

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BLIDA 1
FACULTÉ DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER
Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

Réalisé par

SAHLI Amina

Sur le thème :

**RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE QUELQUES
ÉQUATIONS INTÉGRALES NON LINÉAIRES**

Soutenu publiquement, le 10/ 07 / 2024 devant le jury composé de :

Mr. Manseur Salah	MCA	Univ. Blida1	Président
Mme. Betrouni Latifa	MCA	Univ. Blida1	Promotrice
Mr. Rouaki Mohamed	MCA	Univ. Blida1	Examineur

Année universitaire : 2023/2024

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	1
Abstract	2
Introduction	4
1 Rappels et Préliminaires	6
1.1 Définitions	6
1.2 Théorème de point fixe de Banach	8
1.3 Théorème de point fixe de Brower	9
1.4 Théorème de point fixe de Schauder	11
2 Généralités sur les équations intégrales non linéaires	13
2.1 Introduction	13
2.2 Classification des équations intégrales non-linéaires	14
2.2.1 Équations intégrales non-linéaires de Fredholm	14
2.2.2 Équations intégrales non-linéaires de Volterra	14
2.2.3 Équations intégrales mixtes de Volterra-Fredholm	14
2.2.4 Les équations intégro-différentielles	15
2.2.5 Équations intégrales singulières	16
2.3 La relation avec les équations différentielles	17
2.3.1 Problèmes avec conditions initiales	18

2.3.2	Problèmes aux limites de second type	18
2.4	Quelques méthodes de résolution directes	19
2.4.1	La méthode de réduction par dérivation	19
2.4.2	La méthode du calcul direct	21
2.4.3	La méthode de solution en série :	23
3	Théorèmes basiques d'existences et d'unicité	27
3.1	Application du théorème de Banach aux équations intégrales	30
3.1.1	Équations intégrales non linéaires de Fredholm	30
3.1.2	Équations intégrales non linéaires de Volterra	31
3.2	Application du théorème de Schauder aux équations intégrales	33
3.2.1	Équations intégrales non-linéaires de Fredholm	33
3.2.2	Équations intégrales non-linéaires de Volterra	34
3.3	Existence de solutions dans les espaces de Hölder	34
4	Méthodes de résolution approchée	41
4.1	Remplacement de l'intégrale par une somme finie	41
	Conclusion	52
	Bibliographie	53
	Annexes	55

Remerciements

je voudrais remercier avant tout Allah qui m'a donné le courage et la force pour réaliser ce travail.

Ce travail n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide de l'encadrante Mme **Latifa Betrouni**, je la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant la préparation de ce mémoire.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui m'ont honoré en acceptant de juger ce travail.

Je remercie ma famille, mes collègues, mes amis et tous ceux qui m'ont soutenu.

Dédicaces

Je dédie ce modest travail :

A ma très chère mère, mon très chère père.

A ma sœur : "**Fatmazohra**".

A mes frères.

A mes amis que j'ai connu jusqu'à maintenant.

A mes cousines, et ma grande famille.

Résumé

Les équations intégrales non linéaires modélisent plusieurs problèmes liées aux sciences naturelles , la biologie, la médecine et la physique etc. Des difficultés considérables peuvent survenir dans le calcul des solutions de ces équations qui parfois n'existe même pas. Le but de ce mémoire est de revoir quelques théorèmes d'existence et d'unicité qui existe dans la littérature ancienne et récente d'une part et de chercher les méthodes de résolution approchées qui s'adaptent au cas non linéaire comme les méthodes de quadrature par exemple.

Mots clés : *Equations intégrales non linéaires – Théorèmes de point fixe- Méthodes de quadrature..*

Abstract

Nonlinear integral equations model numerous problems in natural sciences, biology, medicine, physics, etc. Significant difficulties can arise when calculating solutions to these equations, which may not even exist. The aim of this thesis is, on the one hand, to review some existence and uniqueness theorems from the recent literature and, on the other hand, to look for approximate solution methods suitable for nonlinear cases, such as quadrature methods.

Keywords : *Nonlinear integral equations – Fixed point theorems – Quadrature methods..*

الملخص

تقوم المعادلات التكاملية غير الخطية بنمذجة عدّة إشكاليات متعلّقة بالعلوم الطبيعية، الأحياء، الطبّ والفيزياء... الخ. يمكن أن تنشأ صعوبات كبيرة في حساب حلول هذه المعادلات؛ والتي أحياناً تكون غير موجودة من الأساس. فالهدف من هذه المذكرة هو مراجعة بعض نظريات الوجود والتفرد الموجودة في الأدب الحديث من ناحية، والبحث عن أساليب حل تقريبية للحالة غير الخطية مثل طرق التكامل العددي على سبيل المثال.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التكاملية غير الخطية – نظريات النقطة الثابتة – طرق التربيع.

Introduction

Dans les années 1900, les mathématiciens ont commencé à étudier de manière plus systématique les différents types d'équations intégrales, en particulier les équations de Volterra et de Fredholm.

Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue $\varphi(x)$ à déterminer apparaît sous le signe intégral. Le sujet des équations intégrales est l'un des outils mathématiques les plus utiles en mathématiques pures et appliquées. Ses applications sont importants dans de nombreux problèmes physiques[14], comme le modèle de population de Volterra qui s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial T} = aP - bP^2 - cP \int_0^T P(x)dx, \quad P(0) = P_0.$$

Où $P = P(T)$ désigne la population au temps T , a , b et c sont des constantes et des paramètres positifs, $a > 0$ est le coefficient de natalité, $b > 0$ est le coefficient de surpeuplement, $c > 0$ est le coefficient de toxicité, et P_0 est la population initiale. Le coefficient c indique le comportement essentiel de l'évolution de la population avant que son niveau ne tombe à zéro à long terme.[4]

Une équation intégrale non linéaire est une équation intégrale dans laquelle la fonction inconnue apparaît dans l'équation de manière non linéaire. La non-linéarité peut se produire soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de l'intégrande, ou simultanément à ces deux emplacements. Elle conduit à une étonnante variété de phénomènes nouveaux liés aux caractéristiques des solutions et aux méthodes de résolution.[6]

Dans ce mémoire, on utilise les méthodes de résolutions directes : dérivation, en série, et

les méthodes numériques , pour résoudre des équations intégrales non linéaires.

On va étudier quelques théorèmes de point fixe (les théorèmes de Schauder et de Banach), pour montrer l'existence et l'unicité de solution par le théorème de Banach, et montrer uniquement l'existence par le théorème de Schauder.

Notre objectif dans ce mémoire est de présenter quelques méthodes de résolution des équations intégrales non linéaires de Fredholm et de Volterra.

Notre travail est présenté en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre on donne les rappels de topologie, de théorie de point fixe et d'analyse fonctionnelle.

Dans le deuxième chapitre, nous donnerons une classification des équations intégrales non linéaires avec quelques exemples et on va présenter la relation avec les équations différentielle et quelques méthodes de résolution directes.

Dans le troisième chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales non linéaires de Fredholm et Volterra par les théorèmes de point fixe : Banach et Schauder, et étudier l'existence de solutions dans les espaces de Hölder.

Dans le quatrième chapitre, on va appliquer la méthode approchée de remplacement de l'intégrale par une somme finie.

Rappels et Préliminaires

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 (*Espace de Banach*)

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Définition 1.1.2 *On définit l'espace $C[a, b]$ par l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ muni de la norme*

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Définition 1.1.3 (*L'espace $L^p(\Omega)$*) *Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on pose*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$, on a $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, vérifiant

$$\exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c, \text{ p.p. sur } \Omega.$$

La norme est notée par

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{c > 0, \quad |f(x)| \leq c, \quad \text{p.p. sur } \Omega\}.$$

Définition 1.1.4 (*Les espaces de Hölder*)

Soit $[a, b]$ est un intervalle fermé dans \mathbb{R} , par $C[a, b]$ on note l'espace des fonctions continues

sur $[a, b]$ équipé de la norme suprême ;

c.à.d

$$\|x\|_\infty = \sup_{x \in C[a,b]} \{|x(t)| : t \in [a, b]\}.$$

Pour $0 < \alpha < 1$ fixé, par $H_\alpha[a, b]$ nous désignerons l'espace des fonctions réelles x définies sur $[a, b]$ et satisfaisant la condition de Hölder, c'est-à-dire les fonctions x pour lesquelles il existe une constante H_x^α tel que

$$|x(t) - x(s)| \leq H_x^\alpha |t - s|^\alpha, \quad (1.1)$$

pour tout $t, s \in [a, b]$. On prouve facilement que $H_\alpha[a, b]$ est un sous-espace linéaire de $C[a, b]$. Dans la suite, pour $x \in H_\alpha[a, b]$, par H_x^α on désignera la plus petite constante possible pour laquelle l'inégalité (1.1) est satisfaite.

Plus précisément, nous posons

$$H_x^\alpha = \sup \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha} : t \in [a, b], t \neq s \right\},$$

L'espace $H_\alpha[a, b]$ avec $0 < \alpha < 1$ muni de la norme

$$\|x\|_\alpha = |x(a)| + \sup \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha} : t \in [a, b], t \neq s \right\}.$$

pour $x \in H_\alpha[a, b]$.

Remarque 1.1.1 L'espace de Hölder est noté $C^{0,\alpha}(\Omega)$ dans d'autre référence. Voir[11]

Nous introduisons le théorème suivant qui assure la relative compacité dans un espace de Hölder.

Théorème 1.1.2 Supposons que $0 < \alpha < \beta < 1$ et que A est un sous-ensemble borné de $H_\beta[a, b]$ (cela signifie que $\|x\|_\beta \leq M$ pour une certaine constante $M > 0$, pour tout $x \in A$) Alors A est un sous-ensemble relativement compact de $H_\alpha[a, b]$.

La preuve de ce théorème repose sur les lemmes suivants

Lemme 1.1.1 Pour $x \in H_\alpha[a, b]$ avec $0 < \alpha \leq 1$, l'inégalité suivante est satisfaite

$$\|x\|_\infty \leq \max(1, (b - a)^\alpha) \|x\|_\alpha.$$

Lemme 1.1.2 *Pour $0 < \alpha < \gamma \leq 1$, nous avons*

$$H_\gamma[a, b] \subset H_\alpha[a, b] \subset C[a, b].$$

De plus, pour $x \in H_\gamma[a, b]$ l'inégalité suivante est vraie

$$\|x\|_\alpha \leq \max(1, (b-a)^{\gamma-\alpha}) \|x\|_\gamma.$$

Rappelons aussi la définition d'une contraction qui sera utilisée dans le théorème de Banach

Définition 1.1.5 *Soit E un espace de Banach et T un opérateur borné sur E .*

$$T : E \rightarrow E$$

On dit que T est un opérateur de contraction s'il existe une constante positive $\alpha < 1$ telle que

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \leq \alpha \|f_1 - f_2\|$$

pour tout f_1, f_2 dans E .

1.2 Théorème de point fixe de Banach

Théorème 1.2.1 *Soit E un espace de Banach et $A : E \rightarrow E$ un opérateur de contraction. Alors A admet un unique point fixe dans E .*

Théorème 1.2.2 *Soit E un espace de Banach et $A : E \rightarrow E$ un opérateur et*

$$A^n = \underbrace{A \circ A \circ \dots \circ A}_{n \text{ fois}}$$

est un opérateur de contraction. Alors A admet un point fixe unique dans E .

Preuve.

Existence de point fixe de A :

Sous les conditions de théorème (1.2.2), et appliquant le théorème (1.2.1) à l'opérateur $A^n : E \rightarrow E$ et A^n est une contraction.

$\exists! u_0 \in E$ telle que $A^n u_0 = u_0$

On a

$$A(A^n u_0) = u_0$$

$$\underbrace{A \circ A \circ \dots \circ A}_{n+1 \text{ fois}}(u_0) = Au_0$$

donc

$$A^n(Au_0) = Au_0$$

Comme A^n admet un point fixe unique u_0 , alors $Au_0 = u_0$.

Donc u_0 est un point fixe de A

Unicité de point fixe de A :

Supposons que $u_1, u_2 \in E$ deux points fixes de A tel que $u_1 \neq u_2$

$$Au_1 = u_1$$

$$Au_2 = u_2$$

Donc

$$A^n(Au_1) = A^n(u_1)$$

$$A^n(Au_2) = A^n(u_2)$$

Or A^n est une de contraction

$$\|A^n u_1 - A^n u_2\|_E \leq k \|u_1 - u_2\|_E$$

$$\|u_1 - u_2\| \leq k \|u_1 - u_2\|_E, \quad 0 < k < 1$$

Comme $u_1 \neq u_2$ i.e. $\|u_1 - u_2\| \neq 0$

donc en divisant sur $\|u_1 - u_2\|_E$ on obtient $1 \leq k$ absurde.

□

1.3 Théorème de point fixe de Brower

Théorème 1.3.1 [5] *Soit C un compact, convexe non vide de \mathbb{R}^N et $f : C \rightarrow C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C .*

Pour la preuve nous avons besoin des lemmes suivantes :

Lemme 1.3.1 Soit $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un fonction de C^∞ . Considérez le déterminant

$$A_i = \det [D_0F, \dots, D_{i-1}F, D_{i+1}F, \dots, D_nF]$$

dont les colonnes sont

$$D_iF = (\partial F_1/\partial x_{i+1}, \dots, \partial F_n/\partial x_{i+1}).$$

Alors

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i D_i A_i = 0$$

où $D_i A_i = \partial A_i / \partial x_{i+1}$.

Le lemme suivant est le théorème de Brouwer pour les applications de classe C^∞

Lemme 1.3.2 Soit $T : B \rightarrow B$, où $B = \bar{B}_1(0, \mathbb{R}^n)$, est une fonction de C^∞ . Alors T a au moins un point fixe.

Preuve. Étape 1. Supposons que $D = B = \bar{B}_1(0; \mathbb{R}^n)$. Laisser

$$T(u) = (t_1(u), t_2(u), \dots, t_n(u))$$

où $t_i : B \rightarrow [-1, 1], i = 1, 2, \dots, n$, sont des fonctions continues. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass, chaque fonction t_i est la limite uniforme d'une séquence $(t_i^k)_{k \geq 1}$ de fonctions $t_i^k : B \rightarrow [-1, 1]$ de classe C^∞ satisfaisant

$$|t_i^k(u)| \leq |t_i(u)|$$

pour tout $u \in B, i = 1, 2, \dots, n$ et $k = 1, 2, \dots$. Définissez $T_k : B \rightarrow B$ par

$$T_k(u) = (t_1^k(u), t_2^k(u), \dots, t_n^k(u)).$$

Alors

$$T(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(u)$$

uniformément sur B . D'après le lemme 1.3.2, pour chaque k il existe un $u_k \in B$ avec

$$T_k(u_k) = u_k.$$

Puisque B est compact, (u_k) a une sous-séquence $(u_{k_j})_{j \geq 1}$ convergente vers un élément $u_0 \in B$. Alors

$$\begin{aligned} |T(u_0) - u_0| &\leq |T(u_0) - T(u_{k_j})| + |T(u_{k_j}) - T_{k_j}(u_{k_j})| \\ &+ |u_{k_j} - u_0| \rightarrow 0 \text{ si } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc $T(u_0) = u_0$.

Étape 2. Le cas $D = \bar{B}_r(0; \mathbb{R}^n)$ peut être réduit au précédent par le changement de variables $v = r^{-1}u$ et en considérant l'opérateur $T' : B \rightarrow B$,

$$T'(v) = r^{-1}T(rv) \quad (v \in B).$$

Étape 3. Considérons maintenant le cas général. Nous montrons d'abord qu'il existe une extension continue \tilde{T} de T à tout l'espace \mathbb{R}^n avec $\tilde{T}(\mathbb{R}^n) \subset D$. En effet, D étant compact dans \mathbb{R}^n , on peut choisir un sous-ensemble dénombrable et dense $\{u_j : j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ de D . Pour tout $u \notin D$ et tout j nous laissons

$$\psi_j(u) = \max \left\{ 2 - \frac{|u - u_j|}{d(u, D)}, 0 \right\}.$$

Ici

$$d(u, D) = \inf\{|u - v| : v \in D\}.$$

Ensuite l'application $\tilde{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow D$ donné par

$$\tilde{T}(u) = \begin{cases} T(u) & \text{if } u \in D, \\ \left(\sum_{j \geq 1} 2^{-j} \psi_j(u) \right)^{-1} \sum_{j \geq 1} 2^{-j} \psi_j(u) T(u_j) & \text{if } u \notin D \end{cases}$$

est l'extension continue souhaitée de T . Choisissez maintenant n'importe quel $r > 0$ suffisamment grand pour que $D \subset \bar{B}_r(0; \mathbb{R}^n)$ et définissez

$$S : \bar{B}_r(0; \mathbb{R}^n) \rightarrow D \subset \bar{B}_r(0; \mathbb{R}^n), \quad S(u) = \tilde{T}(u).$$

Nous sommes avec S dans le cas considéré à l'étape 2. Il existe donc un $u \in \bar{B}_r(0; \mathbb{R}^n)$ avec $S(u) = u$, c'est-à-dire $\tilde{T}(u) = u$. Puisque $\tilde{T}(\mathbb{R}^n) \subset D$, nous avons $u \in D$ et donc $T(u) = u$.
□

1.4 Théorème de point fixe de Schauder

Le théorème de point fixe de Schauder est une généralisation de théorème de Brouwer, il s'énonce ainsi

Théorème 1.4.1 [5] *Soit E un espace de Banach, $K \subset E$ un ensemble compact convexe non vide et soit $T : K \rightarrow K$ est un opérateur continu. Alors T possède au moins un point fixe.*

Preuve. Évidemment, T est complètement continu. Par conséquent il existe une suite d'opérateurs continus $T_j : K \rightarrow K$ de rang fini tel que

$$T(u) = \lim_{j \rightarrow \infty} T_j(u)$$

uniformément sur K . Soit $n = n(j)$ la dimension du sous-espace X_n généré par $T_j(K)$. Nous avons

$$T_j : K \cap X_n \rightarrow K \cap X_n.$$

Par conséquent d'après le théorème de Brouwer il existe $u_j \in K \cap X_n$ avec

$$T_j(u_j) = u_j$$

Puisque K est compact, il existe une sous-séquence de (u_j) convergente vers un élément $u \in K$. Comme à l'étape 1 de la preuve du théorème de Brouwer, nous pouvons conclure que $T(u) = u$. □

Généralités sur les équations intégrales non linéaires

2.1 Introduction

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnue, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, apparaît sous le signe intégral. Cette définition générale tient compte de beaucoup de différentes formes spécifiques et dans la pratique plusieurs types distincts surgissent. Pour cette raison, et afin de recouvrir les grands axes de notre thématique sans s'impliquer dans des situations particulièrement inadéquates, nous allons nous intéresser beaucoup plus aux équations intégrales non linéaires de la forme [3].

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t, \varphi(t)) dt \quad (2.1)$$

Ainsi, on peut distinguer principalement les cas suivants

- Si $K(x, t, \varphi(t)) = k(x, t)\varphi(t)$, alors l'équation est linéaire.
- Si $K(x, t, \varphi(t)) \neq k(x, t)\varphi(t)$, alors l'équation non-linéaire.
- Si $h(x) = 0$, l'équation s'appelle équation intégrale de première espèce.
- Si $h(x) = C$ (où C est une constante non nulle), l'équation s'appelle équation intégrale de seconde espèce.
- Si $h(x)$ est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de $[a, b]$, elle est dite de troisième espèce.
- Si $a(x) = a$, $b(x) = b$ telle que a et b sont des constantes, l'équation est appelée équation de Fredholm.
- Si $a(x) = a$, $b(x) = x$, x est une variable, l'équation est appelée équation de Volterra.

2.2 Classification des équations intégrales non-linéaires

2.2.1 Équations intégrales non-linéaires de Fredholm

On appelle une équation intégrale non-linéaire de Fredholm de première espèce de la forme :

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

et de seconde espèce de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt, \quad \text{avec } \lambda \text{ un paramètre.}$$

Exemple 2.2.1 On présente ici l'exemple suivant qui sera aussi traité dans la section (2.4.2) par la méthode du calcul direct :

$$\varphi(x) = \frac{9}{5}x + \frac{1}{3} \int_{-1}^1 xt^2 \varphi^2(t) dt.$$

2.2.2 Équations intégrales non-linéaires de Volterra

On appelle une équation intégrale non-linéaire de Volterra de première espèce de la forme :

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt, \quad a \leq t \leq x \leq b.$$

et de seconde espèce de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt, \quad a \leq t \leq x \leq b, \quad \text{et } \lambda \text{ un paramètre.}$$

Exemple 2.2.2 On présente ici l'exemple suivant qui sera aussi traité dans la section (2.4.3) par la méthode de solution en série :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x - x^2) + \cos x - \sin x - \frac{1}{4} \sin(2x) + \int_0^x (x - t) \varphi^2(t) dt.$$

2.2.3 Équations intégrales mixtes de Volterra-Fredholm

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm apparaissent dans la littérature sous deux formes à savoir

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x, t) \varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t) \varphi(t) dt.$$

Et

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \int_a^b K(r, t) \varphi(t) dt dr.$$

où $f(x)$ et $K(x, t)$ sont des fonctions continues, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ sont des paramètres.

Nous avons aussi les équations intégrales mixtes de Volterra-Fredholm à deux variables et leurs forme est :

$$\varphi(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^t \int_{\omega} F(x, t, r, s) \varphi(r, s) dr ds, (x, t) \in \Omega \times [0, T]$$

où $f(x, t)$ et $F(x, t, r, s)$ sont des fonctions continues sur $D = \Omega \times [0, T]$, où Ω est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3, \lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.2.3 Les équations suivantes sont des exemples d'équations mixtes :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= xe^x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \int_0^1 r\varphi(t) dt dr \\ \varphi(x) &= \cos x - \sin x - 2 + \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^\pi (x-t)\varphi(t) dt \end{aligned}$$

voir[4] pour plus d'exemples.

2.2.4 Les équations intégro-différentielles

Les équations intégro-différentielles sont des équations où la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît sous le signe de dérivée et sous le signe d'intégral.

Équations intégro-différentielles de Fredholm

l'équation intégro-différentielle de Fredholm apparaît sous la forme

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) F(\varphi(t)) dt, \quad x \in [a, b].$$

Où $\varphi^{(n)}(x)$ indique la nième dérivée de $\varphi(x)$.

Exemple 2.2.4 Voici deux exemples des équations intégro-différentielles de Fredholm :

$$\begin{cases} \varphi''(x) = 1 - e - e^x + \int_0^1 \varphi(t) dt, \\ \varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \end{cases}$$

On a aussi

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \cos x - \frac{\pi^2}{4} + \int_0^\pi xt\varphi^2(t) dt, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Équations intégro-différentielles de Volterra

l'équation intégro-différentielle de Volterra apparaît sous la forme

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)F(\varphi(t))dt$$

Où $\varphi^{(n)}(x)$ indique la nième dérivée de $\varphi(x)$.

Exemple 2.2.5 Voici deux exemples des équations intégro-différentielles de Volterra :

$$\begin{cases} \varphi'(x) = 1 - \int_0^x \varphi^2(t)dt, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

On a aussi

$$\begin{cases} \varphi'(x) = -\frac{2}{3}(2 \sin x + \sin(2x) + \int_0^x \cos(x - t)\varphi^2(t)dt), \\ \varphi(0) = 1. \end{cases}$$

2.2.5 Équations intégrales singulières

Les équations intégrales non-linéaires de Volterra du première espèce

$$f(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t)F(\varphi(t))dt,$$

Ou du second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t)F(\varphi(t))dt,$$

Où $F(\varphi(t))$ est une fonction non-linéaire de $\varphi(t)$, Sont appelées singulière si l'une des limites de l'intégration $g(x)$, $h(x)$ ou les deux sont infinies. De plus, les deux équations précédentes sont appelées singulières si le noyau $K(x, t)$ est non borné en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration.[4]

Équation intégrale non linéaire d'Abel

[4] La forme standard de l'équation intégrale non linéaire d'Abel est donnée par

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} F(\varphi(t))dt.$$

Et l'équation intégrale non linéaire généralisée d'Abel est de la forme

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} F(\varphi(t))dt, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Exemple 2.2.6 [4] Voici un exemple d'une équation intégrale non linéaire singulière d'Abel où l'on a la valeur de $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{2} + 2x + \frac{\pi}{4}x^2 = \int_0^x \frac{1}{(x^2 - t^2)^{1/2}} \varphi^2(t) dt.$$

2.3 La relation avec les équations différentielles

Les équations intégrales et les équations différentielles sont deux types d'équations utilisées pour modéliser des phénomènes dans divers domaines tels que la physique, l'ingénierie et l'économie. Elles sont étroitement liées et, dans de nombreux cas, peuvent être transformées l'une en l'autre.

Lemme 2.3.1 Pour toute fonction $u(x)$,

$$\int_a^x \int_a^s u(x) dt ds = \int_a^x (x-t)u(t) dt. \quad (2.2)$$

En générale, on a

$$\underbrace{\int_a^x \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{n-1}}}_{n \text{ fois}} u(x_n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-x_1)^{n-1} u(x_1) dx_1. \quad (2.3)$$

Preuve. Soit $g(s) = \int_a^s u(t) dt$,

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_a^s u(t) dt ds &= \int_a^x g(s) ds = \int_a^x 1 \cdot g(s) ds \\ &= [sg(s)]_a^x - \int_a^x s \cdot g'(s) ds \\ &= xg(x) - ag(a) - \int_a^x su(s) ds \\ &= x \int_a^x u(t) dt - 0 - \int_a^x tu(t) dt \\ &= \int_a^x (x-t)u(t) dt. \end{aligned}$$

□

2.3.1 Problèmes avec conditions initiales

[3] On considère le problème de Cauchy de second ordre suivant

$$\begin{cases} u''(x) = g(x, u(x)), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, & u'(0) = u'_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

L'intégration des deux cotés de l'équation différentielle associée à (2.4) de zéro à x , donne

$$u'(x) = u'_0 + \int_0^x g(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

En intégrant une seconde fois,

$$u(x) = u_0 + u'_0 x + \int_0^x \int_0^s g(t, u(t))dt ds$$

En utilisant la relation (2.2), on obtient

$$u(x) = u_0 + u'_0 x + \int_0^x (x-t)g(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

C'est l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

2.3.2 Problèmes aux limites de second type

[3] On considère le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} u''(x) = g(x, u(x)), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, & u(1) = u_1 \end{cases} \quad (2.5)$$

De la même manière, on intègre les deux cotés de zéro à x , on obtient

$$u'(x) = c + \int_0^x g(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

et

$$u(x) = u_0 + cx + \int_0^x (x-t)g(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.6)$$

Pour déterminer la constante c , on prend $x = 1$ et on utilise la condition $u(1) = u_1$, ce qui donne

$$c = u_1 - u_0 - \int_0^1 (1-t)g(t, u(t))dt,$$

Ainsi, l'équation (2.6) devient

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + (u_1 - u_0)x + \int_0^x (x-t)g(t, u(t))dt - x \int_0^1 (1-t)g(t, u(t))dt \\ &= u_0 + (u_1 - u_0)x + \int_0^x t(1-x)g(t, u(t))dt - \int_x^1 x(1-t)g(t, u(t))dt \end{aligned}$$

qui s'écrit encore comme une équation intégrale de Fredholm de la forme

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)x - \int_0^1 k(x, t)g(t, u(t))dt \quad (2.7)$$

où

$$k(x, t) = \begin{cases} t(1-x), & t \leq x \\ x(1-t), & t \geq x \end{cases} \quad (2.8)$$

2.4 Quelques méthodes de résolution directes

2.4.1 La méthode de réduction par dérivation

L'une des méthodes utilisées pour résoudre les équations intégrales est la conversion de l'équation intégrale en une équation différentielle équivalente. La conversion est réalisée en utilisant la règle de Leibnitz pour la différenciation des intégrales.

La règle de Leibnitz : Soit $f(x, t)$ continue et $\frac{\partial f}{\partial x}$ continues dans un domaine du plan (x, t) qui comprend rectangle, et soit

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, t)dt \quad (2.9)$$

La fonction dérivée de $F(x)$ existe et elle donné par :

$$F'(x) = h'(x)f(x, h(x)) - g'(x)f(x, g(x)) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (2.10)$$

Si $g(x) = a$ et $h(x) = b$ tel que a et b sont des constantes, Alors la règle de Leibnitz se réduit à

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (2.11)$$

Exemple 2.4.1 [4] On considère l'équation de Volterra suivante :

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi^2(t)dt, \quad |x| < 1. \quad (2.12)$$

Supposons que

$$y(x) = \int_0^x \varphi^2(t) dt$$

En appliquant la règle de dérivation de Leibnitz on obtient

$$y'(x) = \varphi^2(x),$$

$$\varphi(x) = \sqrt{y'(x)},$$

En remplaçant dans (2.12) on trouve

$$\sqrt{y'(x)} = 1 + y(x)$$

Alors

$$\begin{cases} y'(x) - 2y(x) - y^2(x) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

on appelle cette équation équation différentielle de Riccati.

Soit $y_p(x) = -1$ une solution particulière de :

$$u(x) = y(x) - y_p(x).$$

C-à-d

$$y(x) = u(x) - 1.$$

Donc

$$u'(x) - 2(u(x) - 1) - (u^2(x) - 2u(x) + 1) = 1.$$

Alors

$$u'(x) - u^2(x) = 0.$$

On pose $z(x) = \frac{1}{u(x)}$, alors

$$z'(x) = -1.$$

Solution de cette équation différentielle est :

$$z(x) = -x + c.$$

Donc

$$u(x) = \frac{1}{c - x}.$$

la solution générale est

$$y(x) = \frac{1}{c-x} - 1.$$

En utilisant le fait que $y(0) = 0$, on obtient

$$c = 1.$$

D'où la solution

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Exemple 2.4.2 [10] On considère l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^x \sqrt{1+y^2} dx = 2\sqrt{x} + y$$

En appliquant la règle de dérivation de Leibnitz on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+y^2(x)} &= \frac{1}{\sqrt{x}} + y'(x) \\ 1+y^2(x) &= \frac{1}{x} + y'^2 + 2\frac{y'(x)}{\sqrt{x}} \\ 2\frac{y'(x)}{\sqrt{x}} &= 1 - \frac{1}{x} \\ y'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ y(x) &= \int (\frac{1}{2}\sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}}) dt + C. \end{aligned}$$

Alors la solution est

$$y(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + C.$$

2.4.2 La méthode du calcul direct

La méthode du calcul direct sera appliquée pour résoudre les équations intégrales non linéaires de Fredholm. Elle aborde les équations intégrales non linéaires de Fredholm de manière directe et donne la solution sous forme exacte et non sous la forme série. Il est important de souligner que cette méthode sera appliquée pour les noyaux qui sont dégénérés où séparables de la forme

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(t). \tag{2.13}$$

avec g_k, h_k des fonctions. La méthode de calcul direct peut être appliquée comme suit :
 Tout d'abord nous remplaçons (2.13) dans l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)F(\varphi(t))dt \quad (2.14)$$

En suite, Cette substitution donne

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) &+ \lambda g_1(x) \int_a^b h_1(t)F(\varphi(t))dt \\ &+ \lambda g_2(x) \int_a^b h_2(t)F(\varphi(t))dt + \dots \\ &+ \lambda g_n(x) \int_a^b h_n(t)F(\varphi(t))dt \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ainsi, Chaque intégrale du côté droit de (2.15) ne dépend que de la variable t avec limites d'intégration constantes. L'équation (2.15) devient

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \alpha_1 g_1(x) + \lambda \alpha_2 g_2(x) + \dots + \lambda \alpha_n g_n(x) \quad (2.16)$$

tel que

$$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)F(\varphi(t))dt, \quad 1 \leq i \leq n.$$

la substitution donne un système de n équations algébriques qui peuvent être résolues pour déterminer les constantes $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$. En utilisant les valeurs numériques obtenues de α_i dans (2.16). La solution $\varphi(x)$ de l'équation intégrale non linéaire de Fredholm (2.14) s'ensuit immédiatement. Il est intéressant de souligner que nous pouvons obtenir plus d'une valeur pour un ou plusieurs $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$. Ceci est normal car l'équation est non linéaire et la solution $\varphi(x)$ n'est pas nécessairement unique pour les problèmes non linéaires.

Exemple 2.4.3

$$\varphi(x) = \frac{9}{5}x + \frac{1}{3} \int_{-1}^1 xt^2\varphi^2(t)dt \quad (2.17)$$

En procédant comme précédemment, nous réécrivons comme suit :

$$\varphi(x) = \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{3}\alpha \right) x \quad (2.18)$$

telle que

$$\alpha = \int_{-1}^1 t^2\varphi^2(t)dt \quad (2.19)$$

Pour déterminer α , nous substituons (2.18) dans (2.19) pour obtenir

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{-1}^1 \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{3}\alpha \right)^2 t^4 dt \\ \alpha &= \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{3}\alpha \right)^2 \int_{-1}^1 t^4 dt \end{aligned} \quad (2.20)$$

où, on intègre et nous obtenons

$$\frac{2}{45}\alpha^2 - \frac{13}{25}\alpha + \frac{162}{125} = 0. \quad (2.21)$$

Et on résolvant l'équation (2.21), nous obtenons

$$\alpha_1 = \frac{18}{5}, \quad \alpha_2 = \frac{81}{10} \quad (2.22)$$

Alors les deux solutions exactes

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 3x, \\ \varphi_2(x) &= \frac{9}{2}x. \end{aligned}$$

2.4.3 La méthode de solution en série :

Équation intégrale de Volterra

On rappelle la forme générale de série de Taylor en $x = 0$ qui peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.23)$$

Supposons que la solution $\varphi(x)$ de l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) F(\varphi(t)) dt \quad (2.24)$$

est analytique, et possède la série de Taylor (2.23), où les coefficients sont déterminés de manière récurrente. En remplaçant (2.23) dans les deux côtés de (2.24), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x, t) \left(F \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \right) dt. \quad (2.25)$$

Pour simplifier, utilisons

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots &= T(f(x)) \\ &+ \lambda \int_0^x K(x, t) (F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)) dt. \end{aligned} \quad (2.26)$$

où $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$ L'équation intégrale sera convertie en une intégrale traditionnelle, où lieu d'intégrer le terme non-linéaire $F(\varphi(t))$, les termes de la forme $t^n, n \geq 0$ seront intégrés. Nous intégrons d'abord le membre de droit de l'intégrale (2.25) et

nous collectons les coefficients de x . Nous assimilons en suite les coefficients des mêmes puissances de x des deux côtés de l'équation résultante pour obtenir une relation de récurrence dans $a_j, j \geq 0$.

la résolution de la relation de récurrence conduit à une détermination complète des coefficients $a_j, j \geq 0$. Après avoir déterminé les coefficients $a_j, j \geq 0$. La solution en série suit immédiatement après la substitution des coefficients dérivés dans (2.23). La solution exacte peut être obtenue si une telle une solution exacte existe. Si une solution exacte ne peut pas être obtenue, la série obtenue peut être utilisée à des fins numériques. Dans ce cas, plus nous déterminons de termes, plus atteignons un niveau de précision élevé. [4]

Exemple 2.4.4 Nous considérons l'équation non-linéaire de Volterra.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x - x^2) + \cos x - \sin x - \frac{1}{4} \sin(2x) + \int_0^x (x - t)\varphi^2(t)dt \quad (2.27)$$

On remplace la série (2.23) par les deux côtés de (2.27), en notant que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \frac{1}{2}(x - x^2) + \cos x - \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(2x) + \int_0^x (x - t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots)^2dt \quad (2.28)$$

Le produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$$

$$C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

on obtient :

$$(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots)^2 = a_0^2 + 2a_0a_1t + (2a_0a_2 + a_1^2)t^2 + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)t^3 + \dots$$

et en utilisant la série de Taylor pour $\cos x, \sin x, \sin(2x)$:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ \sin(2x) &= 2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

En intégrant on aura

$$\begin{aligned} &\int_0^x (x - t)(a_0^2 + 2a_0a_1t + (2a_0a_2 + a_1^2)t^2 + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)t^3 + \dots)dt \\ &= \frac{1}{2}a_0^2x^2 + \frac{1}{3}a_0a_1x^3 + \left(\frac{1}{6}a_0a_2 + \frac{1}{12}a_1^2\right)x^4 + \frac{1}{10}(a_0a_3 + a_1a_2)x^5 + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

Et en égalent les coefficients de puissances similaires de x il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1 \\
 a_1 &= -1 \\
 a_2 &= -1 + \frac{1}{2!}a_0^2 &= -\frac{1}{2!} \\
 a_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a_0a_1 &= \frac{1}{3!} \\
 a_4 &= \frac{1}{4!} + \frac{1}{6}a_0a_2 + \frac{1}{12}a_1^2 &= \frac{1}{4!} \\
 a_5 &= -\frac{3}{40} + \frac{1}{10}a_1a_2 + \frac{1}{10}a_0a_3 &= -\frac{1}{5!} \\
 &\vdots \\
 a_{2n} &= (-1)^n \frac{1}{2n!} \\
 a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{1}{2n+1!}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

et ainsi de suite. La solution sous forme série est donnée par

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots\right) - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \dots\right) \tag{2.31}$$

qui converge vers une solution exacte

$$\varphi(x) = \cos x - \sin x. \tag{2.32}$$

Équation intégrale de Fredholm

Nous supposons que la solution $\varphi(x)$ de l'équation de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t)F(\varphi(t))dt. \tag{2.33}$$

existe et est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée dans (2.23) où les coefficients seront déterminés de façon récurrente, la substitution (2.23) des deux cotés de (2.33) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^1 K(x, t) \left(F \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \right) dt \tag{2.34}$$

pour simplifier

$$\begin{aligned}
 a_0 &+ a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \\
 &= T(f(x)) + \lambda \int_0^1 K(x, t)(F(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots))dt
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

puis nous suivons les mêmes étapes que pour la méthode de Volterra de seconde espèce dans le cas non linéaire.

Exemple 2.4.5 [4] *Nous considérons l'équation de Fredholm*

$$\varphi(x) = e^x + \frac{1}{16}(3 - e^2) + \frac{1}{4} \int_0^1 (x - t)\varphi^2(t)dt \quad (2.36)$$

En substituant la série (2.23) aux deux côtés de (2.36), on obtient

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = e^x + \frac{1}{16}(3 - e^2) + \frac{1}{4} \int_0^1 (x - t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)^2 dt.$$

En procédant comme avant, nous trouvons

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= 1 & a_2 &= \frac{1}{2!} \\ a_3 &= \frac{1}{3!} & a_4 &= \frac{1}{4!} & \dots a_n &= \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Cela donne la solution sous forme de série

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Par conséquent, la solution exacte est

$$\varphi(x) = e^x.$$

Théorèmes basiques d'existences et d'unicité

Les équations intégrales non linéaires peuvent avoir plusieurs solutions, ou elles peuvent n'avoir aucune solution du tout. Pour cela, dans ce chapitre nous allons appliquer quelques théorèmes d'existence et d'unicité sur les équations intégrales non linéaires de Fredholm et de Volterra. Tout d'abord, commençons par des exemples de non unicité ou de multiplicité de solutions.

Exemple 3.0.1 *Considérons l'équation intégrale non linéaire suivante :*

$$\varphi(x) = \int_0^\pi \cos(x-t)\varphi^2(t)dt \quad (3.1)$$

Une solution évidente à cette équation est la solution triviale $\varphi(x) \equiv 0$. On développe l'intégrale pour obtenir

$$\varphi(x) = \int_0^\pi (\cos x \cos t + \sin x \sin t)\varphi^2(t)dt \quad (3.2)$$

d'où nous concluons que toute solution possible doit avoir la forme

$$\varphi(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

tel que

$$\begin{aligned}
C_1 &= \int_0^\pi \cos t (C_1 \sin t + C_2 \cos t)^2 dt \\
&= \int_0^\pi \cos t (C_1^2 \sin^2 t + C_2^2 \cos^2 t + 2C_1 C_2 \cos t \sin t) dt \\
&= C_1^2 \int_0^\pi \cos t (\sin^2 t) dt + C_2^2 \int_0^\pi \cos^3 t dt + 2C_1 C_2 \int_0^\pi \cos^2 t \sin t dt \\
&= C_1^2 \int_0^\pi (\sin t)' (\sin^2 t) dt + C_2^2 \int_0^\pi (\cos t - \cos t \sin^2 t) dt \\
&\quad + 2C_1 C_2 \int_0^\pi -\cos^2 t (\cos t)' dt \\
&= C_1^2 \left[\frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^\pi + C_2^2 \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^\pi - 2C_1 C_2 \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi \\
C_1 &= \frac{4}{3} C_1 C_2
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
C_2 &= \int_0^\pi \sin t (C_1 \sin t + C_2 \cos t)^2 dt \\
&= \int_0^\pi \sin t (C_1^2 \sin^2 t + C_2^2 \cos^2 t + 2C_1 C_2 \cos t \sin t) dt \\
&= C_1^2 \int_0^\pi \sin^3 t dt + C_2^2 \int_0^\pi \sin t \cos^2 t dt + 2C_1 C_2 \int_0^\pi \cos t \sin^2 t dt \\
&= C_1^2 \int_0^\pi (\sin t + (\cos t)' \cos^2 t) dt - C_2^2 \int_0^\pi (\cos t)' \cos^2 t dt \\
&\quad + 2C_1 C_2 \int_0^\pi (\sin t)' \sin^2 t dt \\
C_2 &= \frac{4}{3} C_1^2 + \frac{2}{3} C_2^2
\end{aligned}$$

On a un système non liéaire

$$\begin{cases} C_1(1 - \frac{4}{3}C_2) & = 0 \\ 2C_1^2 + (C_2 - \frac{3}{4})^2 & = \frac{9}{16} \end{cases} \quad (3.3)$$

La première équation de le système 3.3 représente deux droites perpendiculaires, et la deuxième équation représente un cercle. Comme le montre de la Figure 3.1

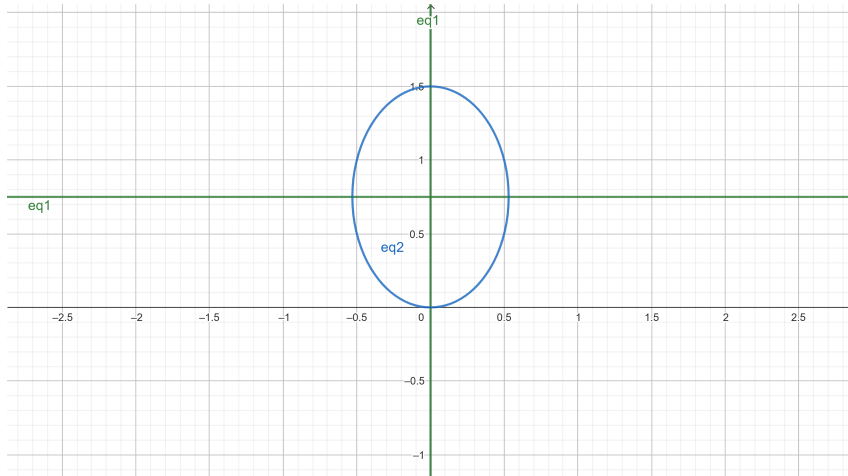


FIGURE 3.1 –

Donc le système (3.3) admet quatre solutions (C_1, C_2)

Et

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 0, & \varphi_3(x) &= -\frac{3\sqrt{2}}{8} \sin x + \frac{3}{4} \cos x \\ \varphi_2(x) &= \frac{3}{2} \cos x, & \varphi_4(x) &= \frac{3\sqrt{2}}{8} \sin x + \frac{3}{4} \cos x \end{aligned}$$

Sont des solutions de l'équation (3.2).

Exemple 3.0.2 On considère

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \varphi^2(y) dy.$$

- $\varphi = 0$ est une solution.
- $\varphi = \frac{1}{\lambda}$ est une autre solution.

On a $G(x, t, \varphi(t)) = \varphi^2(t)$.

$$|\varphi_1^2(t) - \varphi_2^2(t)| = |\varphi_1(t) + \varphi_2(t)| |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$$

$$|A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| \leq L |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$$

donc

$$|\varphi_1(t) + \varphi_2(t)| \leq L$$

On pose $L = 2R$.

$$A : B_E(0; R) \rightarrow B_E(0; R).$$

$$\begin{aligned} |A\varphi| &< R \\ |\lambda \int_0^1 \varphi^2(y)dy| < |\lambda| \cdot R^2 &< R \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot R &< 1 \\ |\lambda| &< \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Et

$$L \cdot |\lambda| < 1$$

donc

$$\begin{aligned} 2R \cdot |\lambda| &< 1 \\ |\lambda| &< \frac{1}{2R} \end{aligned}$$

Donc si $|\lambda| < \frac{1}{2R}$, $\left(R < 2R < \frac{1}{|\lambda|}\right)$,
Alors $\varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \notin B_E(0, R)$.

3.1 Application du théorème de Banach aux équations intégrales

Dans ce qui suit nous allons détailler la preuve du théorème d'existence et d'unicité de solutions dans l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$, en utilisant les contractions de Banach.

3.1.1 Équations intégrales non linéaires de Fredholm

Théorème 3.1.1 [6] Supposons que $G(x, t, z)$ est défini et continu sur l'ensemble $\Phi(a, b) \times \mathbb{R}$ et qu'il satisfait la condition de Lipschitz de la forme

$$|G(x, t, z_1) - G(x, t, z_2)| < C |z_1 - z_2| \quad (3.4)$$

Et en supposons que $f \in C[a, b]$.

Alors l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b G(x, t, \varphi(t))dt \quad (3.5)$$

Admet une solution unique sur l'intervalle $[a, b]$ pour $|\lambda| < \frac{1}{C(b-a)}$

3.1. APPLICATION DU THÉORÈME DE BANACH AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES

Preuve. On considère l'espace $C[a, b]$ espace des fonctions à valeurs réelles qui sont continues sur l'intervalle $[a, b]$ muni de la distance

$$d(u, v) = \max_{x \in [a, b]} |u(x) - v(x)| \quad (3.6)$$

il peut être démontré que l'opérateur

$$F : C[a, b] \rightarrow C[a, b] \quad (3.7)$$

Défini par :

$$Fu = f(x) + \lambda \int_a^b G(x, t, u(t)) dt \quad (3.8)$$

Est un opérateur de contraction pour les valeurs restreintes de λ prescrites dans l'instruction du théorème. Pour tout $u, v \in [a, b]$, on a pour tout $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |Fu(x) - Fv(x)| &= |\lambda \int_a^b (G(x, t, u(t)) - G(x, t, v(t))) dt| \\ &\leq |\lambda| C(b-a) d(u, v) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Donc

$$d(Fu, Fv) \leq |\lambda| C(b-a) d(u, v) \quad (3.10)$$

Ainsi : si $\alpha = |\lambda| C(b-a) < 1$. alors F est un opérateur de contraction de $C[a, b]$. \square

3.1.2 Équations intégrales non linéaires de Volterra

[6] Les théorèmes de point fixe peuvent également être utilisés pour prouver l'existence et l'unicité de solutions aux équations intégrale non linéaire de Volterra. Dans le théorème ci-dessous, notez en particulier qu'il n'y a aucune restriction sur la valeur de λ .

Théorème 3.1.2 *Supposons que $G(x, t, z)$ est définie et continue sur l'ensemble $\Gamma(a, b) \times \mathbb{R}$ et satisfait la condition Lipschitz de la forme*

$$|G(x, t, z_1) - G(x, t, z_2)| < C|z_1 - z_2| \quad (3.11)$$

Et en supposons que $f \in C[a, b]$. Alors l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x G(x, t, \varphi(t)) dt, \quad a \leq x \leq b \quad (3.12)$$

admet une solution unique sur l'intervalle $[a, b]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.1. APPLICATION DU THÉORÈME DE BANACH AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES

Preuve. On considère l'espace $C(a, b)$ espace des fonctions à valeurs réels qui sont continue sur l'intervalle $[a, b]$ muni de la distance.

$$d(u, v) = \max_{x \in [a, b]} |u(x) - v(x)| \quad (3.13)$$

Il peut être démontré qu'une puissance appropriée de l'opérateur continue.

$$V : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

Définie par :

$$Vu = f(x) + \lambda \int_a^x G(x, t, u(t)) dt \quad (3.14)$$

Est un opérateur de contraction pour toute valeur de λ . On remarque que $u, v \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |Vu(x) - Vv(x)| &= \lambda \left| \int_a^x (G(x, t, u(t)) - G(x, t, v(t))) dt \right| \\ &\leq |\lambda| C(x-a) d(u, v). \end{aligned}$$

Ou compose encore une fois et on obtient

$$\begin{aligned} |V^2u(x) - V^2v(x)| &= \lambda \left| \int_a^x (G(x, t, Vu(t)) - G(x, t, Vv(t))) dt \right| \\ &\leq |\lambda| C \int_a^x |Vu(x) - Vv(x)| dt \\ &\leq \frac{|\lambda|^2 C^2 (x-a)^2}{2!} d(u, v). \end{aligned}$$

En général, après n intégration, on obtient

$$|V^n u(x) - V^n v(x)| \leq \frac{|\lambda^n| C^n (x-a)^n}{n!} d(u, v).$$

D'où il résulte que

$$d(V^n u - V^n v) \leq \frac{|\lambda^n| C^n (b-a)^n}{n!} d(u, v).$$

Par conséquent, si n est suffisamment grand, lors V^n est un opérateur de contraction de $C[a, b]$. \square

3.2 Application du théorème de Schauder aux équations intégrales

3.2.1 Équations intégrales non-linéaires de Fredholm

Théorème 3.2.1 [7] *On considère l'équation intégrale non linéaire de Fredholm*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi(x))dt \quad -\infty < a \leq b < +\infty \quad (3.15)$$

Supposant que $f(\cdot)$ est une fonction bornée et $K(x, t, y)$ satisfait les conditions suivantes

1) $|K(x, t, y)| \leq g_1(x)g_2(t)\phi(|y|),$

2) $|\frac{\partial K}{\partial y}(x, t, y)| \leq g_1(x)g_2(t)\psi(|y|),$

où $g_1(\cdot)$ est une fonction positive, bornée et mesurable, $\phi(\cdot)$ est une fonction positive et mesurable qui vérifie la condition

$$\sup_{y \geq 0} \frac{\phi(y)}{y} = L < +\infty.$$

Et $\psi(\cdot)$ est une fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus, on suppose qu'il existe une fonction strictement positive et continue $\mu(\cdot)$ qui vérifie la condition suivante

$$\|g_1 \cdot \mu\|_\infty \|\frac{g_2}{\mu}\| < \frac{1}{L}.$$

sous ses conditions, l'équation intégrale (3.15) admet une solution dans $C[a, b]$.

Preuve. On note par $\|\cdot\|_\mu$ la norme définie sur $X = C[a, b]$ par $\|\varphi\|_\mu = \sup_{x \in [a, b]} |\mu(x)\varphi(x)|$, l'espace X muni de la norme $\|\cdot\|_\mu$ est un espace de Banach. Soit $r \geq 0$ est un nombre réel positif, et soit B_r la boule fermée de X définie par

$$(B_r) = \{\varphi \in C[a, b]; \|\varphi\|_\mu \leq r\}.$$

C'est clair que B_r est un sous-ensemble fermé et convexe de X . Alors, démontrer que l'opérateur T associé avec l'équation (3.15) est continu sur X . La conclusion est

$$T(B_r) \subset B_r; \forall r \geq \frac{\|f\|_\mu}{1 - L\|g_1\|_\mu \|\frac{g_2}{\mu}\|_1} = r_0.$$

D'après le théorème du point fixe de Schauder, l'équation intégrale non linéaire (3.15) admet une solution dans (B_{r_0}) et par suite elle admet une solution dans $C[a, b]$. □

3.2.2 Équations intégrales non-linéaires de Volterra

Théorème 3.2.2 [7] *On considère l'équation intégrale non linéaire de Volterra*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt \quad (a \leq x \leq b). \quad (3.16)$$

Où f est continue sur $[a, b]$. supposons que $K(x, t, y)$ satisfait les conditions suivantes :

1) $|K(x, t, y)| \leq g_1(x)g_2(t)\phi(|y|),$

2) $|\frac{\partial K}{\partial y}(x, t, y)| \leq g_1(x)g_2(t)\psi(|y|),$

Où $g_1(\cdot)$ est une fonction positive et continue sur $[a, b]$, $g_2(\cdot)$ est une fonction positive et intégrable sur $[a, b]$ et $\psi(\cdot)$ est une fonction positive et continue sur $[0, +\infty[$. Enfin, supposons que la fonction $\Phi(\cdot)$ est positif, continu et satisfait la condition $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(y)}{y} = L < +\infty$.

Dans ces conditions, l'équation (3.16) admet une solution continue sur $[a, b]$.

Preuve. Voir [8]

□

L'unicité de la solution de l'équation de Volterra non linéaire est donné par la proposition suivante.

Proposition 3.2.1 [7] *On Considère l'équation de Volterra non linéaire (3.16) et supposons que $K(x, t, y)$ satisfait les conditions du théorème (3.2.2) avec $g_2(\cdot) \in (L^1 \cap L^p)([a, b])$ pour un certain $p > 1$. Alors l'équation (3.16) admet une solution unique.*

Preuve. Voir [8]

□

3.3 Existence de solutions dans les espaces de Hölder

[12] On va étudier l'existence de solutions de l'équation intégrale suivante de type Fredholm avec un argument modifié.

$$x(t) = p(t) + x(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(r(\tau))d\tau, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.17)$$

pour étudier la solvabilité de (3.17) dans les espaces Hölder. Nous utiliserons les hypothèses suivantes :

(i) $p \in H_\beta[0, 1]$, $0 < \beta \leq 1$.

(ii) $k \in [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle qu'elle satisfait la condition de Hölder avec exposant par rapport à la première variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante $K_\beta > 0$ telle que

$$|k(t, \tau) - k(s, \tau)| \leq K_\beta |t - s|^\beta.$$

(iii) $r \in [0, 1] \times [0, 1]$ est une fonction mesurable.

(iv) suivante est satisfaite

$$\|p\|_\beta (2K + K_\beta) < \frac{1}{4}.$$

où la constante K est définie par

$$K = \sup\left\{\int_0^1 |k(t, \tau)| d\tau, \quad t \in [0, 1]\right\}.$$

qui existe par (ii).

Théorème 3.3.1 [12] *Sous les hypothèses (i)-(iv), l'équation (3.17) a au moins une solution appartenant à l'espace $H_\alpha[0, 1]$, où α est un nombre arbitrairement fixé satisfaisant $0 < \alpha < \beta$.*

Preuve. En appliquant le théorème classique du point fixe de Schauder.

On considère l'opérateur \mathcal{T} défini sur $H_\beta[0, 1]$ par

$$(\mathcal{T}x)(t) = p(t) + x(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(r(\tau))d\tau, \quad t \in [0, 1].$$

Dans la suite, nous prouverons que \mathcal{T} transforme l'espace $H_\beta[0, 1]$ en lui-même.

\mathcal{T} envoie la boule sur elle-même :

En fait, on prend $x \in H_\beta[0, 1]$ et $t, s \in [0, 1]$ avec $t \neq s$.

Alors, par les hypothèses (i) et (ii), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{|(\mathcal{T}x)(t) - (\mathcal{T}x)(s)|}{|t - s|^\beta} \\ &= \frac{\left|p(t) + x(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(r(\tau))d\tau - p(s) - x(s) \int_0^1 k(s, \tau)x(r(\tau))d\tau\right|}{|t - s|^\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{|p(t) - p(s)|}{|t - s|^\beta} + \frac{\left| x(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(r(\tau))d\tau - x(s) \int_0^1 k(t, \tau)x(r(\tau))d\tau \right|}{|t - s|^\beta} \\
 &+ \frac{\left| x(s) \int_0^1 k(t, \tau)x(r(\tau))d\tau - x(s) \int_0^1 k(s, \tau)x(r(\tau))d\tau \right|}{|t - s|^\beta} \\
 &\leq \frac{|p(t) - p(s)|}{|t - s|^\beta} + \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\beta} \int_0^1 |k(t, \tau)||x(r(\tau))|d\tau \\
 &+ \frac{|x(s)| \int_0^1 |k(t, \tau) - k(s, \tau)||x(r(\tau))|d\tau}{|t - s|^\beta} \\
 &\leq \frac{|p(t) - p(s)|}{|t - s|^\beta} + \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\beta} \|x\|_\infty \int_0^1 |k(t, \tau)|d\tau \\
 &+ \frac{\|x\|_\infty \cdot \|x\|_\infty \int_0^1 |k(t, \tau) - k(s, \tau)|d\tau}{|t - s|^\beta} \\
 &\leq \frac{|p(t) - p(s)|}{|t - s|^\beta} + K\|x\|_\infty \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\beta} + \frac{\|x\|_\infty^2 \int_0^1 K_\beta |t - s|^\beta d\tau}{|t - s|^\beta} \\
 &\leq H_p^\beta + K\|x\|_\infty H_x^\beta + K_\beta \|x\|_\infty^2
 \end{aligned}$$

D'après le lemme (1.1.1), puisque $\|x\|_\infty \leq \|x\|_\beta$ et, comme H_x^β , nous en déduisons

$$\frac{|(\mathcal{T}x)(t) - (\mathcal{T}x)(s)|}{|t - s|^\beta} \leq H_p^\beta + (K + K_\beta) \|x\|_\beta^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{T}x\|_\beta &= |(\mathcal{T}x)(0)| + \sup \left\{ \frac{|(\mathcal{T}x)(t) - (\mathcal{T}x)(s)|}{|t - s|^\beta} : t, s \in [0, 1], t \neq s \right\} \\
 &\leq |(\mathcal{T}x)(0)| + H_p^\beta + (K + K_\beta) \|x\|_\beta^2 \\
 &\leq |p(0)| + |x(0)| \int_0^1 |k(0, \tau)||x(r(\tau))|d\tau + H_p^\beta + (K + K_\beta) \|x\|_\beta^2 \\
 &\leq \|p\|_\beta + \|x\|_\infty \cdot \|x\|_\infty \int_0^1 |k(0, \tau)|d\tau + (K + K_\beta) \|x\|_\beta^2 \\
 &\leq \|p\|_\beta + K\|x\|_\beta^2 + (K + K_\beta) \|x\|_\beta^2 \\
 &= \|p\|_\beta + (2K + K_\beta) \|x\|_\beta^2 < \infty
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\|p\|_\beta + (2K + K_\beta) r^2 < r$$

est satisfait pour les valeurs entre les nombres

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\|p\|_\beta(2K + K_\beta)}}{2(2K + K_\beta)}$$

et

$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\|p\|_\beta (2K + K_\beta)}}{2(2K + K_\beta)}$$

qui sont positifs par l'hypothèse (iv), par conséquent, de (3.18) il résulte que \mathcal{T} transforme la boule $B_{r_0}^\beta = \{x \in H_\beta[0, 1] : \|x\|_\beta \leq r_0\}$ en lui-même, pour tout $r_0 \in [r_1, r_2]$.

i.e. $\mathcal{T} : B_{r_0}^\beta \rightarrow B_{r_0}^\beta$, où $r_1 \leq r_0 \leq r_2$.

\mathcal{T} est compact :

par le théorème (1.1.2), Nous avons l'ensemble $B_{r_0}^\beta$ est relativement compact dans $H_\alpha[0, 1]$ pour tout $0 < \alpha < \beta \leq 1$.

De plus, nous pouvons prouver que $B_{r_0}^\beta$ est un sous-ensemble compact dans $H_\alpha[0, 1]$ pour tout $0 < \alpha < \beta \leq 1$.

\mathcal{T} est continu :

Nous prouverons que l'opérateur \mathcal{T} est continu sur $B_{r_0}^\beta$, où dans $B_{r_0}^\beta$ on considère la norme induite par $\|\cdot\|_\alpha$, où $0 < \alpha < \beta \leq 1$.

Pour ce faire, nous réparons $x \in B_{r_0}^\beta$ et $\varepsilon > 0$. Supposer que $y \in B_{r_0}^\beta$ et $\|x - y\|_\alpha \leq \delta$, où δ est un nombre positif tel que $\delta < \frac{\varepsilon}{2(2K+3K_\beta)r_0}$.

Alors, pour tout $t, s \in [0, 1]$ avec $t \neq s$, nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{|[(\mathcal{T}x)(t) - (\mathcal{T}y)(t)] - [(\mathcal{T}x)(s) - (\mathcal{T}y)(s)]|}{|t - s|^\alpha} \\ &= \left| \frac{\left[x(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(r(\tau))d\tau - y(t) \int_0^1 k(t, \tau)y(r(\tau))d\tau \right]}{|t - s|^\alpha} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\left[x(s) \int_0^1 k(s, \tau)x(r(\tau))d\tau - y(s) \int_0^1 k(s, \tau)y(r(\tau))d\tau \right]}{|t - s|^\alpha} \right| \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 & \leq \left| \frac{\left[x(t) \int_0^1 k(t, \tau) x(r(\tau)) d\tau - y(t) \int_0^1 k(t, \tau) x(r(\tau)) d\tau \right]}{|t-s|^\alpha} \right. \\
 & \quad + \frac{\left[y(t) \int_0^1 k(t, \tau) x(r(\tau)) d\tau - y(t) \int_0^1 k(t, \tau) y(r(\tau)) d\tau \right]}{|t-s|^\alpha} \\
 & \quad - \frac{\left[x(s) \int_0^1 k(s, \tau) x(r(\tau)) d\tau - y(s) \int_0^1 k(s, \tau) x(r(\tau)) d\tau \right]}{|t-s|^\alpha} \\
 & \quad \left. - \frac{\left[y(s) \int_0^1 k(s, \tau) x(r(\tau)) d\tau - y(s) \int_0^1 k(s, \tau) y(r(\tau)) d\tau \right]}{|t-s|^\alpha} \right| \\
 & = \frac{1}{|t-s|^\alpha} \left| (x(t) - y(t)) \int_0^1 k(t, \tau) x(r(\tau)) d\tau + y(t) \int_0^1 k(t, \tau) (x(r(\tau)) - y(r(\tau))) d\tau \right. \\
 & \quad \left. - (x(s) - y(s)) \int_0^1 k(s, \tau) x(r(\tau)) d\tau - y(s) \int_0^1 k(s, \tau) (x(r(\tau)) - y(r(\tau))) d\tau \right|
 \end{aligned}$$

C.à.d

$$\begin{aligned}
 & \leq \frac{1}{|t-s|^\alpha} \left\{ |(x(t) - y(t)) - (x(s) - y(s))| \cdot \left| \int_0^1 k(t, \tau) x(r(\tau)) d\tau \right| \right. \\
 & \quad + |x(s) - y(s)| \cdot \left| \int_0^1 (k(t, \tau) - k(s, \tau)) x(r(\tau)) d\tau \right| \\
 & \quad + \left| y(t) \int_0^1 k(t, \tau) (x(r(\tau)) - y(r(\tau))) d\tau \right. \\
 & \quad \left. - y(s) \int_0^1 k(s, \tau) (x(r(\tau)) - y(r(\tau))) d\tau \right\}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 & \leq \frac{|(x(t) - y(t)) - (x(s) - y(s))|}{|t-s|^\alpha} \|x\|_\infty \int_0^1 |k(t, \tau)| d\tau \\
 & \quad + [|(x(s) - y(s)) - (x(0) - y(0))| + |x(0) - y(0)|] \|x\|_\infty \\
 & \quad \times \int_0^1 \frac{|k(t, \tau) - k(s, \tau)|}{|t-s|^\alpha} d\tau + \frac{1}{|t-s|^\alpha} \left| y(t) \int_0^1 k(t, \tau) (x(r(\tau)) - y(r(\tau))) d\tau \right. \\
 & \quad \left. - y(s) \int_0^1 k(s, \tau) (x(r(\tau)) - y(r(\tau))) d\tau \right| \\
 & \quad + \frac{1}{|t-s|^\alpha} \left| y(s) \int_0^1 k(t, \tau) (x(r(\tau)) - y(r(\tau))) d\tau \right. \\
 & \quad \left. - y(s) \int_0^1 k(s, \tau) (x(r(\tau)) - y(r(\tau))) d\tau \right|
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 &\leq K \|x - y\|_\alpha \|x\|_\infty + \sup_{p,q \in [0,1]} |(x(p) - y(p)) - (x(q) - y(q))| \\
 &\times \|x\|_\infty \int_0^1 \frac{K_\beta |t - s|^\beta}{|t - s|^\alpha} d\tau + |x(0) - y(0)| \|x\|_\infty \int_0^1 \frac{K_\beta |t - s|^\beta}{|t - s|^\alpha} d\tau \\
 &+ \frac{|y(s) - x(s)|}{|t - s|^\alpha} \int_0^1 |k(t, \tau)| |x(r(\tau)) - y(r(\tau))| d\tau \\
 &+ |y(s)| \int_0^1 \frac{|k(t, \tau) - k(s, \tau)|}{|t - s|^\alpha} |x(r(\tau)) - y(r(\tau))| d\tau
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 &\leq K \|x\|_\infty \|x - y\|_\alpha + \|x\|_\infty K_\beta |t - s|^{\beta - \alpha} \\
 &\times \sup_{p,q \in [0,1], p \neq q} \left\{ \frac{|(x(p) - y(p)) - (x(q) - y(q))|}{|p - q|^\alpha} |p - q|^\alpha \right\} \\
 &+ K_\beta \|x\|_\beta |t - s|^{\beta - \alpha} |x(0) - y(0)| \\
 &+ KH_y^\alpha \|x - y\|_\infty + \|y\|_\infty \|x - y\|_\infty \int_0^1 \frac{K_\beta |t - s|^\beta}{|t - s|^\alpha} d\tau
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 &\leq K \|x\|_\beta \|x - y\|_\alpha + 2K_\beta \|x\|_\beta \|x - y\|_\alpha + K \|y\|_\alpha \|x - y\|_\alpha \\
 &+ K_\beta \|y\|_\alpha \|x - y\|_\alpha
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\leq (K \|x\|_\beta + 2K_\beta \|x\|_\beta + K \|y\|_\alpha + K_\beta \|y\|_\alpha) \|x - y\|_\alpha$$

Depuis $\|y\|_\alpha \leq \|y\|_\beta$ et $x, y \in B_{r_0}^\beta$, de l'inégalité ci-dessus, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
 \frac{|(\mathcal{T}x)(t) - (\mathcal{T}y)(t) - [(\mathcal{T}x)(s) - (\mathcal{T}y)(s)]|}{|t - s|^\alpha} &\leq (2Kr_0 + 3K_\beta r_0) \|x - y\|_\alpha \\
 &\leq (2Kr_0 + 3K_\beta r_0) \delta < \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 |(\mathcal{T}x)(0) - (\mathcal{T}y)(0)| &= \left| x(0) \int_0^1 k(0, \tau)x(r(\tau))d\tau \right. \\
 &\quad \left. - y(0) \int_0^1 k(0, \tau)y(r(\tau))d\tau \right| \\
 &\leq \left| x(0) \int_0^1 k(0, \tau)x(r(\tau))d\tau \right. \\
 &\quad \left. - x(0) \int_0^1 k(0, \tau)y(r(\tau))d\tau \right| \\
 &\quad + \left| x(0) \int_0^1 k(0, \tau)y(r(\tau))d\tau \right. \\
 &\quad \left. - y(0) \int_0^1 k(0, \tau)y(r(\tau))d\tau \right| \tag{3.20} \\
 &\leq \left| x(0) \int_0^1 k(0, \tau)(x(r(\tau)) - y(r(\tau)))d\tau \right| \\
 &\quad + \left| (x(0) - y(0)) \int_0^1 k(0, \tau)y(r(\tau))d\tau \right| \\
 &\leq K\|x\|_\infty\|x - y\|_\infty + K\|y\|_\infty\|x - y\|_\alpha \\
 &\leq K\|x\|_\beta\|x - y\|_\alpha + K\|y\|_\beta\|x - y\|_\alpha \\
 &\leq 2Kr_0\|x - y\|_\alpha < 2Kr_0\delta < \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

depuis(3.19) et (3.20), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y\| &= |(\mathcal{T}x)(0) - (\mathcal{T}y)(0)| \\
 &\quad + \sup \left\{ \frac{|((\mathcal{T}x)(t) - (\mathcal{T}y)(t)) - ((\mathcal{T}x)(s) - (\mathcal{T}y)(s))|}{|t-s|^\alpha} : t, s \in [0, 1], t \neq s \right\} \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Cela prouve que l'opérateur \mathcal{T} est continue au point $x \in B_{r_0}^\delta$ pour la norme $\|\cdot\|_\alpha$.

□

Méthodes de résolution approchée

4.1 Remplacement de l'intégrale par une somme finie

[1] Soit l'équation de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) F(\varphi(t)) dt = f(x), \quad (4.1)$$

Où $K(x, t)$ et $f(x)$ admettent des dérivées continues d'ordre requis et λ est un nombre donné. Prenons une formule de quadrature

$$\int_a^b \Phi(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \Phi(x_k) \quad (4.2)$$

avec x_1, x_2, \dots, x_n les abscisses des points de $[a, b]$ et A_1, A_2, \dots, A_n les coefficients indépendants de la forme de la fonction $\Phi(x)$.

Posons $x = x_k (k = 1, 2, \dots, n)$ dans l'équation. Il vient

$$\varphi(x_k) - \lambda \int_a^b K(x_k, t) F(\varphi(t)) dt = f(x_k) \quad (4.3)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Moyennant la formule remplaçons l'intégrale de la dernière équation par une somme :

$$\varphi(x_k) - \lambda \sum_{m=1}^n A_m K(x_k, x_m) F(\varphi(x_m)) = f(x_k), \quad (4.4)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Nous avons obtenu un système de n équations algébriques à n inconnues $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$, valeurs approchées de la solution $\varphi(x)$ aux points de base x_1, x_2, \dots, x_n . On peut prendre pour solution approchée de l'équation (4.1) sur le segment $[a, b]$ la fonction suivante

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^n A_m K(x, x_m) F(\varphi(x_m)),$$

dont les valeurs aux points x_1, x_2, \dots, x_n sont respectivement $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$.

Voici les valeurs des coefficients A_k et des abscisses x_k de(4.4)

1) formule des rectangles :

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, \quad \dots, \quad x_n = a + (n - 1)h.$$

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = h, \quad \text{où } h = \frac{b - a}{n}.$$

2) formule des trapèzes :

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, \quad \dots, \quad x_n = a + (n - 1)h.$$

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h, \quad \text{où } h = \frac{b - a}{n - 1}.$$

3) formule de simpson ($n = 2m + 1$) :

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, \quad \dots, \quad x_n = a + (n - 1)h = b.$$

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}, \quad A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = \frac{4}{3}h,$$

$$A_3 = A_5 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}, \quad \text{où } h = \frac{b - a}{2m}.$$

Exemple 4.1.1 [4] Trouver une valeur approchée de la solution de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = e^x - \frac{1}{32}(1 + e^2)x + \frac{1}{8} \int_0^1 xt\varphi^2(t)dt. \quad (4.5)$$

La solution exact est $\varphi(x) = e^x$.

Fixons le segment $[0, 1]$ les points $x_1 = 0; x_2 = 0.5; x_3 = 1$ et posons $x = 0, x = 0.5, x = 1$ dans l'équation proposée. Nous obtenons

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(0.5) - \frac{1}{16} \int_0^1 t\varphi^2(t)dt = e^{0.5} - \frac{1+e^2}{64} \\ \varphi(1) - \frac{1}{8} \int_0^1 t\varphi^2(t)dt = e - \frac{1+e^2}{32} \end{cases} \quad (4.6)$$

Remplaçons, à l'aide de la formule de Simpson par la règle de Quadrature

$$\int_0^1 \Phi(t)dt \approx \frac{\Phi(0) + 4\Phi(0.5) + \Phi(1)}{6}$$

chacune des intégrales par une somme finie.

On a pour l'intégrale de la deuxième équation du système (4.6) :

$$\Phi(t) = \frac{t}{2}\varphi^2(t)$$

de sorte que :

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(0.5) = \frac{1}{4}\varphi^2(0.5), \quad \Phi(1) = \frac{1}{2}\varphi^2(1)$$

Ainsi

$$0.5 \int_0^1 t\varphi^2(t)dt \approx \frac{1}{6}\varphi^2(0.5) + \frac{1}{12}\varphi^2(1) \quad (4.7)$$

la fonction à intégrer de la troisième équation est

$$\Phi(t) = t\varphi^2(t)$$

donc

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(0.5) = \frac{1}{2}\varphi^2(0.5), \quad \Phi(1) = \varphi^2(1).$$

et, par conséquent,

$$\int_0^1 t\varphi^2(t)dt \approx \frac{1}{3}\varphi^2(0.5) + \frac{1}{6}\varphi^2(1) \quad (4.8)$$

Portons (4.7) et (4.8) dans (4.6), il vient le système non linéaire

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(0.5) - \frac{1}{48}\varphi^2(0.5) - \frac{1}{96}\varphi^2(1) = e0.5 - \frac{1+e^2}{64} \\ \varphi(1) - \frac{1}{24}\varphi^2(0.5) - \frac{1}{48}\varphi^2(1) = e - \frac{1+e^2}{32} \end{cases} \quad (4.9)$$

Résolvons le système non linéaire (4.8) par logiciel MATLAB (voir Annexe A)

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(0.5) = 1.651804, \quad \varphi(1) = 2.724447. \quad (4.10)$$

Prenons pour solution approchée de l'équation (4.5) la fonction

$$\tilde{\varphi}(x) = e^x - \frac{1}{32}(1 + e^2)x + \frac{1}{8} \sum_{m=1}^3 A_m x x_m \varphi^2(x_m).$$

Où $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$, $A_1 = \frac{1}{6}$, $A_2 = \frac{2}{3}$, $A_3 = \frac{1}{6}$

Ou

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= e^x - \frac{1}{32}(1 + e^2)x + 0.268323x \\ &= e^x + 0.006165x. \end{aligned}$$

x_i	Solution exact	Solution approchée	Erreur
0.1	1	1	0
0.1	1.105170	1.105786	0.000416
0.2	1.2214027	1.222635	0.001233
0.3	1.349858	1.351708	0.001849
0.4	1.491824	1.494290	0.002466
0.5	1.648721	1.658037	0.003082
0.6	1.822118	1.825817	0.003699
0.7	2.013752	2.018068	0.004315
0.8	2.225540	2.230472	0.004932
0.9	2.459603	2.454054	0.005548
1.0	2.718281	2.712116	0.006165

TABLE 4.1 – Solutions numérique en divers points et erreurs absolues correspondantes de l'exemple 4.1.1

Exemple 4.1.2 [4] trouver une valeur approchée de la solution de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2)\varphi^2(t)dt. \quad (4.11)$$

On peut calcul la solution exacte par la méthode directe et nous obtenons quatre solutions
Nous réécrivons comme suite

$$\varphi(x) = \lambda C_1 x + \lambda C_2 x^2. \quad (4.12)$$

telle que

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-1}^1 t(\lambda C_1 t + \lambda C_2 t^2)^2 dt \\ &= \int_{-1}^1 t(\lambda^2 C_1^2 t^2 + \lambda^2 C_2^2 t^4 + 2\lambda^2 C_1 C_2 t^3) dt \\ &= \int_{-1}^1 (\lambda^2 C_1^2 t^3 + \lambda^2 C_2^2 t^5 + 2\lambda^2 C_1 C_2 t^4) dt \\ C_1 &= \frac{4}{5} \lambda^2 C_1 C_2 \implies \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{5}{4\lambda^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \int_{-1}^1 t^2(\lambda^2 C_1^2 t^2 + \lambda^2 C_2^2 t^4 + 2\lambda^2 C_1 C_2 t^3) dt \\
 &= \int_{-1}^1 (\lambda^2 C_1^2 t^4 + \lambda^2 C_2^2 t^6 + 2\lambda^2 C_1 C_2 t^5) dt \\
 C_2 &= \frac{2}{5}\lambda^2 C_1^2 + \frac{2}{7}\lambda^2 C_2^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \text{ Si } C_1 = 0 &\implies \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_2 = \frac{7}{2\lambda^2} \end{cases} \\
 - \text{ Si } C_2 = \frac{5}{4\lambda^2} &\implies \begin{cases} C_1 = \frac{15\sqrt{7}}{28} \\ C_1 = -\frac{15\sqrt{7}}{28} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Alors les solutions exactes est :

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x) &= 0, & \varphi_2 &= \frac{1}{28\lambda}(15\sqrt{7}x + 35x^2) \\
 \varphi_3(x) &= \frac{7}{2\lambda}x^2, & \varphi_4 &= -\frac{1}{28\lambda}(15\sqrt{7}x + 35x^2)
 \end{aligned}$$

Fixons sur le segment $[-1; 1]$ les points $x_1 = -1$, $x_2 = -0.5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0.5$, $x_5 = 1$ et posons $x = -1$, $x = -0.5$, $x = 0$, $x = 0.5$, $x = 1$ dans l'équation proposée. Nous obtenons

$$\begin{cases} \varphi(-1) - \lambda \int_{-1}^1 (t^2 - t)\varphi^2(t) dt = 0 \\ \varphi(-0.5) - \lambda \int_{-1}^1 (0.25t^2 - 0.5t)\varphi^2(t) dt = 0 \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi(0.5) - \lambda \int_{-1}^1 (0.25t^2 + 0.5t)\varphi^2(t) dt = 0 \\ \varphi(1) - \lambda \int_{-1}^1 (t^2 + t)\varphi^2(t) dt = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Remplaçons, à l'aide de la formule de trapèzes

$$\int_{-1}^1 \Phi(t) dt \approx \frac{\Phi(-1) + 2\Phi(-0.5) + 2\Phi(0) + 2\Phi(0.5) + \Phi(1)}{4}$$

On a pour l'intégrale de la première équation de (4.13) :

$$\Phi(t) = (t^2 - t)\varphi^2(t)$$

de sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(-1) = 2\varphi^2(-1), \\ \Phi(-0.5) = 0.75\varphi^2(-0.5), \\ \Phi(0) = 0, \\ \Phi(0.5) = -0.25\varphi^2(0.5), \\ \Phi(1) = 0. \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\int_{-1}^1 (t^2 - t)\varphi^2(t)dt \approx 0.5\varphi^2(-1) + 0.375\varphi^2(-0.5) - 0.125\varphi^2(0.5). \quad (4.14)$$

La fonction à intégrer de la deuxième équation est

$$\Phi(t) = (0.25t^2 - 0.5t)\varphi^2(t)$$

de sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(-1) = 0.75\varphi^2(-1), \\ \Phi(-0.5) = 0.3125\varphi^2(-0.5), \\ \Phi(0) = 0, \\ \Phi(0.5) = -0.1875\varphi^2(0.5), \\ \Phi(1) = -0.25\varphi^2(1). \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\int_{-1}^1 (0.25t^2 - 0.5t)\varphi^2(t)dt \approx 0.1875\varphi^2(-1) + 0.15625\varphi^2(-0.5) - 0.09375\varphi^2(0.5) - 0.0625\varphi^2(1). \quad (4.15)$$

La fonction à intégrer de la quatrième équation est

$$\Phi(t) = (0.25t^2 + 0.5t)\varphi^2(t)$$

de sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(-1) = -0.25\varphi^2(-1), \\ \Phi(-0.5) = -0.1875\varphi^2(-0.5), \\ \Phi(0) = 0, \\ \Phi(0.5) = 0.3125\varphi^2(0.5), \\ \Phi(1) = 0.75\varphi^2(1). \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\int_{-1}^1 (0.25t^2 + 0.5t)\varphi^2(t)dt \approx -0.0625\varphi^2(-1) - 0.09375\varphi^2(-0.5) + 0.15625\varphi^2(0.5) + 0.1875\varphi^2(1). \quad (4.16)$$

La fonction à intégrer de la cinquième équation est

$$\Phi(t) = (t^2 + t)\varphi^2(t)$$

de sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(-1) = 0, \\ \Phi(-0.5) = -0.25\varphi^2(-0.5), \\ \Phi(0) = 0, \\ \Phi(0.5) = 0.75\varphi^2(0.5), \\ \Phi(1) = 2\varphi^2(1). \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\int_{-1}^1 (t^2 + t)\varphi^2(t)dt \approx -0.125\varphi^2(-0.5) + 0.375\varphi^2(0.5) + 0.5\varphi^2(1). \quad (4.17)$$

Portons (4.14) , (4.15), (4.16) et (4.17) dans (4.13), il vient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(-1) - \lambda(0.5\varphi^2(-1) + 0.375\varphi^2(-0.5) - 0.125\varphi^2(0.5)) = 0 \\ \varphi(-0.5) - \lambda(0.1875\varphi^2(-1) + 0.15625\varphi^2(-0.5) \\ \quad - 0.09375\varphi^2(0.5) - 0.0625\varphi^2(1)) = 0 \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi(0.5) - \lambda(-0.0625\varphi^2(-1) - 0.09375\varphi^2(-0.5) \\ \quad + 0.15625\varphi^2(0.5) + 0.1875\varphi^2(1)) = 0 \\ \varphi(1) - \lambda(-0.125\varphi^2(-0.5) + 0.375\varphi^2(0.5) + 0.5\varphi^2(1)) = 0 \end{array} \right. \quad (4.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 8\varphi(-1) - 4\lambda\varphi^2(-1) - 3\lambda\varphi^2(-0.5) + \lambda\varphi^2(0.5) = 0 \\ 32\varphi(-0.5) - 6\lambda\varphi^2(-1) - 5\lambda\varphi^2(-0.5) + 3\lambda\varphi^2(0.5) + 2\lambda\varphi^2(1) = 0 \\ \varphi(0) = 0 \\ 32\varphi(0.5) + 2\lambda\varphi^2(-1) + 3\lambda\varphi^2(-0.5) - 5\lambda\varphi^2(0.5) - 6\lambda\varphi^2(1) = 0 \\ 8\varphi(1) + \lambda\varphi^2(-0.5) - 3\lambda\varphi^2(0.5) - 4\lambda\varphi^2(1) = 0 \end{array} \right. \quad (4.19)$$

résolvant le système (4.19) par logiciel MATLAB (voir Annexe B)

$\varphi(-1)$	$\varphi(-0.5)$	$\varphi(0)$	$\varphi(0.5)$	$\varphi(1)$
$\frac{1.939394}{\lambda}$	$\frac{0.484848}{\lambda}$	0	$\frac{0.484848}{\lambda}$	$\frac{1.939394}{\lambda}$

Prenons pour solution approchée de l'équation (4.11) la fonction

$$\tilde{\varphi}(x) = \lambda \sum_{m=1}^5 A_m (xx_m + x^2 x_m^2) \varphi^2(x_m)$$

Où

i	1	2	3	4	5
x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
A_i	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25

Où

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1.939392}{\lambda} x^2.$$

Remarque 4.1.3 La solution obtenu n'approche pas la solution exacte.

Exemple 4.1.4 [13] Nous considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm suivante

$$y(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}x(\cos(1)\sin(1) - 1) + \int_0^1 xy^2(s)ds, \quad (4.20)$$

avec la solution exacte est $y(x) = \sin(x)$. Fixons sur le segment $[0; 1]$ les points $x_1 = 0$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1$ et posons $x = 0$, $x = 0.25$, $x = 0.5$, $x = 0.75$, $x = 1$ dans l'équation proposée. Nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(0.25) - \int_0^1 0.25y^2(s)ds = \sin(0.25) + \frac{1}{8}(\cos(1)\sin(1) - 1) \\ y(0.5) - \int_0^1 0.5y^2(s)ds = \sin(0.5) + \frac{1}{4}(\cos(1)\sin(1) - 1) \\ y(0.75) - \int_0^1 0.75y^2(s)ds = \sin(0.75) + \frac{3}{8}(\cos(1)\sin(1) - 1) \\ y(1) - \int_0^1 y^2(s)ds = \sin(1) + \frac{1}{2}(\cos(1)\sin(1) - 1) \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Remplaçons, à l'aide de la formule de trapèzes

$$\int_0^1 \Phi(s)ds \approx \frac{\Phi(0) + 2\Phi(0.25) + 2\Phi(0.5) + 2\Phi(0.75) + \Phi(1)}{8}$$

On a pour l'intégrale de la deuxième équation de (4.21) :

$$\Phi(s) = 0.25y^2(s)$$

de sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(0) = 0, \\ \Phi(0.25) = 0.25y^2(0.25) \\ \Phi(0.5) = 0.25y^2(0.5), \\ \Phi(0.75) = 0.25y^2(0.75), \\ \Phi(1) = 0.25y^2(1). \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 0.25y^2(s)ds \approx 0.0625y^2(0.25) + 0.0625y^2(0.5) + 0.0625y^2(0.75) + 0.03125y^2(1). \quad (4.22)$$

La fonction à intégrer de la troisième équation est

$$\Phi(s) = 0.5y^2(s)$$

de sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(0) = 0, \\ \Phi(0.25) = 0.5y^2(0.25), \\ \Phi(0.5) = 0.5y^2(0.5), \\ \Phi(0.75) = 0.5y^2(0.75), \\ \Phi(1) = 0.5y^2(1). \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 0.5y^2(s)ds \approx 0.125y^2(0.25) + 0.125y^2(0.5) + 0.125y^2(0.75) + 0.0625y^2(1). \quad (4.23)$$

La fonction à intégrer de la quatrième équation est

$$\Phi(s) = 0.75y^2(s)$$

de sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(0) = -0, \\ \Phi(0.25) = 0.75y^2(0.25), \\ \Phi(0.5) = 0.75y^2(0.5), \\ \Phi(0.75) = 0.75y^2(0.75), \\ \Phi(1) = 0.75y^2(1). \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 0.75y^2(s)ds \approx 0.1875y^2(0.25) + 0.1875y^2(0.5) + 0.1875y^2(0.75) + 0.09357y^2(1). \quad (4.24)$$

La fonction à intégrer de la cinquième équation est

$$\Phi(s) = y^2(s)$$

de sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(0) = 0, \\ \Phi(0.25) = y^2(0.25), \\ \Phi(0.5) = y^2(0.5), \\ \Phi(0.75) = y^2(0.75), \\ \Phi(1) = y^2(1). \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 y^2(s)ds \approx 0.25y^2(0.25) + 0.25y^2(0.5) + 0.25y^2(0.75) + 0.125y^2(1). \quad (4.25)$$

Portons (4.22) , (4.23), (4.24) et (4.25) dans (4.21), il vient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(0.25) - 0.0625y^2(0.25) - 0.0625y^2(0.5) \\ \quad - 0.0625y^2(0.75) - 0.03125y^2(1) = \sin(0.25) + \frac{1}{8}(\cos(1)\sin(1) - 1) \\ y(0.5) - 0.125y^2(0.25) - 0.125y^2(0.5) \\ \quad - 0.125y^2(0.75) - 0.0625y^2(1) = \sin(0.5) + \frac{1}{4}(\cos(1)\sin(1) - 1) \\ y(0.75) - 0.1875y^2(0.25) - 0.1875y^2(0.5) \\ \quad - 0.1875y^2(0.75) - 0.09375y^2(1) = \sin(0.75) + \frac{3}{8}(\cos(1)\sin(1) - 1) \\ y(1) - 0.25y^2(0.25) - 0.25y^2(0.5) \\ \quad - 0.25y^2(0.75) - 0.125y^2(1) = \sin(1) + \frac{1}{2}(\cos(1)\sin(1) - 1) \end{array} \right. \quad (4.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ 32y(0.25) - 2y^2(0.25) - 2y^2(0.5) \\ \quad - 2y^2(0.75) - y^2(1) = 32 \sin(0.25) + 4(\cos(1)\sin(1) - 1) \\ 16y(0.5) - 2y^2(0.25) - 2y^2(0.5) \\ \quad - 2y^2(0.75) - 1y^2(1) = 16 \sin(0.5) + 4(\cos(1)\sin(1) - 1) \\ 32y(0.75) - 6y^2(0.25) - 6y^2(0.5); \\ \quad - 6y^2(0.75) - 3y^2(1) = 32 \sin(0.75) + 12(\cos(1)\sin(1) - 1) \\ 8y(1) - 2y^2(0.25) - 2y^2(0.5) \\ \quad - 2y^2(0.75) - 1y^2(1) = 8 \sin(1) + 4(\cos(1)\sin(1) - 1) \end{array} \right. \quad (4.27)$$

résolvant le système (4.27) par logiciel MATLAB (voir Annexe C)

$y(0)$	$y(0.25)$	$y(0.5)$	$y(0.75)$	$y(1)$
0	0.250542	0.485701	0.691052	0.854021

Prenons pour solution approchée de l'équation (4.20) la fonction

$$\tilde{y}(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}x(\cos(1)\sin(1) - 1) + \sum_{m=1}^5 A_m x y^2(x_m)$$

Où

i	1	2	3	4	5
x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
A_i	0.125	0.25	0.25	0.25	0.125

Ou

$$\tilde{y}(x) = \sin(x) - 0.206057x.$$

Conclusion 4.1.5 La solution obtenu approche la solution exacte.

Conclusion

Dans ce travail, on présente des équations intégrales non linéaires avec des méthodes de résolution directes. Ensuite on étudie quelques théorèmes d'existence et d'unicité dans quelques espaces fonctionnels, comme les espaces de Hölder.

Ensuite, on présente une méthode de résolution approchée, qui consiste à remplacer l'intégrale par une somme finie par la formule de quadrature, ce qui conduit à un système algébrique non linéaire. On résoud le système obtenu à l'aide de la méthode de Newton.

la méthode de quadrature constitue une approche efficace et adaptable pour la résolution numérique des équations intégrales non linéaires. Elle nécessite cependant une attention particulière à la sélection des points de quadrature et à l'analyse de la convergence pour garantir des résultats précis et fiables.

Bibliographie

- [1] M. KRASNOV, A. KISSÉLEV, G. MAKARENKO, *Équations intégrales*, Edition Mir Moscou. Traduction Editions Mir, 1977.
- [2] A. RAHMOUNE, *Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales*, Thèse de doctorat, Université de Batna, 2011.
- [3] A. RAHMOUNE, *Équations intégrales linéaires et non linéaires* Analyse et techniques de résolution, 2018.
- [4] A. WAZWAZ, *Linear and Nonlinear Integral Equations*, Higher Education Press, Beijing, 2011.
- [5] R. PRECUP, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Springer-Science+Business Media, 2002.
- [6] S. M. ZEMYAN, *The Classical Theory of Integral Equations*, Springer Science Business Media LLC, 2012.
- [7] A. KAROUI, *On the Existence of Continuous Solutions of Nonlinear Integral Equations*, University of Carthage, Department of Mathematics, Faculty of Sciences of Bizerte, Jarzouna 7021, Tunisia. Appl. 18(2005) 299-305.
- [8] A. KAROUI, *Existence and approximate solutions of some nonlinear integral equations*, Archiv. Inequal. Appl. (in press).
- [9] H. HOCHSTADT, *Integral Equations*, Wiley Classics Edition Published in 1989.
- [10] G. MICULA, PARASCHIVA PAVEL, *Differential and Integral Equations through Practical Problems and Exercises*, Springer Science Business Media, 1992.
- [11] H. QUEFFÉLEC, C. ZUILY, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, Paris, 2013.

- [12] J. CABALLERO, M ABDALLA DARWISH, K SADARANGANI, *Solvability of a quadratic integral equation of Fredholm type in Holder spaces*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2014.
- [13] R. KATANI, *Numerical solution of the Fredholm integral equations with a quadrature method*, Article in SEMA Journal, September 2018.
- [14] M. RAHMAN, *Integral Equation and their Applications*, WIT Press 2007.

Annexes

Annexe A

% Définition des équations du système non linéaire

$$F = @(x) [x(1) - 0.0208 * x(1)^2 - 0.0104 * x(2)^2 - 1.3865; \\ x(2) - 0.25 * x(1)^2 - 0.0204 * x(2)^2 - 2.4561];$$

% Définition de la jacobienne du système non linéaire

$$J = @(x) [1 - 0.0416 * x(1) - 0.0208 * x(2); \\ -0.5 * x(1) - 0.0408 * x(2)];$$

% Initialisation de la solution

$x0 = [1; 1];$

% Nombre d'itérations maximales

$max_iter = 100;$

% Tolerance pour la convergence

$tol = 1e - 6;$

% Itérations de la méthode de Newton

$for i = 1 : max_iter$

% Évaluation de la fonction F et de la jacobienne J

$$f = F(x0);$$

$$j = J(x0);$$

% Calcul de la direction de descente

$$y = -j/f;$$

% Mise à jour de la solution

$$x0 = x0 + y;$$

% Vérification de la convergence

$if norm(f) < tol break; end end$

% Affichage de la solution

Annexe B

```

% Définition des équations du système non linéaire

F = @(x, lambda) [8 * x(1) - 4 * lambda * x(1)^2 - 3 * lambda * x(2)^2 + lambda * x(3)^2;
                 32 * x(2) - 6 * lambda * x(1)^2 - 5 * lambda * x(2)^2 + 3 * lambda * x(3)^2 + 2 * lambda * x(4)^2;
                 32 * x(3) + 2 * lambda * x(1)^2 + 3 * lambda * x(2)^2 - 5 * lambda * x(3)^2 - 6 * lambda * x(4)^2;
                 8 * x(4) + lambda * x(2)^2 - 3 * lambda * x(3)^2 - 4 * lambda * x(4)^2];

% Définition de la jacobienne du système non linéaire

J = @(x, lambda) [8 - 8 * lambda * x(1), -6 * lambda * x(2), +2 * lambda * x(3), 0;
                 -12 * lambda * x(1), 32 - 10 * lambda * x(2), +6 * lambda * x(3), +4 * lambda * x(4);
                 2 * lambda * x(1), -10 * lambda * x(2), 32 - 10 * lambda * x(3), -12 * lambda * x(4);
                 0, lambda * x(2), -6 * lambda * x(3), 8 - 8 * lambda * x(4)];

% Valeur de lambda lambda=1
% Initialisation de la solution x0 = [1.25; 0.5; 0.5; 1.25];
% Nombre d'itérations maximales    max -iter = 100;

% Tolerance pour la convergence tol = 1e-6;
% Itérations de la méthode de Newton
for i = 1 : max -iter
% Évaluation de la fonction F et de la jacobienne J

f = F(x0, lambda);
j = J(x0, lambda);

% Calcul de la direction de descente
y = -j/f;

% Mise à jour de la solution
x0 = x0 + y;

% Vérification de la convergence
if norm(f) < tol break; end end
% Affichage de la solution

```

Annexe C

```

% Définition du système non linéaire

F = @(y) [32 * y(1) - 2 * y(1)^2 - 2 * y(2)^2 - 2 * y(3)^2 - y(4)^2 - 32 * sin(0.25) - 4 * (cos(1) * sin(1) - 1);
         16 * y(2) - 2 * y(1)^2 - 2 * y(2)^2 - 2 * y(3)^2 - y(4)^2 - 16 * sin(0.5) - 4 * (cos(1) * sin(1) - 1);
         32 * y(3) - 6 * y(1)^2 - 6 * y(2)^2 - 6 * y(3)^2 - 3 * y(4)^2 - 32 * sin(0.75) - 12 * (cos(1) * sin(1) - 1);
         8 * y(4) - 2 * y(1)^2 - 2 * y(2)^2 - 2 * y(3)^2 - y(4)^2 - 8 * sin(1) - 4 * (cos(1) * sin(1) - 1)];

```

% Définition de la matrice jacobienne

```
J = @(y) [32 - 4 * y(1), -4 * y(2), -4 * y(3), -2 * y(4);  
-4 * y(1), 16 - 4 * y(2), -4 * y(3), -2 * y(4);  
-6 * y(1), -6 * y(2), 32 - 12 * y(3), -6 * y(4);  
-2 * y(1), -2 * y(2), -2 * y(3), 8 - 2 * y(4)];
```

% Valeur initiale de y

```
y0 = [0.004; 0.008; 0.01; 0.015];
```

% Tolérance et nombre maximum d'itérations

```
tol = 1e-6;
```

```
max-iter = 100;
```

% Méthode de Newton

```
y = y0; for i = 1 :max-iter
```

```
Fy = F(y);
```

```
Jy = J(y);
```

```
z = -Jy / Fy;
```

```
y = y + z;
```

```
if norm(z) < tol
```

```
break
```

```
end
```

```
y = y; end
```

```
    % Affichage du résultat
```