

Table des matières

1 SÉRIES	7
1.1 Définitions.	7
1.2 Comparaison séries-intégrales.	10
1.3 Opérations sur les séries.	11
1.4 Comparaison des séries à termes positifs.	11
1.5 Séries de Leibniz.	13
1.6 Séries absolument convergentes.	14
1.7 Suites et séries de fonctions.	16
1.8 Critères fins de convergence uniforme	18
1.9 Continuité, intégrabilité, dérivabilité	20
1.10 Produits de séries absolument convergentes.	26
1.11 Séries entières.	29
1.12 Utilisation des séries entières	35
1.13 Développement d'une fonction	36
1.14 Exercices	40
2 RÉDUCTION DES MATRICES CARRÉES	49
2.1 Définitions de base.	49
2.2 Diagonalisation.	50
2.3 Triangulation.	51
2.4 Polynômes de matrices et d'opérateurs linéaires.	52
2.5 Sous-espaces caractéristiques.	53
2.6 Réduction de Jordan d'un opérateur nilpotent.	56
2.7 Réduction de Jordan d'une matrice quelconque.	58
2.8 Application de la forme de Jordan	60
2.9 Exercices	63
3 SÉRIES DE FOURIER	65
3.1 Séries trigonométriques.	65
3.2 Autres écritures des séries trigonométriques.	66
3.3 Série de Fourier d'une fonction.	67
3.4 Critères de convergence des séries de Fourier.	70
3.5 Sommes de Fejer.	74

3.6	Convergence en moyenne quadratique	76
3.7	Transformée de Fourier.	81
3.8	Exercices	90
4	ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE	93
4.1	Température d'un corps.	93
4.2	Problème de Dirichlet.	94
4.3	Problème de Dirichlet pour le disque.	96
4.4	Problème de Dirichlet pour le demi-plan.	99
4.5	Equation de la chaleur dans une barre.	102
4.6	Equation de la chaleur dans une barre de longueur infinie.	105
4.7	Petites vibrations d'une corde; équation des ondes.	108
4.8	Vibrations d'une membrane circulaire.	110
4.9	Problème de Sturm-Liouville.	113
4.10	Transformée de Fourier. Produits de convolution	114
4.11	Exercices	121
5	FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE	123
5.1	Fonctions de variable complexe.	123
5.2	Continuité et dérivabilité.	124
5.3	Formules de Cauchy.	127
5.4	Intégration et fonctions holomorphes.	129
5.5	Formule intégrale de Cauchy.	132
5.6	Développabilité en série entière des fonctions holomorphes.	133
5.7	Séries de Laurent et résidus.	135
5.8	Calcul d'intégrales par les résidus.	138
5.9	Fonctions holomorphes et fonctions harmoniques.	146
5.10	Exercices	149
5.11	Exercices	151

Chapitre 1

SÉRIES

1.1 Définitions.

Une série est une expression de la forme $u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$ où l'on a une infinité de termes u_n avec $n \in \mathbb{N}$; on note aussi cette expression $\sum u_n$ ou $\sum_n u_n$. Le terme u_n , appelé **terme général** de la série, peut être un nombre réel ou complexe, une fonction... etc.

Pratiquement se donner une série revient à se donner tout simplement la **suite** $(u_n)_{n \geq 0}$; les signes $+$ ou le signe \sum ne signifient pour le moment rien d'autre que le fait que l'on cherche à donner un sens à "l'empilement" de tous les u_n (ou à la "somme" de tous les u_n). Par exemple si on cherche à "empiler" les nombres $\frac{1}{n}$, l'impression "intuitive" est qu'il serait possible d'obtenir un nombre plus grand que tout nombre choisi auparavant.

Il en serait de même si $u_n = \frac{1}{n^2}$ avec $u_0 = 1$ en s'intéressant à la somme $1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$

On peut avoir l'impression que lorsque $u_n > 0$ pour tout n , la somme de tous ces u_n "est infinie".

Exemple :

Le "paradoxe de Zenon" peut être présenté comme suit :

Achille et une Tortue font une course. Achille court 10 fois plus vite que la Tortue et devrait la battre même s'il lui laisse un fort handicap. Cependant on peut faire le raisonnement suivant.

On suppose qu'Achille laisse 10 m d'avance à la Tortue au départ. Quand A (Achille) atteint le point T_0 où la Tortue était au temps 0 (départ) celle-ci est au point $T_1 > T_0$; quand A est en T_1 , la Tortue T est en T_2 , $T_2 > T_1$... quand A est en T_n , T est en $T_{n+1} > T_n$.

A_0 10 m T_0 $T_1 T_2$

SÉRIES DE FOURIER, transformées de Fourier, ces outils très utilisés en physique sont ici appliqués à la résolution d'équations aux dérivées partielles telles que l'équation des ondes à une dimension, l'équation de la chaleur, équation de Laplace.

Les premiers chapitres rappellent les connaissances devant être acquises par un étudiant du premier cycle s'orientant vers les mathématiques ou la physique (séries numériques, séries de fonctions, séries entières, séries de Fourier, transformées de Fourier), particulièrement dans le deuxième chapitre un complément sur les matrices (Jordanisation) est fourni afin de montrer l'utilisation de l'algèbre linéaire dans les situations physiques se traduisant par un système d'équations différentielles.

L'avant dernier chapitre prouve l'utilité de ces notions pour la résolution d'équations aux dérivées partielles avec des démonstrations rigoureuses de l'unicité de la solution.

Quant au dernier chapitre sur les fonctions complexes, il fournit des méthodes supplémentaires de calcul d'intégrales.

Cet ouvrage constitue un tout nécessaire à l'étudiant désireux de faire des études d'ingénieur. Chaque chapitre est suivi d'exercices permettant de vérifier la compréhension des outils.

Chez le même éditeur :

• *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*

A. LE P...

• *Analys...*
compl...

Y. CAU...

• *Que...*
math...

6 fasc...

Y. PLUS...

• *Mathématiques générales*
P. ROVIRA.

www.cepadues.com



MATHEMATIQUES 401286

BL1A

53288

300604

0003

1
2
X
1



Réf. : 606

I.S.B.N. : 2-65428-60



9 782854 286069