

MODÉLISATION
ET RÉOLUTION
D'ÉQUATIONS DE
LA MÉCANIQUE
DES MILIEUX
CONTINUS

MARC POGU

GEORGES TOURNEMINE

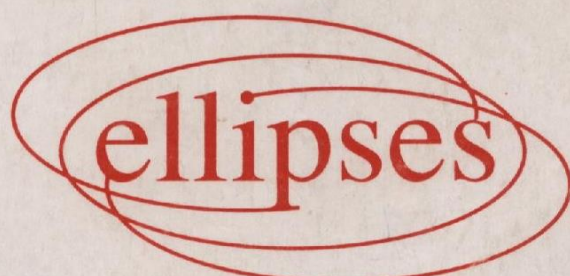


TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

MODELISATION ET LOIS DE CONSERVATION EN MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

1. MODELISATION : THEORIE CLASSIQUE ET THEORIE DU PREMIER GRADIENT EN MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS	17
1.1. Mouvement virtuel	18
1.1.1. Mouvement virtuel rigidifiant	19
1.2. Théorème des puissances virtuelles	20
1.3. Théorie classique des milieux continus	21
1.4. Théorie du premier gradient	25
2. EQUATION DE BILAN OU LOI DE CONSERVATION	29
2.1. Mouvement et vitesse	29
2.2. Dérivée en variables eulériennes	31
2.2.1. Dérivée particulaire	31
2.2.2. Dérivée suivant un champ de vitesse quelconque	32
2.2.3. Le théorème du transport dans le cas où existe des surfaces de discontinuité	33
2.3. Loi de conservation ou équation de bilan	35
2.3.1. Forme locale de la loi de conservation	36
2.3.2. Equation de saut associée à une loi de conservation	36
2.4. Equations de conservation fondamentales de la mécanique des milieux continus classiques	38
2.4.1. Conservation de la masse	38
2.4.2. Conservation des quantités de mouvement	39
2.4.3. Conservation de l'énergie	44
2.5. Deuxième principe de la thermodynamique (ou inégalité fondamentale)	48
2.5.1. Dissipations	50
3. RESUME DES FORMULES IMPORTANTES	51

CHAPITRE II

PROBLEMES DE BASE POUR LE LAPLACIEN ET DES SYSTEMES LINEAIRES ELLIPTIQUES D'ORDRE UN

1. ORIGINE ET PRESENTATION DES PROBLEMES	54
2. PROBLEMES AUX LIMITES POUR LE LAPLACIEN	56
2.1. Condition de Dirichlet et domaine borné	57
2.1.1. Problème variationnel associé	57
2.1.2. Résolution du problème de Dirichlet	57
2.1.2.1. Notions préliminaires	57
2.1.2.2. Espaces fonctionnels	58
2.1.2.3. Existence et unicité de la solution	61
2.1.3. Régularité de la solution	62
2.1.3.1. Espaces fonctionnels	62
2.1.3.2. Résultats de régularité	64
2.1.3.3. Expression du coefficient de la fonction singulière	66

2.2.	Condition de Dirichlet et domaine non borné	71
2.2.1.	Résolution du problème de Dirichlet	72
2.2.1.1.	Espaces fonctionnels	72
2.2.1.2.	Existence et unicité de la solution	73
2.2.2.	Représentation de la solution hors d'un disque	74
2.2.3.	Approche du problème par des problèmes analogues posés en domaine borné, utilisation de frontières artificielles	76
2.2.3.1.	Approche de l'espace associé à la condition de Dirichlet	76
2.2.3.2.	Résolution des problèmes en domaine borné	78
2.2.3.3.	Système satisfait par les coefficients de la représentation	80
2.2.4.	Estimations d'erreur	82
2.2.4.1.	Construction d'une approximation de la solution	82
2.2.4.2.	Construction de fonctions de troncature reliées aux comportements à l'infini	83
2.2.4.3.	Estimation en fonction du diamètre des ouverts bornés	84
2.3.	Condition de Neumann et domaine borné	86
2.3.1.	Problème variationnel associé	86
2.3.2.	Résolution du problème de Neumann	86
2.3.2.1.	Espace de Sobolev associé au laplacien et à la condition de Neumann	86
2.3.2.2.	Existence et unicité de la solution	87
2.3.3.	Régularité de la solution	89
2.3.3.1.	Résultats de régularité	89
2.3.3.2.	Expression du coefficient de la fonction singulière	90
2.3.4.	Représentation de vecteurs à rotationnel nul	91
2.3.4.1.	Données géométriques	92
2.3.4.2.	Vecteurs obtenus par rotation de $-\pi/2$	93
2.3.4.3.	Un lemme de Poincaré	93
2.3.4.4.	Un résultat de décomposition	95
2.3.4.5.	Relation entre condition de Neumann et condition de Dirichlet	98
2.4.	Condition de Neumann et domaine non borné	100
2.4.1.	Résolution du problème de Neumann	100
2.4.1.1.	Espace de Sobolev associé au laplacien et à la condition de Neumann	100
2.4.1.2.	Existence et unicité de la solution	101
2.4.2.	Représentation de vecteurs à rotationnel nul	102
2.4.2.1.	Un résultat de décomposition	102
2.4.2.2.	Relation entre condition de Neumann et condition de Dirichlet	104
3.	PROBLEMES AUX LIMITES POUR DES SYSTEMES ELLIPTIQUES DU PREMIER ORDRE	108
3.1.	Systèmes posés en domaine borné	108
3.1.1.	Problème variationnel associé	108
3.1.2.	Résolution du problème aux limites associé au système	109
3.1.2.1.	Espaces fonctionnels	109
3.1.2.2.	Existence et unicité de la solution	110
3.1.3.	Relation entre systèmes elliptiques et condition de Neumann pour le laplacien	112
3.1.4.	Régularité de la solution	113
3.1.4.1.	Résultats de régularité	114
3.1.4.2.	Expression du coefficient de la fonction singulière	114
3.2.	Systèmes posés en domaine non borné	115
3.2.1.	Résolution du système	115
3.2.1.1.	Espaces fonctionnels	115
3.2.1.2.	Existence et unicité de la solution	115

3.2.2.	Relation entre système elliptique et condition de Neumann pour le laplacien	116
3.2.3.	Approche par des problèmes posés en domaine borné.	117

CHAPITRE III ÉCOULEMENTS DE FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES 118

1.	LE MODELE DE FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE	119
1.1.	Milieux continus incompressibles	119
1.2.	Le modèle de fluide parfait, équations d'Euler	119
1.3.	Fluide parfait incompressible	121
1.3.1.	Interprétation de la pression	121
1.3.2.	Equations des fluides parfaits incompressibles	122
1.3.2.1.	Equations indéfinies des fluides parfaits incompressibles	123
1.3.3.	Problèmes aux limites pour les écoulements stationnaires, bidimensionnels autour d'un profil	124
1.3.3.1.	Formulation en vitesse	125
1.3.3.2.	Formulation en potentiel des vitesses	126
1.3.3.3.	Formulation en fonction de courant	127
2.	ÉCOULEMENTS AUTOUR D'UN PROFIL PLACE EN ATMOSPHERE INFINIE	127
2.1.	Présentation	127
2.1.1.	Données géométriques	127
2.1.2.	Les équations	128
2.1.3.	Le problème à résoudre	129
2.2.	Passage à des champs sans circulation et qui tendent vers zéro à l'infini	129
3.	ÉCOULEMENTS A CIRCULATION DONNEE	131
3.1.	Existence et unicité	131
3.2.	Approche du champ des vitesses	131
3.3.	Formulation en fonction de courant ou en fonction potentielle	132
3.3.1.	Fonction de courant	132
3.3.2.	Potentiel des vitesses	133
4.	MISE EN EVIDENCE DE LA SINGULARITE AU BORD DE FUITE	134
4.1.	Transformation canonique du cercle sur le profil	134
4.2.	Représentation du champ des vitesses de l'écoulement à circulation unité et à vitesse nulle à l'infini	134
4.3.	Singularité au voisinage du bord de fuite	136
5.	IDENTIFICATION DE LA CIRCULATION POUR SATISFAIRE LA CONDITION DE KUTTA-JOUKOWSKI	136
5.1.	Décomposition par linéarité	136
5.2.	Identification de la circulation	137
5.3.	Approche du champ des vitesses	140
5.4.	Algorithme de calcul du champ des vitesses	142
6.	REPRESENTATION DES EFFORTS EXERCES PAR LE FLUIDE SUR LE BORD DU PROFIL	143
6.1.	Torseur des efforts exercés par un milieu continu (généralisation du théorème d'Euler)	143
6.2.	Application aux écoulements incompressibles	143

6.3.	Relation entre la résultante des efforts et la circulation	146
6.4.	Relation entre le moment des efforts et un coefficient du développement à l'infini	146
CHAPITRE IV		
ÉCOULEMENTS SUBSONIQUES		148
1. ÉCOULEMENTS BAROTROPES DE FLUIDES PARFAITS		148
1.1.	Evolutions barotropes et loi d'état	148
1.2.	Intégrale première de de Saint-Venant ; relations isentropiques	150
1.3.	Problèmes aux limites pour les écoulements stationnaires bidimensionnels de gaz parfaits barotropes	151
2. ÉCOULEMENTS SUBSONIQUES AUTOUR D'UN PROFIL PLACÉ EN ATMOSPHERE INFINIE		153
2.1.	Présentation	153
2.1.1.	Les équations	153
2.1.2.	Le problème à résoudre	153
3. ÉCOULEMENTS À CIRCULATION DONNÉE		155
3.1.	Description de la méthode de résolution	155
3.1.1.	Relèvements	155
3.1.2.	Problème variationnel associé	155
3.2.	Prolongement du terme non linéaire	156
3.3.	Transformation des équations	158
3.3.1.	Passage à des champs sans circulation et qui tendent vers zéro à l'infini	158
3.3.2.	Transformation de l'équation non linéaire	160
3.4.	Estimation du terme non linéaire	161
3.5.	Résolution du problème variationnel associé	164
3.5.1.	Introduction d'une projection	164
3.5.2.	Une méthode de point fixe	164
3.6.	Existence et unicité du champ des vitesses : cas des profils réguliers	165
3.7.	Approche du champ des vitesses	167
4. IDENTIFICATION DE LA CIRCULATION POUR SATISFAIRE LA CONDITION DE KUTTA-JOUKOWSKI		167
4.1.	Description de la méthode de résolution	168
4.2.	Résolution du problème linéaire associé	169
4.2.1.	Existence et unicité de la solution	169
4.2.2.	Régularité de la solution	170
4.2.3.	Ajustement de la circulation	171
4.2.4.	Estimation a priori	173
4.3.	Résolution du problème non linéaire	174
4.4.	Algorithme de calcul du champ des vitesses	178
5. REPRÉSENTATION DES EFFORTS EXERCÉS PAR LE FLUIDE SUR LE BORD DU PROFIL		179
CHAPITRE V		
NOTIONS SUR LES ÉCOULEMENTS TRANSSONIQUES		181

1. PRESENTATION	183
1.1. Données géométriques	183
1.2. Les équations	184
1.3. Le problème à résoudre	185
1.4. Difficulté essentielle	185
2. METHODE FONCTIONNELLE DE RESOLUTION APPROCHEE (I)	185
2.1. Prolongement du terme non linéaire	185
2.2. Transformation des équations	187
2.3. Problème variationnel associé	187
2.4. Un algorithme de résolution	189
2.5. Le cas de la dimension finie	194
3. METHODE FONCTIONNELLE DE RESOLUTION APPROCHEE (II)	195
3.1. Description générale	195
3.2. Un exemple de sous-ensemble compact	197
4. METHODE FONCTIONNELLE DE RESOLUTION APPROCHEE (III) : MODELE DES PETITES PERTURBATIONS TRANSSONIQUES	198
4.1. Présentation	198
4.2. Modèle des petites perturbations transsoniques (M.P.P.T.) étudié	199
4.3. Cadre fonctionnel et procédé de résolution	202
4.3.1. Formulation variationnelle associée	202
4.3.2. Un procédé de prolongement	203
4.3.3. Un algorithme de résolution	205
CHAPITRE VI	
RESULTATS DE BASE POUR LE BILAPLACIEN ET DES SYSTEMES LINEAIRES ELLIPTIQUES D'ORDRE DEUX	208
1. PRESENTATION	208
2. PROBLEMES AUX LIMITES POUR LE BILAPLACIEN	208
2.1. Problèmes posés en domaine borné	209
2.1.1. Problème variationnel associé	209
2.1.2. Résolution du problème	209
2.1.2.1. Espaces fonctionnels	209
2.1.2.2. Existence et unicité de la solution	210
2.1.3. Régularité de la solution	211
2.2. Problèmes posés en domaine non borné	213
2.2.1. Résolution du problème	214
2.2.1.1. Espaces fonctionnels	214
2.2.1.2. Existence et unicité de la solution	215
2.2.2. Représentation de la solution hors d'un disque	215
2.2.3. Approche du problème par des problèmes analogues posés en domaine borné, utilisation de frontières artificielles	216
2.2.3.1. Approche des espaces fonctionnels	216
2.2.3.2. Résolution du problème en domaine borné	217
2.2.3.3. Système satisfait par les coefficients de la représentation	219
2.2.4. Estimation d'erreur	220
3. PROBLEMES AUX LIMITES POUR DES SYSTEMES ELLIPTIQUES DU DEUXIEME ORDRE	221

3.1.	Systèmes posés en domaine borné	221
3.1.1.	Problème variationnel associé	221
3.1.2.	Résolution du problème	222
3.1.2.1.	Espaces fonctionnels	222
3.1.2.2.	Existence et unicité de la solution	222
3.1.3.	Représentation de vecteurs à divergence nulle	223
3.1.4.	Régularité de la solution	226
3.2.	Systèmes posés en domaine non borné	228
3.2.1.	Résolution du système	228
3.2.1.1.	Espaces fonctionnels	228
3.2.1.2.	Existence et unicité de la solution	229
3.2.2.	Relation entre système elliptique et bilaplacien	229
3.2.3.	Approche par des problèmes posés en domaine borné	230
CHAPITRE VII		
ÉCOULEMENTS DE FLUIDES VISQUEUX		231
1. FLUIDES VISQUEUX NEWTONIENS		231
1.1.	Fluides newtoniens incompressibles.	
	Equations de Navier-Stokes	233
1.1.1.	Equations indéfinies des fluides visqueux incompressibles	234
1.1.2.	Problème aux limites pour les écoulements stationnaires de fluides visqueux incompressibles	234
2. LE MODELE DE STOKES		235
2.1.	Écoulements à résultante des efforts donnée	235
2.1.1.	Passage à des champs à résultante nulle dont le gradient tend vers zéro à l'infini	237
2.1.2.	Existence et unicité	240
2.1.3.	Approche du champ des vitesses	240
2.1.4.	Formulation en fonction de courant	241
2.2.	Identification de paramètres pour satisfaire la condition de Kutta-Joukowski généralisée (K.J.G.)	241
2.2.1.	Propriétés assurant la K.J.G.	242
2.2.2.	Décomposition par linéarité	243
2.2.3.	Identification des paramètres	243
2.2.4.	Algorithme de calcul du champ des vitesses	245
3. LE MODELE D'OSEEN		245
4. ÉCOULEMENTS A FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS EN THEORIE DES DEVELOPPEMENTS RACCORDES		246
5. EQUATIONS DE NAVIER-STOKES, IDENTIFICATION DE PARAMETRES POUR SATISFAIRE LA CONDITION DE KUTTA-JOUKOWSKI GENERALISEE (K.J.G.)		251
5.1.	Présentation du problème	251
5.2.	Description de la méthode de résolution	252
5.3.	Résolution du problème linéaire associé aux équations de Navier-Stokes	253
5.4.	Résolution des équations de Navier-Stokes	254
5.4.1.	Identification de paramètres	254
5.4.2.	Estimation a priori	255
5.4.3.	Une méthode de point fixe	256

5.5.	Algorithme de calcul du champ des vitesses	258
6.	REPRESENTATION DE LA RESULTANTE DES EFFORTS EXERCES PAR LE FLUIDE SUR LE BORD DU PROFIL	260
6.1.	Transformation du vecteur contrainte	260
6.2.	Transformation de la résultante des efforts du fluide sur le profil	261

CHAPITRE VIII PROBLEMES D'ELASTICITE **263**

1.	RAPPELS D'ELASTICITE	263
1.1.	Déplacement et tenseur des déformations linéarisé	264
1.1.1.	Vecteur déplacement	264
1.1.2.	Hypothèses des petites perturbations (H.P.P.) et équations des milieux continus en H.P.P.	264
1.1.2.1.	Equations de la mécanique des milieux continus en H.P.P	265
1.2.	Lois de comportement d'un matériau élastique, incompressible, isotherme	266
1.2.1.	Loi de comportement de l'élasticité classique	268
1.2.2.	Une loi de comportement en élasticité non linéaire pour les matériaux incompressibles	269
1.3.	Problème aux limites en élastostatique classique dans des domaines non bornés	270
1.4.	Problème aux limites en élastostatique non linéaire	272
2.	RESOLUTION DE PROBLEMES EXTERIEURS EN ELASTICITE PLANE NON LINEAIRE	273
2.1.	Relèvement des conditions à l'infini	273
2.2.	Problème variationnel associé	274
2.3.	Estimation du terme non linéaire	275
2.4.	Résolution du problème variationnel associé	276
2.4.1.	Choix d'un espace	276
2.4.2.	Une méthode de point fixe	278
2.5.	Approche par des problèmes posés en domaine borné	280
2.5.1.	Utilisation d'une frontière artificielle	280
2.5.2.	Algorithme de calcul du champ des déplacements	280

CHAPITRE IX SIMULATION D'ECOULEMENTS EN ATMOSPHERE ILLIMITEE A L'AIDE DE PAROIS PERMEABLES **282**

1.	PRESENTATION	282
2.	LE MODELE	283
2.1.	Loi de fonctionnement d'une paroi perméable	283
2.2.	Modèle mécanique et problème aux limites	284
3.	RESOLUTION DU PROBLEME AUX LIMITES ASSOCIE AU MODELE	286
3.1.	Relèvement des conditions à l'infini	286
3.2.	Formulation variationnelle associée	287
3.3.	Un résultat d'existence et d'unicité	289

4. UTILISATION DE FRONTIERES ARTIFICIELLES	290
4.1. Résolution du problème posé en domaine borné	291
4.2. Convergence	292

CHAPITRE X

EXTENSIONS A DES PHENOMENES TRIDIMENSIONNELS INSTATIONNAIRES OU NON

295

1. EXEMPLES DE PROBLEMES EXTERIEURS STATIONNAIRES TRIDIMENSIONNELS	295
1.1. Elastostatique non linéaire	295
1.2. Ecoulements subsoniques de fluides parfaits	297
1.2.1. Utilisation de frontières artificielles	298
1.2.2. Identification de la circulation	298
2. ECOULEMENTS DE FLUIDES VISQUEUX	298
2.1. Modèle de Stoke tridimensionnel	298
2.1.1. Ecoulements stationnaires	298
2.1.1.1. Cas de domaines non bornés	299
2.1.1.2. Approche par frontières artificielles	299
2.1.2. Ecoulements instationnaires en domaine borné	299
2.2. Modèles de Navier-Stokes tridimensionnels incompressibles ou compressibles	299
2.2.1. Ecoulements incompressibles en domaine borné	299
2.2.1.1. Ecoulements stationnaires	299
2.2.1.2. Ecoulements instationnaires	300
2.2.2. Ecoulements compressibles, instationnaires	300
3. ECOULEMENTS TRIDIMENSIONNELS TRANSSONIQUES STATIONNAIRES	301
4. UN SYSTEME DE LOIS DE CONSERVATION : CELUI DE LA DYNAMIQUE DES GAZ EN ECOULEMENTS INSTATIONNAIRES	301
4.1. Une méthode de résolution par identification d'un paramètre frontière	303
4.1.1. Etude d'un problème modèle	304
4.1.2. Retour sur l'approche fonctionnelle du problème posé par la dynamique des gaz	307
4.1.2.1. Formulation variationnelle	307
4.1.2.2. Introduction de sous-espaces fermés	309
4.1.2.3. Minimisation des projections	309



9 782729 892005

ISBN 2-7298-9200-1