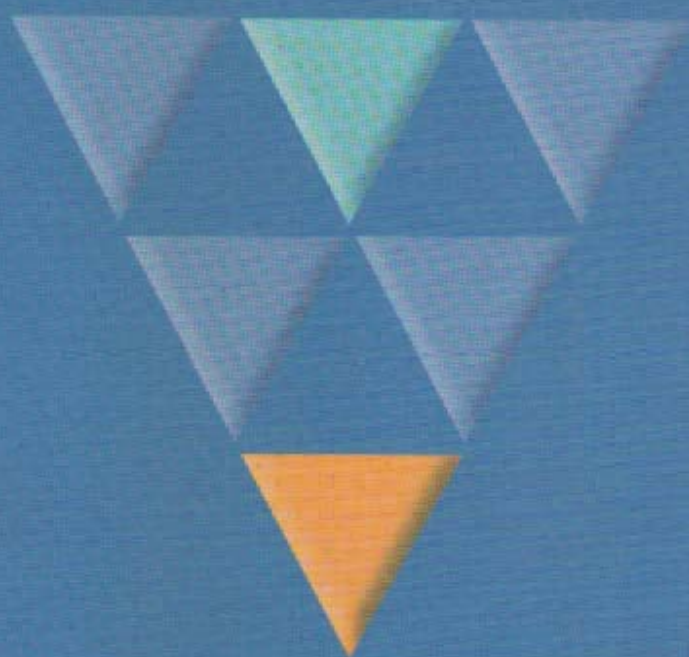


HEC

OPTION SCIENTIFIQUE

C. DEGRAVE ▼ D. DEGRAVE

Précis de mathématiques



Exercices et
problèmes résolus



Sommaire

Les énoncés dont les numéros sont suivis d'un astérisque sont destinés aux étudiants de 2^e année

Partie I – Algèbre

Exercice 101	8
Étude d'une suite de nombres complexes	
Exercice 102	10
Étude de trois suites imbriquées de nombres réels	
Exercice 103	12
Quelques propriétés de l'exponentielle d'une matrice triangulaire supérieure	
Exercice 104	15
Opérations par blocs pour le calcul des puissances d'une matrice	
Exercice 105	18
Détermination de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par quatre relations	
Exercice 106	21
Étude de quelques propriétés de l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $S(M) = JMJ$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	
Exercice 107	24
Étude de l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $F(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$ et de sa restriction à $\mathbb{R}_n[X]$	
Exercice 108	26
Étude de l'endomorphisme de $\mathcal{C}([0, +\infty[)$ défini par $u(f) = g$ avec $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = f(0)$	
Exercice 109	30
Étude de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ défini par $f(P) = P(X + 2) + P(X) - 2P(X + 1)$ et d'une suite de polynômes définie par récurrence	
Exercice 110*	37
Diagonalisation orthogonale d'une matrice carrée	
Exercice 111*	44
Étude d'une suite de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P(x) Q(x) dx$ (polynômes de Hermite)	
Exercice 112*	51
Étude d'une suite de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f g \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) g(t) dt$	
Exercice 113*	60
« Racines carrées » d'une matrice carrée	

Exercice 114	69
--------------	----

Calcul de $\inf_{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right)^2 e^{-x} dx$

Partie II - Analyse

Exercice 201	76
--------------	----

Étude de deux suites réelles définies par les solutions d'une équation $f_n(x) = 0$

Exercice 202	78
--------------	----

Étude des dérivées successives de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Exercice 203	82
--------------	----

Étude de la fonction F définie par $F(x) = \int_0^1 \ln(1+xt^2) dt$

Exercice 204	88
--------------	----

Étude de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Exercice 205	95
--------------	----

Approximation de la fonction exponentielle par des fonctions rationnelles

Exercice 206*	110
---------------	-----

Étude de la fonction g définie par $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ où f est définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]0, 1[\\ f(0) = a \end{cases}$$

Exercice 207*	114
---------------	-----

Calculs d'intégrales permettant d'obtenir la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Exercice 208*	121
---------------	-----

Étude de la fonction f_a définie par $f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Calcul de valeurs approchées de $f_a(0)$

Exercice 209*	136
---------------	-----

Calcul de la somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{C_{n+p}^n}$

Exercice 210*	139
---------------	-----

Calcul de la somme de la série de terme général $u_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$

Exercice 211*	143
---------------	-----

Approximations de la constante d'Euler et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$

Exercice 212*	153
---------------	-----

Extréma de la fonction f_a définie par $f_a(x, y) = (1 + y + xy + ax^2) e^y$

Exercice 213*	155
---------------	-----

Extréma de la fonction f définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$