J'intègre

Série E. Ramis

Claude Deschamps
André Warusfel

Jean François Ruaud • François Moulin
Jean-Claude Sifre • Anne Miquel

Mathématiques

TOUT-EN-UN • 2^e^ année MP

Cours et exercices corrigés

NOUVEAU PROGRAMME

2^e^ édition

DUNOD

Table des matières

1 Compléments d'algèbre 1

1. Relation d'équivalence sur un ensemble 1
2. Compléments sur les groupes et les anneaux 3
   - 2.1 Groupes 3
   - 2.2 Anneaux 9
3. Groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 13
   - 3.1 Relation de congruence modulo n 13
   - 3.2 Groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 15
   - 3.3 Structure du sous-groupe engendré par un élément 17
   - 3.4 Structure des groupes monogènes 20
4. Arithmétique de $\mathbb{Z}$ 21
   - 4.1 Structure des idéaux de $\mathbb{Z}$ 21
   - 4.2 Applications aux théorèmes de Bézout et Gauss 21
   - 4.3 Anneau quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 22
   - 4.4 Utilisation de la notion de congruence et des anneaux quotients 26
5. Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ 33
   - 5.1 Structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ 33
   - 5.2 Applications aux théorèmes de Bézout et Gauss 33

2 Algèbre linéaire 45

1. Familles génératrices, familles libres et bases 45
   - 1.1 Combinaisons linéaires 45
   - 1.2 Familles génératrices, familles libres et bases 46
   - 1.3 Détermination d'une application linéaire par sa valeur sur une base 49
2. Applications bilinéaires et structure d'algèbre 49
   - 2.1 Applications bilinéaires 49
   - 2.2 Algèbres 50
3. Somme et somme directe 55
   - 3.1 Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels 55
   - 3.2 Somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels 56
   - 3.3 Décomposition en somme directe 57

4. Applications linéaires 60
4.1 Sous-espaces stables 60
4.2 Isomorphisme associé à une application linéaire 63
4.3 Théorème du rang et codimension 64
4.4 Formes linéaires et hyperplans 66

3 Applications linéaires et dualité en dimension finie **73**
1. Matrices 73
1.1 Représentation matricielle des applications linéaires 73
1.2 Représentation matricielle des endomorphismes 75
1.3 Opérations élémentaires 82
2. Dual d'un espace vectoriel de dimension finie 88
2.1 Base duale 88
2.2 Formes linéaires et sous-espaces vectoriels 90
2.3 Systèmes d'équations linéaires 91

4 Réduction des endomorphismes **103**
1. Polynômes d'endomorphisme 103
1.1 Morphisme d'évaluation 103
1.2 Idéal annulateur et polynôme minimal 105
1.3 Lemme des noyaux 109
2. Éléments propres d'un endomorphisme 113
2.1 Vecteurs propres et valeurs propres 113
2.2 Indépendance des sous-espaces propres 118
2.3 Polynôme caractéristique 119
2.4 Théorème de Hamilton-Cayley 127
3. Endomorphismes diagonalisables 129
3.1 Définition et caractérisations élémentaires 129
3.2 Réduction des endomorphismes diagonalisables 134
3.3 Caractérisation par le polynôme minimal 136
4. Endomorphismes trigonalisables 138
4.1 Définition 138
4.2 Caractérisation des endomorphismes trigonalisables 138
4.3 Applications 142

5 Séries numériques **153**
1. Généralités 153
1.1 Séries convergentes 153
1.2 Suites et séries 156
2. Séries à termes réels positifs 157
2.1 Convergence par comparaison directe 158
2.2 Règle de Riemann 159
2.3 Comparaison logarithmique 161
2.4 Complément : cas de convergence lente 163

2.5 Sommation des relations de comparaison 165
2.6 Utilisation d'une intégrale 167
3. Développement décimal d'un réel positif 168
3.1 Valeurs approchées décimales 168
3.2 Développements décimaux 173
4. Séries à termes complexes 175
4.1 Suites de Cauchy 175
4.2 Critère de Cauchy pour les séries 176
4.3 Convergence absolue 176
4.4 Séries alternées 179
4.5 Compléments (hors programme) 182
5. Séries doubles 185
5.1 Séries doubles réelles positives 187
5.2 Série doubles complexes 190
5.3 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes 193
6. Estimation du reste d'une série convergente 194
6.1 Développement asymptotique du reste 194
6.2 Vitesse de convergence 197

6 Espaces vectoriels normés : définitions générales 213
1. Norme et distance 213
1.1 Norme 213
1.2 Distance 217
1.3 Exemples classiques d'espaces vectoriels normés 221
2. Suites et séries d'un espace vectoriel normé 225
2.1 Suites et séries convergentes 225
2.2 Valeurs d'adhérence 229
2.3 Relations de comparaison 230
3. Topologie d'un espace vectoriel normé 231
3.1 Voisinages, ouverts et fermés 231
3.2 Intérieur, adhérence et frontière d'une partie 237
4. Étude locale et continuité 242
4.1 Limite 242
4.2 Relations de comparaison 245
4.3 Continuité 245
4.4 Continuité uniforme 248
5. Applications linéaires continues 249
5.1 Applications linéaires et bilinéaires continues 249
5.2 Norme subordonnée d'une application linéaire continue 253

7 **Espaces vectoriels normés : théorèmes fondamentaux** 265
1. Compacité . . . 265
   1.1 Parties compactes d'un espace vectoriel normé . . . 265
   1.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{K}^p$ . . . 269
   1.3 Applications continues sur un compact . . . 271
2. Complétude . . . 274
   2.1 Suites de Cauchy d'un espace vectoriel normé . . . 274
   2.2 Parties complètes d'un espace vectoriel normé . . . 277
3. Espaces de Banach . . . 278
   3.1 Définition et exemples . . . 278
   3.2 Séries d'un espace vectoriel normé complet . . . 283
   3.3 Applications à valeurs dans un espace complet . . . 288
4. Connexité par arcs . . . 289
   4.1 Parties connexes par arcs . . . 290
   4.2 Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ et applications . . . 291
5. Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . 292
   5.1 Équivalence des normes . . . 292
   5.2 Continuité des applications linéaires . . . 294
   5.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . 296
   5.4 Complétude . . . 297
   5.5 Espaces d'applications linéaires . . . 297

8 **Suites et séries de fonctions** 311
1. Espaces de fonctions classiques . . . 311
   1.1 Les fonctions continues par morceaux . . . 311
   1.2 Les fonctions en escaliers . . . 312
   1.3 Les fonctions affines par morceaux . . . 313
   1.4 Les fonctions continues par morceaux 2π périodiques . . . 313
2. Suites de fonctions . . . 314
   2.1 Différents modes de convergence . . . 314
   2.2 Espace des applications bornées sur A . . . 319
   2.3 Conservation des propriétés par convergence uniforme . . . 321
   2.4 Intégration et dérivation d'une suite de fonctions numériques . . . 324
3. Théorèmes d'approximation . . . 332
   3.1 Les fonctions continues par morceaux . . . 332
   3.2 Les fonctions affines par morceaux . . . 333
   3.3 Théorème de Weierstrass . . . 334
   3.4 Théorème de Weierstrass trigonométrique . . . 336
4. Séries de fonctions . . . 337
   4.1 Différents modes de convergence . . . 337
   4.2 Convergence normale . . . 341
   4.3 Conservation des propriétés par convergence uniforme . . . 344
   4.4 Le cas des séries de fonctions numériques . . . 345

9 Séries entières 359

1. Généralités 359
   - 1.1 Définition d'une série entière 359
   - 1.2 Opérations sur les séries entières 360
2. Convergence d'une série entière et fonction somme 360
   - 2.1 Rayon de convergence d'une série entière 360
   - 2.2 Convergence uniforme et séries entières 368
3. Propriétés de la fonction somme d'une série entière 369
   - 3.1 Continuité de la fonction somme 369
   - 3.2 Intégration de la fonction somme 370
   - 3.3 Dérivabilité de la fonction somme 371
   - 3.4 Problèmes sur le bord 372
4. Exponentielle complexe 374
   - 4.1 Construction de l'exponentielle complexe et du nombre π 375
   - 4.2 Séries entières réelles 382
5. Fonctions développables en série entière 384
   - 5.1 Cas des fractions rationnelles de la variable complexe 384
   - 5.2 Cas des fonctions de la variable réelle 386

10 Fonctions vectorielles d'une variable réelle 407

1. Intégration sur un segment 407
   - 1.1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux 408
   - 1.2 Propriétés de l'intégrale 409
   - 1.3 Limites et intégrales 418
2. Dérivation 419
   - 2.1 Dérivée en un point 420
   - 2.2 Caractérisation des fonctions constantes 421
   - 2.3 Fonctions de classe C^1 422
   - 2.4 Fonctions de classe C^k 426
3. Primitives et intégrales 428
   - 3.1 Primitives des fonctions continues 428
   - 3.2 Théorème fondamental 428
   - 3.3 Calcul d'intégrales 429
   - 3.4 Inégalité des accroissements finis 431
4. Formules de Taylor 433
   - 4.1 Formule de Taylor avec reste intégral 433
   - 4.2 Inégalité de Taylor-Lagrange 434
   - 4.3 Développements limités 435
   - 4.4 Formule de Taylor-Young 435
5. Dérivation d'une limite 436
   - 5.1 Primitivation 436
   - 5.2 Dérivation 437
   - 5.3 Cas des séries 437

11 Intégration sur un intervalle quelconque 447
1. Intégrabilité des fonctions à valeurs réelles positives 447
   1.1 Définition 447
   1.2 Conditions d'intégrabilité 451
   1.3 Comparaison série-intégrale 456
2. Intégrale des fonctions à valeurs vectorielles 460
   2.1 Intégrabilité 460
   2.2 Intégrale des fonctions sommables 462
   2.3 Propriétés de l'intégrale 463
   2.4 Calcul d'une intégrale 466
   2.5 Comparaison série-intégrale 468
   2.6 Intégration des relations de comparaison 471
   2.7 Convergence en moyenne et en moyenne quadratique 475
3. Théorèmes de convergence 479
   3.1 Convergence uniforme 479
   3.2 Convergence dominée 480
   3.3 Intégration terme à terme d'une série de fonctions 483
4. Intégrales dépendant d'un paramètre 487
   4.1 Continuité sous le signe $\int$ 487
   4.2 Dérivation sous le signe $\int$ 490
   4.3 Un exemple : la fonction Γ 497

12 Intégrales doubles 507
1. Intégrale double sur un rectangle 507
   1.1 Théorème de Fubini 507
   1.2 Cas des fonctions positives 509
   1.3 Fonctions vectorielles 514
2. Intégrale double sur un compact élémentaire 523
   2.1 Fonction intégrable sur une partie bornée 523
   2.2 Compacts élémentaires 525
   2.3 Changement de variable 527

13 Espaces préhilbertiens 535
1. Espaces préhilbertiens réels 535
   1.1 Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques 535
   1.2 Produit scalaire et norme d'un espace préhilbertien réel 543
   1.3 Orthogonalité et orthogonalisation 547
   1.4 Espaces euclidiens 550
   1.5 Sous-espaces orthogonaux 552
2. Espaces préhilbertiens complexes 559
   2.1 Formes sesquilinéaires hermitiennes définies positives 559
   2.2 Produit scalaire et norme d'un espace préhilbertien complexe 564
   2.3 Orthogonalité et orthogonalisation 568
   2.4 Espaces hermitiens 571
   2.5 Sous-espaces orthogonaux 572

14 Endomorphismes d'un espace euclidien 585
1. Endomorphisme d'un espace euclidien 585
1.1 Adjoint d'un endomorphisme 585
1.2 Endomorphismes symétriques 589
1.3 Endomorphismes et formes bilinéaires symétriques 591
1.4 Endomorphismes orthogonaux 593
2. Réduction des endomorphismes 600
2.1 Réduction des endomorphismes symétriques 600
2.2 Réduction d'une forme bilinéaire symétrique 604
2.3 Réduction des endomorphismes normaux 609

15 Séries de Fourier 617
1. Espaces de fonctions périodiques 617
1.1 Fonctions périodiques 617
1.2 Produit scalaire et semi-normes usuelles 621
1.3 Fonctions exponentielles et polynômes trigonométriques 623
2. Coefficients et sommes de Fourier 628
2.1 Coefficients et sommes partielles de Fourier 628
2.2 Interprétation géométrique 630
2.3 Propriétés des coefficients de Fourier 631
2.4 Coefficients de Fourier d'une fonction dérivée 633
2.5 Coefficients de Fourier de la somme d'une série trigonométrique convergeant uniformément 636
3. Convergence ponctuelle 637
3.1 Théorème de convergence ponctuelle 637
3.2 Théorème de convergence normale 643
3.3 Théorème d'approximation de Weierstrass 645
4. Convergence en moyenne quadratique 646
4.1 Espace des fonctions périodiques continues 646
4.2 Espace des fonctions périodiques continues par morceaux 651
4.3 Extensions aux fonctions T-périodiques 654

16 Fonctions de plusieurs variables réelles 665
1. Applications continûment différentiables 665
1.1 Application différentiable en un point 665
1.2 Dérivée suivant un vecteur et dérivées partielles 667
1.3 Application continûment différentiable 669
2. Propriétés des applications continûment différentiables 674
2.1 Somme d'applications continûment différentiables 674
2.2 Produit d'applications continûment différentiables 677
2.3 Composée d'applications continûment différentiables 678
2.4 Difféomorphismes 682
3. Fonctions numériques continûment différentiables 687
3.1 Différentielle et gradient 687