

ÉLÉMENTS D'ANALYSE RÉELLE

CAPES et Agrégation
de mathématiques

Jean-Étienne ROMBALDI



Sommaire

AVANT-PROPOS	vii
NOTATIONS	xii
1. APPROXIMATIONS RATIONNELLES DES RÉELS	1
1. L'anneau \mathbb{Z} des entiers relatifs. La division euclidienne	1
2. Bases de numération	3
3. Développement décimal d'un réel	7
4. Sous-groupes additifs de \mathbb{R}	16
5. Fractions continues	18
6. Exercices	28
2. CONTINUITÉ DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE	37
1. Limite et continuité en un point	37
2. Continuité et opérations sur les fonctions	41
3. Continuité à gauche et à droite, Discontinuités de première et deuxième espèce	42
4. Continuité des fonctions monotones	44
5. Fonctions périodiques continues	45
6. Propriétés globales des fonctions continues	46
7. Le théorème des valeurs intermédiaires	56
8. Fonctions réciproques	59
9. Exercices	62
3. DÉRIVÉES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE	77
1. Dérivée d'ordre 1 et dérivées d'ordre supérieur	77
2. Opérations sur les fonctions dérivables	81
3. Dérivée logarithmique	85
4. Extremums et dérivation	87
5. Le théorème de Darboux	88

6. Étude locale de la position d'une courbe par rapport aux sécantes . . .	89
7. Étude locale de la position d'une courbe par rapport aux tangentes . . .	91
8. Dérivation et intégration	92
9. Suites de fonctions dérivables	93
10. Fonctions différentiables	94
11. Tangente en un point d'une conique	95
12. Exercices	100
4. ÉQUATIONS FONCTIONNELLES	109
1. Morphismes du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même	109
2. Morphismes de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}, +)$	112
3. Morphismes du groupe $(\mathbb{C}, +)$ dans lui-même	112
4. L'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$ sur \mathbb{R}^*	112
5. L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ sur \mathbb{R}	114
6. L'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$	115
7. L'équation fonctionnelle $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ sur \mathbb{R} . . .	115
8. L'exponentielle complexe	117
9. L'équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$. Fonction Γ	118
10. L'équation fonctionnelle $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ sur \mathbb{R}^3	121
11. Suites complexes définies par une récurrence linéaire	127
12. Exercices	131
5. LE THÉORÈME DE ROLLE	137
1. Le théorème de Rolle	137
2. Applications du théorème de Rolle	140
3. Exercices	145
6. LE THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS	151
1. Théorème et inégalité des accroissements finis	151
2. Applications des théorèmes et inégalités des accroissements finis	154
3. Exercices	175
7. LES FORMULES DE TAYLOR	181
1. La formule de Taylor-Lagrange	181
2. Formule de Taylor avec reste intégral	182
3. Cas des fonctions de plusieurs variables	183
4. Applications des formules de Taylor	186
5. Exercices	197
8. COMPARAISON DES FONCTIONS ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS	201
1. Prépondérance, domination et équivalents	201
2. Développements limités	206

3. Le théorème de Taylor-Young	208
4. Opérations sur les développements limités	210
5. Utilisation des développements limités	215
6. Exercices	224
9. FONCTIONS CONVEXES D'UNE VARIABLE RÉELLE	233
1. Fonctions convexes	233
2. Régularité des fonctions convexes	238
3. Inégalités de convexité	247
4. Exercices	253
10. POINTS FIXES ET APPROXIMATIONS SUCCESSIVES	257
1. Cas des fonctions d'une variable réelle monotones	258
2. Suites arithmético-géométriques	260
3. Suites homographiques	260
4. Le théorème du point fixe	265
5. Applications à la résolution d'équations numériques	271
6. Accélération de la convergence des suites réelles	278
7. Exercices	293
11. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES	299
1. Équations différentielles linéaires du premier ordre	299
2. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	304
3. Équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants	308
4. Équations différentielles linéaires d'ordre n	312
5. Racines des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2	314
6. Exercices	319
Bibliographie	329
Index	331

ÉLÉMENTS D'ANALYSE RÉELLE

CAPES et Agrégation
de mathématiques

Jean-Étienne ROMBALDI

C E COURS D'ANALYSE RÉELLE est destiné aux étudiants préparant le Capes externe de mathématiques et aux enseignants préparant l'Agrégation interne couvre aussi une partie du programme d'analyse de l'Agrégation externe. Il n'est pas organisé comme un cours suivant strictement les programmes des concours cités. Il est centré sur des notions fondamentales tant pour la préparation à l'écrit que la préparation à l'oral.

C'est un ouvrage de synthèse où les chapitres sont rédigés de manière relativement indépendante avec des lignes directrices :

- approfondir les notions de base ;
- privilégier les applications à d'autres domaines des mathématiques ;
- bien analyser les hypothèses des théorèmes en proposant de nombreux contre-exemples ;
- élargir le champs des connaissances du lecteur.



9 782868 836816

ELEMENTS D'ANA401286

BL1A

5745A

050704

0001

1
2
X
1

Jean-Etienne Rombaldi est professeur agrégé de mathématiques à l'université d'Aix-Marseille III. Il a été également membre des jurys d'agrégation et de CAPES de mathématiques.



9 782868 836816

39 €

ISBN 2-86883-681-X

www.edpsciences.com



EDP
SCIENCES