

RECHERCHES EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Sous la direction de : P.G. CIARLET et J.-L. LIONS

MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS POUR LES PROBLÈMES DE COQUES MINCES

M. BERNADOU

MASSON 

RECHERCHES EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Sous la direction de : P.G. CIARLET et J.-L. LIONS
Membres de l'Institut

- 1 - **Élasticité tridimensionnelle**, par P. G. CIARLET. 1986, 168 pages.
 - 2 - **Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire**, par P. DESTUYNDER. 1986, 176 pages.
 - 3 - **Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués**, par A. EL JAI et A.-J. PRITCHARD. 1986, 208 pages.
 - 4 - **Applications of Multiple Scaling in Mechanics**. Applications des échelles multiples en mécanique, coordonné par P.G. CIARLET et E. SANCHEZ-PALENCIA. 1987, 360 pages.
 - 5 - **Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity**, par D. LEGUILLON et E. SANCHEZ-PALENCIA. 1987, 200 pages.
 - ♦ 6 - **Modelling, Analysis and Control of Thin Plates**, par J.E. LAGNESE et J.-L. LIONS. 1988, 184 pages.
 - 7 - **Méthodes des éléments finis pour les fluides**, par O. PIRONNEAU. 1988, 200 pages.
 - 8 - **Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués**, par J.-L. LIONS.
Tome 1 : **Contrôlabilité exacte**. 1988, 552 pages.
 - 9 - **Tome 2 : Perturbations**. 1988, 288 pages.
 - 10 - **Écoulements de fluide : compacité par entropie**, par F. NECAS, cours écrit par S. MAS GALIC. 1989, 112 pages.
 - ♦ 11 - **Bifurcation in Rotating Bodies**, par P.-J. RABIER et J.T. ODEN. 1989, 160 pages.
 - 12 - **Courbes et surfaces rationnelles. Applications à la CAO**, par J.-C. FIOROT et P. JEANNIN. 1989, 296 pages.
 - ♦ 13 - **On Numerical Approximation in Bifurcation Theory**, par M. CROUZEIX et J. RAPPAZ. 1989, 168 pages.
 - ♦ 14 - **Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures**, par P.-G. CIARLET. 1990, 224 pages.
 - ♦ 15 - **Numerical Analysis of Viscoelastic Problems**, par P. LE TALLEC. 1990, 144 pages.
 - 16 - **Génération automatique de maillages**. Applications aux méthodes d'éléments finis, par P.-L. GEORGE. 1990, 356 pages.
 - 17 - **Systèmes dynamiques dissipatifs et applications**, par A. HARAUX. 1990, 144 pages.
 - 18 - **Méthodes mathématiques pour la CAO**, par J.-J. RISLER. 1991, 196 pages.
 - 19 - **Problèmes variationnels dans les multi-domaines**. Modélisation des jonctions et applications, par H. LE DRET. 1991, 208 pages.
- ♦ *Masson / Springer Verlag co-publication*

Suite en page 3 de couverture

Table des Matières

(see Contents page xii)

Avant-Propos	xvii
Partie I Présentation générale des équations de coques minces ; Résultats d'existence et d'unicité de solutions	1
ORIENTATION	2
1 DESCRIPTION DE LA GEOMETRIE D'UNE COQUE MINCE	3
1.1 Définition de la surface moyenne	3
1.2 Définition géométrique de la coque non déformée \mathcal{C}	7
1.3 Quelques exemples	8
1.3.1 Toiture cylindrique	8
1.3.2 Tore	9
1.3.3 Paraboloïde hyperbolique sous pression uniforme q	10
1.3.4 Un barrage-voûte	11
2 APPROXIMATIONS BIDIMENSIONNELLES DES DEFORMATIONS D'UNE COQUE MINCE	16
3 LE MODELE LINEAIRE DE NAGHDI	17
3.1 Aspects géométriques de la déformation	17
3.2 Relations "déformation-déplacement"	18
3.3 Relations "contraintes-déformations"	18
3.4 Energie de déformation de la coque	19
3.5 Energie potentielle des charges extérieures	20
3.6 Formulation variationnelle	20
4 LE MODELE LINEAIRE DE KOITER	21
4.1 Passage du modèle de Naghdi au modèle de Koiter	21
4.2 Formulation variationnelle	22
5 EXISTENCE ET UNICITE D'UNE SOLUTION POUR LE MODELE DE KOITER	23
5.1 Ellipticité du modèle de Koiter	23
5.2 Existence et unicité d'une solution pour le modèle de Koiter ...	30

6	EXISTENCE ET UNICITE D'UNE SOLUTION POUR LE MODELE DE NAGHDI	31
6.1	Ellipticité du modèle de Naghdi	31
6.2	Existence et unicité d'une solution pour le modèle de Naghdi	34
7	AUTRES RESULTATS D'EXISTENCE ET COMMENTAIRES	35
7.1	Cas de modèles linéaires qui satisfont le lemme du mouvement rigide	35
7.2	Cas de modèles linéaires qui ne satisfont pas le lemme du mouvement rigide : un modèle linéaire de coque peu profonde	36
7.3	Cas d'un modèle non linéaire de coque peu profonde	38
7.4	Cas de problèmes non linéaires de coque minces plus généraux : quelques questions ouvertes	40
 Partie II Approximations du modèle de Koiter par diverses méthodes d'éléments finis		 41
ORIENTATION		42
1	APPROXIMATION PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS CONFORMES	43
1.1	Le problème continu ; mise sous forme matricielle	43
1.2	Le problème discret sans intégration numérique	48
1.3	Le problème discret avec intégration numérique	50
1.4	Cas d'un domaine de référence à frontière courbe	76
1.4.1	Construction et propriétés d'interpolation d'un élément fini courbe de classe C^1	77
1.4.2	Quelques tests numériques des propriétés d'interpolation	88
1.4.3	Approximation de problèmes de coques minces	90
1.5	Implémentation : des équations au programme	95
1.5.1	Modules d'interpolation	98
1.5.2	Modules fonctionnelle d'énergie et second membre élémentaires lorsque V_{h1} et V_{h2} sont construits à l'aide de triangles d'Argyris	105
1.5.3	Modules fonctionnelle d'énergie et second membre élémentaires lorsque les espaces V_{h1} et V_{h2} sont respectivement construits à l'aide de triangles de Ganev et d'Argyris	107
1.6	Test numérique	109
2	APPROXIMATION PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS NONCONFORMES	111
2.1	Les méthodes d'approximation D.K.T.	112
2.2	Convergence et estimation asymptotique de l'erreur	117
2.3	Implémentation	122

2.4	Tests numériques	131
2.4.1	Toiture cylindrique de Scordelis et Lo	131
2.4.2	Paraboloïde hyperbolique encastré sous pression uniforme ..	134
2.4.3	Coque cylindrique pincée	137
2.5	Autres méthodes d'éléments finis non conformes	139
3	METHODES D'ELEMENTS FINIS MIXTES	142
3.1	Formulation mixte continue de type Hermann-Miyoshi	142
3.2	Formulation mixte discrète de type Hermann-Miyoshi	144

Partie III Approximation conjointe de la géométrie de la coque et du déplacement

145

ORIENTATION

146

1 APPROXIMATION PAR FACETTES PLANES

147

1.1	Le problème continu	148
1.2	Une méthode conforme d'éléments finis	149
1.3	Le problème discret utilisant les éléments finis de type facette planes et les relations de compatibilité	150
1.3.1	La surface moyenne approchée S_h	150
1.3.2	L'espace discret \vec{V}_h utilisant les relations de compatibilité ..	151
1.3.3	Définition du problème discret utilisant l'approximation par facettes planes	156
1.4	Les erreurs de consistance	157
1.4.1	Estimation abstraite de l'erreur	157
1.4.2	Estimation de l'erreur de consistance $ a(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - b_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) $	158
1.4.3	Estimation de l'erreur de consistance $ f(\vec{w}_h) - g_h(\vec{w}_h) $	164
1.4.4	La forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ est uniformément \vec{V}_h -elliptique ..	164
1.5	Pseudo-convergence et estimations d'erreur	164
1.6	Une nouvelle méthode convergente pour des coques de forme quelconque	165
1.7	Conclusions	168

2 APPROXIMATION PAR FONCTIONS B-SPLINES ET APPLICATIONS A DES PALES DE TURBINE

170

2.1	Introduction	170
2.2	Définition des fonctions B-splines	172
2.2.1	Les fonctions de base B-splines à une variable	172
2.2.2	Approximation de fonctions d'une variable à l'aide de fonctions B-splines ; choix de la suite $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$	173
2.2.3	Interpolation de la surface moyenne de la coque	178
2.3	Estimation de l'erreur d'approximation de la surface moyenne	180

2.4	Interpolation de l'épaisseur et erreur associée	180
2.5	Etude de l'approximation globale (géométrie et déplacement) et estimations d'erreur	181
2.5.1	Description de chacune des approximations	181
2.5.2	Estimation abstraite de l'erreur	184
2.5.3	Estimation de l'erreur $\ \vec{u} - \vec{u}_h\ $ dans le cas de coques générales	185
2.6	Exemples d'estimation d'erreur	190
2.7	Modélisation géométrique d'une pale de turbine ou de compresseur axial	194
2.7.1	Description de la pièce à modéliser	194
2.7.2	Prélèvement des données et interpolations	195
2.7.3	La pale approchée	197
2.8	La méthode incrémentale totale appliquée aux équations non linéaires de coques minces	198
2.8.1	Formulation variationnelle et différentielle des équations non linéaires de coques minces considérées	199
2.8.2	La méthode incrémentale totale	202
2.9	Calcul des modes propres de vibrations libres	204
2.9.1	Equations de vibrations libres d'une coque mince générale .	205
2.9.2	Quelques résultats concernant le problème aux valeurs propres	210
2.9.3	Approximation par des méthodes conformes d'éléments finis	212
2.9.4	Implémentation	214
2.10	Vibrations libres d'une pale de turbine	214
2.10.1	Calcul statique non linéaire	214
2.10.2	Calcul des modes de vibrations libres	215
3	JONCTIONS ENTRE COQUES	218
3.1	Equations de jonctions entre coques	219
3.1.1	Equations d'équilibre pour une seule coque mince	219
3.1.2	Jonction entre deux coques	220
3.1.3	Exemple : jonction entre deux tubes cylindriques	221
3.1.4	Les équations du problème de jonction	223
3.2	Formulations variationnelles et résultats d'existence	224
3.2.1	Cas d'une charnière élastique	226
3.2.2	Cas d'une charnière rigide	227
3.3	Approximation par des méthodes d'éléments finis	227
 Partie IV Flambement linéaire d'une coque mince de forme générale		 231
ORIENTATION		232

1	DIFFERENTS TYPES D'EQUILIBRES D'UNE STRUCTURE	233
1.1	Caractérisation d'une position d'équilibre d'une structure	233
1.2	Etude de la stabilité d'une configuration d'équilibre d'une structure	234
2	ACCROISSEMENT D'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE D'UNE COQUE MINCE ELASTIQUE	236
2.1	Diverses expressions de l'accroissement de l'énergie de déformation de la coque	236
2.2	Accroissement de l'énergie potentielle des charges extérieures selon leur nature	240
2.3	Accroissement d'énergie potentielle totale d'une coque mince élastique au voisinage d'un point d'équilibre	241
3	FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME DE FLAMBEMENT D'UNE COQUE MINCE ELASTIQUE	243
3.1	Caractérisation des modes de flambement	243
3.2	Détermination effective des modes de flambement	244
3.3	Etude mathématique	247
3.3.1	Quelques rappels bibliographiques	247
3.3.2	Cas de coques générales	250
4	EXEMPLES	254
4.1	Spécifications géométriques des exemples considérés	254
4.1.1	Cylindre circulaire	254
4.1.2	Tour de refroidissement	255
4.1.3	Pale de turbine	257
4.2	Evaluation du travail et des contraintes associées aux charges permanentes	257
4.2.1	Charges gravitationnelles (poids propre)	257
4.2.2	Charges thermiques	259
4.2.3	Charges dues aux effets du vent permanent	261
4.2.4	Contraintes $p^{\alpha\beta}$ liées aux charges permanentes	262
4.2.5	Contraintes $q^{\alpha\beta}$ liées aux charges fluctuantes	262
5	IMPLEMENTATION	263
5.1	Approximation des modes de flambement à l'aide du triangle d'Argyris	263
5.2	Approximation des modes de flambement à l'aide du triangle de HCT-complet	267
5.3	Approximation des modes de flambement à l'aide du triangle de HCT-réduit	268
5.4	Approximation des modes de flambement à l'aide du triangle de type (1) et de type HCT-réduit	268

6	RESULTATS NUMERIQUES	270
6.1	Flambement linéaire de plaques	270
6.1.1	Flambement d'Euler	270
6.1.2	Flambement d'une plaque simplement supportée sur les quatre côtés	273
6.2	Flambement de cylindres circulaires sous compression axiale	274
 Partie V Optimisation de forme d'une coque mince élastique sous différents critères		281
ORIENTATION		282
1	INTRODUCTION	283
2	FORMULATION GENERALE DES EQUATIONS DE COQUES MINCES DE W.T. KOITER	285
2.1	Définition géométrique d'une coque mince	285
2.2	Déformation d'une coque mince	285
2.3	Energie potentielle totale d'une coque mince	286
2.4	Formulation variationnelle "unifiée" de quelques problèmes de coques minces	287
2.5	Quelques choix possibles pour les fonctions $\vec{v} \rightarrow \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v})$ et $\vec{v} \rightarrow \rho_{\alpha\beta}(\vec{v})$	288
2.5.1	Equations linéaires générales	288
2.5.2	Equations linéaires générales (une alternative)	289
2.5.3	Equations linéaires de coques peu profondes	289
2.5.4	Equations non linéaires de coques générales	289
2.5.5	Equations non linéaires de coques peu profondes	289
2.6	Quelques résultats d'existence de solutions	290
2.7	Une autre expression de la formulation variationnelle (cas linéaire)	290
2.7.1	Expression matricielle de la forme bilinéaire	291
2.7.2	Expression matricielle de la forme linéaire	292
3	DERIVEE D'UNE FONCTIONNELLE PAR RAPPORT A LA GEOMETRIE D'UNE COQUE	295
3.1	Le principe général du calcul de la dérivée d'une fonctionnelle	295
3.2	Calcul de la dérivée $\partial_{\vec{\Phi}} a(\vec{\Phi}; \vec{u}, \vec{v}) \Psi$	299
3.2.1	Calcul de $\partial_{\vec{\Phi}} (E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\Phi}) \sqrt{a(\vec{\Phi})}) \vec{\psi}$	301
3.2.2	Calcul de $\partial_{\vec{\Phi}} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{\Phi}; \vec{u}) \vec{\psi}$	301
3.2.3	Calcul de $\partial_{\vec{\Phi}} \rho_{\alpha\beta}(\vec{\Phi}; \vec{u}) \vec{\psi}$	302
3.3	Calcul de la dérivée $\partial_{\vec{\Phi}} f(\vec{\Phi}; v) \Psi$	303

4	EXEMPLES DE FONCTIONNELLES	306
4.1	Le poids de la coque	306
4.2	L'épaisseur en un point	307
4.3	Le déplacement normal en un point	307
4.4	L'énergie de déformation	308
4.5	L'énergie cinétique	308
5	DES EQUATIONS AU PROGRAMME	309
5.1	Une expression de $\partial_{\Phi} a(\Phi; u, v) \Psi$ bien adaptée à l'implémentation ...	309
5.2	Une expression de $\partial_{\Phi} f(\Phi, v) \Psi$ bien adaptée à l'implémentation	310
6	EXEMPLES	314
6.1	Optimisation de forme d'un tronc de cône	314
6.2	Optimisation de forme d'une pale de turbine	315
	BIBLIOGRAPHIE	317
	INDEX DES AUTEURS CITES	329
	INDEX DES NOTATIONS	333
	INDEX TERMINOLOGIQUE	353

MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS POUR LES PROBLÈMES DE COQUES MINCES

M. BERNADOU

Le premier objectif de cet ouvrage est de rassembler les principaux résultats d'analyse mathématique et numérique concernant l'approximation des solutions de problèmes de coques minces par des méthodes d'éléments finis. Pour cela, les principales modélisations de coques minces sont énoncées et les résultats d'existence de solutions dans des espaces fonctionnels appropriés sont établis. L'approximation de ces solutions par diverses méthodes d'éléments finis est examinée en détails : formulation des problèmes approchés, étude de l'existence et de la convergence des solutions approchées vers la solution exacte, obtention d'estimations d'erreurs *a priori*. Ces développements prennent non seulement en compte l'approximation du déplacement mais aussi les approximations de la géométrie et celles liées à l'utilisation de techniques d'intégration numérique.

Des critères précis pour le choix des schémas d'intégration numérique appropriés sont donnés. Ces différents résultats sont relatifs aux problèmes de coques minces de forme quelconque, aux problèmes de flambage linéaire et aux problèmes d'optimisation de forme.

Le second objectif de l'ouvrage est de décrire très précisément comment effectuer l'implémentation des principales méthodes d'éléments finis ainsi analysées. Cela doit permettre à l'ingénieur numéricien de disposer de méthodes d'approximations fiables et, pour certaines d'entre elles, de très haut degré de précision.

Cette monographie s'adresse ainsi tant aux mathématiciens appliqués, qu'aux mécaniciens et ingénieurs numériciens ayant acquis un bon niveau de fin de deuxième et troisième cycles.

L'exposé est précis, complet et illustré par de nombreux exemples, certains classiques, d'autres d'intérêt industriel.

Docteur ès sciences, Michel Bernadou est directeur de recherche à l'INRIA.