe  $H$

Par minimalité de  $H$ , le graphe  $H' = H - \{xu, uv, vv', ww', vw\}$  admet une 4 coloration injective des arêtes. Nous étendrons  $\phi$  à  $H$  en colorant les arêtes  $xu, uv, vv', uu'$  et  $vw$  dans cette ordre comme suit :

- $xu$  avec une couleur  $c_1$  différente de  $\phi(ww')$  et différente des couleurs des arêtes qui sont adjacents à  $xz$ . (nous avons au plus 3 couleurs interdites).
- $uv$  avec une couleur  $c_2$  différente de  $\phi(xz)$ ,  $\phi(xw)$  et  $\phi(ww')$ . (nous avons au plus 3 couleurs interdites).
- $vv'$  avec la couleur  $c_3$  différente de  $c_1$ ,  $\phi(xw)$  et  $\phi(ww')$ . (nous avons au plus 3 couleurs interdites).
- $uu'$  avec la couleur  $c_4$  différente de  $c_3$ ,  $\phi(xz)$  et  $\phi(xw)$ . (nous avons au plus 3 couleurs interdites).
- $vw$  avec la couleur  $c_5$  différente de  $c_1$ ,  $c_4$  et  $\phi(xz)$ . (nous avons au plus 3 couleurs interdites).

Nous pouvons donc étendre la coloration  $\phi$  à  $H$ , d'où la contradiction.

- 2 Si  $x \neq y$ , alors soit  $N_H(y) = \{w, y', y''\}$  et  $N_H(x) = \{u, x', x''\}$ . (Voir Figure 3.7(b))

Par minimalité de  $H$ ,  $H' = H - \{uv, vw, vv', uu', ww'\}$  admet une 4-coloration injective des arêtes. Nous étendrons  $\phi$  à  $H$  en colorant les arêtes  $uv, vw$  et  $vv'$ , dans cette ordre, comme suit :

- $\phi(uv) = c_1$  avec  $c_1 \notin \{\phi(xx'), \phi(xx''), \phi(wy)\}$ .
- $\phi(vw) = c_2$  avec  $c_2 \notin \{\phi(yy'), \phi(yy''), \phi(xu)\}$ .

- $\phi(vv') = c_3$  avec  $c_3 \notin \{\phi(wy), \phi(xu), c_1\}$ .

Par conséquent, nous obtenons une coloration injective des arêtes partielle de  $H$ . Nous allons maintenant colorer  $ww'$  :

- (a) S'il existe une couleur  $c_4$  différente de  $\phi(yy'), \phi(yy''), c_1$  et  $c_3$ , alors on pose  $\phi(ww') = c_4$  et nous colorons  $uu'$  comme suit :
- Si nous pouvons colorer  $uu'$  avec une couleur  $c_5 \notin \{\phi(xx'), \phi(xx''), c_2, c_3\}$ , alors nous obtenons une coloration injective des arêtes de  $H$  ; contradiction.
  - Sinon, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $\phi(vw) = 2$ ,  $\phi(vv') = 3$ ,  $\phi(xx') = 1$  et  $\phi(xx'') = 4$ . Dans ce cas, par construction,  $c_1 = 2$  et  $c_1 \neq \phi(xu)$ . Par conséquent, nous permutons les couleurs de  $uv$  et  $vv'$  et attribuons la couleur 3 à  $uu'$ . Ainsi, nous obtenons une contradiction.
- (b) S'il n'existe pas une couleur différente de  $\phi(yy'), \phi(yy''), c_1$  et  $c_3$ , alors sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $c_1 = 1$ ,  $c_3 = 3$ ,  $\phi(yy') = 4$  et  $\phi(yy'') = 2$ .
- Si  $c_2 \neq c_3$ , alors par construction,  $c_2 = 1$  et  $1 \notin \{\phi(wy), \phi(xu)\}$ . Par conséquent, nous recolorons  $vv'$  avec la couleur 1 et attribuons la couleur 3 à  $ww'$ . Ensuite, nous colorons  $uu'$  par  $c_5$  différente de 1,  $\phi(xx')$  et  $\phi(xx'')$ , nous obtenons une contradiction.
  - Sinon, si  $c_2 = c_3 = 3$ , alors  $\phi(wy) \notin \{1, 3\}$  et  $1 \notin \{\phi(xx'), \phi(xx'')\}$ .
    - Si  $\phi(xu) = 1$ , nous décolorons  $vv'$  et on pose  $\phi(uu') = 1$ ,  $\phi(ww'') = 3$  et on colore  $vv'$  avec  $c_5 \notin \{\phi(wy), 3, 1\}$ . nous obtenons une contradiction.
    - Si  $\phi(xu) \neq 1$  alors, nous décolorons les arêtes  $vv'$  et  $vw$ . On pose  $\phi(ww') = 3$ ,  $\phi(vw) = \phi(vv') = 1$  et  $\phi(uu') = c_6 \notin \{\phi(xx'), \phi(xx''), 1\}$ . Nous obtenons une contradiction.

On peut étendre la coloration  $\phi$  à  $H$ , ce qui est une contradiction, donc le graphe  $H$  ne peut pas exister.

Conclusion : Pour tout graphe subcubique  $G$  de degré moyen maximum  $mad(G) < \frac{9}{4}$  on a  $\chi'_{inj}(G) \leq 4$ .  $\square$

**Corollaire 3.9.** *Pour tout graphe planaire subcubique de maille au moins 18 on a  $\chi'_{inj}(G) \leq 4$ .*

## Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux problèmes de la coloration injective des graphes en utilisant la méthode de déchargement. Nous avons d'abord présenté le principe de la méthode de déchargement à travers quelques propriétés des graphes planaires. Nous l'avons ensuite appliqué aussi aux problèmes de la coloration injective des sommets. Enfin, nous avons considéré la coloration injective des graphes subcubiques, nous avons montré que pour tout graphe  $G$  subcubique de degré moyen maximum inférieur strictement à  $\frac{9}{4}$ , l'indice chromatique injectif de  $G$  est inférieur ou égale à 4.

Nous avons vu que la coloration injective des arêtes d'un graphe ne correspond pas forcément à la coloration injective des sommets de son graphe représentatif des arêtes. La question qui se pose est la suivante :

**Question 1.** *Peut-t-on caractériser les graphes pour lesquels, l'indice chromatique injectif d'un graphe est égale au nombre chromatique injectif de son graphe représentatif des arêtes ? Autrement dit,  $\chi'_{inj}(G) = \chi_{inj}(L(G))$ .*

Étant donné l'existence d'exemples de graphes subcubiques ayant un indice chromatique injectif égal à 6 ; et qu'il n'existe pas d'exemples de graphes subcubiques ayant un indice chromatique injectif supérieur à 7, nous proposons la conjecture suivante :

**Conjecture 3.10.** *Pour tout graphe subcubique  $G$  ; on a  $\chi'_{inj}(G) = 6$ .*

Les résultats obtenus par Bu et Qi nous a permis de déduire des résultats sur les graphes planaires, il serait intéressant de répondre à la question suivante :

**Question 2.** *Quel est l'indice chromatique injectif  $\chi'_{inj}(G)$  des graphes planaire ?*

# Bibliographie

- [1] K. Appel and W. Haken. The existence of unavoidable sets of geographically good configurations. *Illinois J. Math.*, 20 :218–297, 1976. (Cité en page 14)
- [2] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable, part i : discharging. *Illinois J. Math.*, 21 :429–490, 1977. (Cité en page 1)
- [3] K. Appel, W. Haken, and J Koch. Every planar map is four colorable, part ii : Reducibility. *Illinois J. Math.*, 21 :491–567, 1977. (Cité en page 1)
- [4] C. Berge. *Graphs and hypergraphs*. Dunod, Paris, 1970. (Cité en page 14)
- [5] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*. Dunod University, 1973. (Cité en page 3)
- [6] C. Berge. *Graphes*. Gauthiers-Villars, 3rd edition, 1987. (Cité en page 3)
- [7] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory with Applications*. New York : Macmillan, 1976. (Cité en page 3)
- [8] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Théorie des Graphes*. 2008. (Cité en pages 11 et 15)
- [9] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 37 :194–197, 1941. (Cité en page 14)
- [10] Yuehua Bu. and Chentao Qi. Injective edge coloring of sparse graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 10(2) :1850022–1–1850022–16, 2018. (Cité en page 38)
- [11] D. W. Cranston and D. B. West. A guide to the discharging method. arXiv :preprint arXiv :1306. 4434, 2013. (Cité en page 17)
- [12] D.W. Cranston, S.J. Kim, and G. Yu. Injective colorings of graphs with low average degree. *Algorithmica*, 60 :553–568, 2011. (Cité en pages 27, 32, et 33)
- [13] R. Diestel. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics, 1997. (Cité en page 8)
- [14] R. Diestel. Graph theory. In Heidelberg Springer-Verlag, editor, *Graduate Texts in Mathematics*, volume 173, 2005. (Cité en page 3)
- [15] M. Domingos, J. Cardoso, J . Orestes Cerdeira, Pedro Cruz ., and Charles Dominic. Injective edge chromatic index of a graph. arXiv :1510. 02626v1 [math.CO], 2015. (Cité en pages 35, 36, et 37)

- [16] L. Euler. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, [solution d'un problème lié à la géométrie de la position]. *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, [Mémoires de l'académie impériale des sciences de Saint- Petersburg], 8 :128–140, 1736 (publication en 1741). (Cité en pages 1, 6, 7, et 11)
- [17] G. Hahn, J. Kratochvíl, J. Širáň, and D. Sotteau. On the injective chromatic number of graphs. *Discrete Math.*, 256 :179–192, 2002. (Cité en page 26)
- [18] F. Havet. Méthode de déchargement. <http://www-sop.inria.fr/members/Frederic.Havet/Cours/decharg.ps>. (Cité en page 17)
- [19] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph coloring problems*. Wiley- Interscience, New York, 1995. (Cité en pages 1 et 3)
- [20] T. Nandagopal, Kim . T, X. Gao, and V. Bharghavan. Achieving mac layer fairness in wireless packet networks. in *Proc. 6th ACM Conf. on Mobile Computing and Networking*, pages 87–98, 2000. (Cité en page 36)
- [21] R. Radoičić and G. Tóth. The discharging method in combinatorial geometry and the pach-sharir conjecture. *Contemporary Mathematics*, 453 :319–342, 2008. (Cité en page 17)
- [22] S. Ramanathan and E. L. Lloyd. Scheduling algorithms for multi-hop radio networks. in *IEEE ACM Trans. Networking*, 2 :166–177, 1993. (Cité en page 36)
- [23] N. Robertson, D. Sanders, P . Seymour, and R Thomas. The four- colour theorem. *J. of comb.theory*, 70(B) :2–44, 1997. (Cité en page 1)
- [24] W. P. Thurston. The geometry and topology of 3-manifolds, lecture notes. <http://www.msri.org/publications/books/gt3m>, 1980. (Cité en page 21)
- [25] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz.*, 3 :23–30, 1964. (Cité en page 15)
- [26] P. Wernicke. Über den kartographischen vierfarbensatz. *Mathematische Annalen*, (in german), 58(3) :413–426, 1904. (Cité en page 24)
- [27] D. B. West. *Introduction to Graph Theory*. Pearson education, 2001. (Cité en page 15)
- [28] P. Zhang. *Color-Induced Graph Colorings*. Springer Briefs in Mathematic, 2015. (Cité en page 15)
- [29] P. Zhang. *Graphs and digraphs*. 6 eme édition, Taylor et Francis Group, 2016. (Cité en pages 14 et 15)