

Mathématiques & Applications 36

Alexandre Ern Jean-Luc Guermond

**Éléments finis:
théorie, applications,
mise en œuvre**



Springer

SMAT'

Table des matières

1 Introduction	1
1.1 Historique	1
1.2 Organisation du livre	3
1.3 Illustrations numériques	10
Bibliographie	17

I Fondements

2 Interpolation par éléments finis	21
2.1 Interpolation en une dimension d'espace	21
2.2 Notion locale d'élément fini	32
2.3 Éléments finis de Lagrange en 2D et 3D	35
2.4 Autres éléments finis	40
2.5 Maillages en dimension 2 et 3	43
2.6 Du local au global	49
2.7 Interpolation de fonctions régulières	55
2.8 Inégalités inverses	63
2.9 Interpolation de fonctions peu régulières	66
Bibliographie	70
3 Problèmes bien posés	73
3.1 Notion de problème bien posé	73
3.2 Résultats d'existence et d'unicité	77
3.3 La méthode de Galerkin et ses variantes	85
Bibliographie	100

II Applications

4 Problèmes coercifs	103
4.1 Le laplacien et ses variantes	103
4.2 Mécanique des milieux continus déformables	120
4.3 Perte de coercivité	142

Bibliographie	150
5 Problèmes mixtes	153
5.1 Étude mathématique du problème de Stokes	154
5.2 Approximation numérique	160
5.3 Considérations sur les systèmes linéaires	177
5.4 Une technique de stabilisation	184
Bibliographie	191
6 Problèmes du premier ordre	193
6.1 Approximation de Galerkin standard en 1D	194
6.2 Formulations du type moindres carrés	201
6.3 Méthode Galerkin/Moindres carrés (GaLS)	214
6.4 Stabilisation par viscosité de sous-maille	224
6.5 Une méthode de Galerkin non standard	240
Bibliographie	242
7 Problèmes d'évolution en temps	245
7.1 Les problèmes paraboliques	246
7.2 Stokes instationnaire	265
7.3 Problèmes d'évolution sans coercivité	277
Bibliographie	293
III Mise en œuvre	
8 Maillages	297
8.1 Principes de numérotation	297
8.2 Mailleurs	300
8.3 Exemple : triangulations de Delaunay	306
Bibliographie	313
9 Quadratures numériques, assemblage et stockage	315
9.1 Quadratures numériques	315
9.2 Module de quadrature	321
9.3 Assemblage	324
9.4 Stockage des matrices creuses	328
9.5 Les conditions aux limites essentielles	332
9.6 Résumé	336
Bibliographie	337
10 Algèbre linéaire	339
10.1 Conditionnement	339
10.2 Méthodes itératives	348
10.3 Parallélisation	361
Bibliographie	365

11 Estimation d'erreur a posteriori	367
11.1 Motivations	368
11.2 Le laplacien et ses variantes	369
11.3 Le problème de Stokes	377
11.4 Estimation d'erreur a posteriori par dualité	380
11.5 Mise en œuvre numérique	385
Bibliographie	389

IV Annexes

A Conventions de notation	393
A.1 Vecteurs et matrices	393
A.2 Opérateurs différentiels	394
B Espaces de Banach et de Hilbert	397
B.1 Norme, dualité, produit scalaire	397
B.2 Opérateurs de Banach bijectifs	400
Bibliographie	408
C Éléments d'analyse fonctionnelle	409
C.1 Espaces fonctionnels	409
C.2 Distributions	412
C.3 Espaces de Sobolev	414
Bibliographie	424

Index	425
--------------	------------

La Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), fondée en 1983, s'est fixé comme objectif la promotion des mathématiques appliquées. Dans cet esprit, la SMAI a créé une collection d'ouvrages Mathématiques & Applications, dont voici un nouveau numéro.

Le but de cette collection est d'éditer des textes de niveau 3ème cycle universitaire ou de dernière année d'école d'ingénieurs. Les lecteurs concernés sont donc des étudiants, mais également des chercheurs et ingénieurs qui veulent s'initier aux méthodes et aux résultats des mathématiques appliquées. Certains ouvrages auront ainsi une vocation purement pédagogique alors que d'autres pourront constituer des textes de référence.

La principale source des manuscrits réside dans les très nombreux cours qui sont enseignés en France, compte tenu de la variété des Diplômes d'Etudes Approfondies (D.E.A.), des Diplômes d'Etudes Supérieures Spécialisées (D.E.S.S.) ou des options de mathématiques appliquées dans les écoles d'ingénieurs. Mais ce n'est pas l'unique source: certains textes pourront avoir une autre origine.

Parmi les sujets que la collection souhaite aborder, figurent les suivants:

Analyse numérique – Analyse stochastique – Probabilités appliquées – Equations aux dérivées partielles – Automatique – Optimisation – Recherche opérationnelle – Statistique et analyse des données – Modélisation (en mécanique, en économie...) – Infographie et Traitement d'images – Codage et cryptographie – Calcul formel – Calcul parallèle...

Alexandre Ern Jean-Luc Guermond

Eléments finis: théorie, applications, mise en œuvre

Ces notes de cours (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, DEA de Mécanique de Paris VI) présentent la méthode des éléments finis dans un cadre mathématique rigoureux. En accordant une place fondamentale aux conditions inf-sup, elles s'affranchissent du cadre réducteur Lax-Milgram/Galerkin standard. Elles couvrent un spectre d'applications relativement large et apportent de nombreuses précisions sur la mise en œuvre numérique. Trois plans de lecture sont proposés: le premier conçu pour un lecteur intéressé par les aspects mathématiques, le deuxième s'adressant aux ingénieurs et le troisième limité aux aspects élémentaires. Les prérequis mathématiques, de niveau 2ème cycle universitaire, sont rappelés dans deux annexes.



ISBN 3-540-42615-9

ISBN 3-540-42615-9



<http://www.springer.de>