



Recherche heuristiquement ordonnée

dans les graphes d'états

H. FARRENY



MASSON

TABLE DES MATIÈRES

Contents	XIII
Table des algorithmes, figures et tableaux	XV
Avant-propos	1
Chapitre 1 — Vue générale informelle	5
1.1 Recherche dans des graphes d'états	5
1.1.1 Notion de graphe d'états	5
1.1.2 Expansion progressive d'un graphe d'états	8
1.2 Conventions d'écriture des algorithmes	9
1.3 Recherche Non Ordonnée : algorithme de base	10
1.4 Fonctions d'évaluation, fonctions heuristiques	11
1.5 Recherche Heuristiquement Ordonnée	14
1.5.1 Algorithme de base	15
1.5.2 Valuations d'arcs et de chemins. Solutions optimales	19
1.5.3 Algorithmes A : premier aperçu	19
1.5.4 Algorithmes A à fonction h monotone	25
1.5.5 Algorithme du Coût Uniforme	27
1.5.6 Algorithme En Largeur D'Abord	30
1.5.7 Algorithme A* : premier aperçu	32
1.6 Indications bibliographiques quant aux applications	35
1.7 Présentation détaillée d'un exemple	36
1.7.1 Le problème du voyageur de commerce	36
1.7.2 Passage à un problème de recherche dans un graphe d'états	37
1.7.3 Exemples d'heuristiques minorantes	38
1.7.4 Exemples d'heuristiques non minorantes	39
Chapitre 2 — Graphes d'états — Propriétés de base	43
2.1 Longueurs	44
2.1.1 Chemins et circuits	44
2.1.2 Monoïdes	44
2.1.3 Le monoïde des suites d'arcs	45
2.1.4 Infra croissance stricte	46
2.1.5 Les monoïdes de valeurs d'arcs	47
2.1.6 Les monoïdes de suites d'arcs valués	49
2.1.7 Longueurs de suites d'arcs valués	49
2.1.8 Circuits absorbants	52
2.1.9 Chemins minimaux	52
2.1.10 Théorèmes d'optimalité	55
2.2 Graphes d'états	56
2.2.1 États, espace d'états, opérateurs	56
2.2.2 Graphes d'états	57
2.2.3 Source	57
2.2.4 Espace des buts	57
2.2.5 Circuits s -absorbants	58
2.3 Fils-finitude et but-accessibilité	58
2.4 $\mathcal{L}$ -incompressibilité	59
2.4.1 Définition	59

2.4.2	<i>Lemmes</i>	59
2.4.3	<i>Théorèmes des chemins de longueur majorée</i>	61
2.4.4	<i>Théorème des chemins minimaux atteignables</i>	62
2.4.5	<i>Théorème de minoration de $\mathcal{L}^*(s,n)$</i>	63
2.4.6	<i>Graphes d'états $\mathcal{L}$-standards</i>	63
2.4.7	<i>Théorème des chemins minimaux vers les buts</i>	63
2.4.8	<i>Corollaire des intervalles entre étapes et buts</i>	64
2.4.9	<i>Corollaire des intervalles entre étapes</i>	64
2.5	<i>Fonctions g^*, h^*, f^*</i>	64
2.5.1	<i>g^* : meilleure distance depuis la source</i>	64
2.5.2	<i>h^* : meilleure distance jusqu'aux buts</i>	65
2.5.3	<i>f^* : meilleure distance via l'étape</i>	66
Chapitre 3	Algorithmes ϱ — Principe et axes de variation	69
3.1	<i>Algorithmes ϱ</i>	70
3.1.1	<i>Introduction</i>	70
3.1.2	<i>Code d'algorithme ϱ général</i>	71
3.1.3	<i>Extractions — Apparitions — Mises à jour</i>	72
3.1.4	<i>Développements complets et fils-finitude</i>	72
3.1.5	<i>Notations d'étude</i>	72
3.1.6	<i>Axes de variation des algorithmes ϱ</i>	74
3.2	<i>Variations par les fonctions d'évaluation</i>	75
3.3	<i>Variations par l'extraction</i>	75
3.3.1	<i>Extraction simple</i>	75
3.3.2	<i>ε-extraction</i>	76
3.3.3	<i>e-extraction</i>	76
3.3.4	<i>Fonctions surpassées, fonctions surpassantes</i>	77
3.3.5	<i>$\mathcal{E}$-extraction</i>	78
3.4	<i>Variations par les mises à jour : types d'algorithmes ϱ</i>	79
3.4.1	<i>Algorithmes ϱ de type 1</i>	80
3.4.2	<i>Le terme standard g_x</i>	81
3.4.3	<i>Algorithmes ϱ de type 2</i>	83
3.4.4	<i>Algorithmes ϱ de type 3</i>	84
3.4.5	<i>Tableau récapitulatif</i>	86
3.5	<i>Propriétés du terme standard g_x</i>	86
3.6	<i>Du Graphe de Recherche au chemin-des-pointeurs</i>	91
3.7	<i>Algorithmes en largeur ou profondeur</i>	95
3.7.1	<i>Profondeur courante</i>	95
3.7.2	<i>Les algorithmes en largeur vus comme des ϱ</i>	96
3.7.3	<i>Les algorithmes en profondeur vus comme des ϱ</i>	96
3.8	<i>Notes historiques et bibliographiques</i>	97
3.8.1	<i>Sur l'emploi de fonctions d'évaluation</i>	97
3.8.2	<i>Sur la position des algorithmes ϱ</i>	97
3.8.3	<i>Sur les rapports avec le « Branch and Bound »</i>	98
3.8.4	<i>A propos des modes d'extraction</i>	99
3.8.5	<i>A propos des types de mises à jour</i>	99
Chapitre 4	Familles d'Algorithmes	
	de Recherche Heuristiquement Ordonnée	101
4.1	<i>Algorithmes $\tilde{A}$: principes</i>	102

4.1.1	Algorithmes $\tilde{A}$: définition	102
4.1.2	Le terme heuristique $h_i(n)$	103
4.1.3	Algorithmes ϱ versus algorithmes $\tilde{A}$	103
4.1.4	Code pour algorithmes $\tilde{A}$ de type 2	104
4.1.5	Code pour algorithmes $\tilde{A}$ de type 3	107
4.1.6	Code pour algorithmes $\tilde{A}$ de type 1	107
4.1.7	Algorithmes $\tilde{A}_0, \tilde{A}_E, \tilde{A}_e, \tilde{A}_G$	108
4.2	Propriétés des termes heuristiques h_x	109
4.2.1	h_x semi-statique ou statique	109
4.2.2	h_x minorée ou majorée dans U , localement ou non	111
4.2.3	h_x minorante ou $*$ -localement majorée ou majorée	112
4.2.4	h_x coïncidante ou pré-coïncidante ou m_T -coïncidante	112
4.2.5	h_x pleinement monotone, h monotone	112
4.2.6	h_x pleinement consistante, h consistante	113
4.2.7	h_x finiment décroissante	114
4.2.8	h_x écartée	114
4.2.8	Rapports entre propriétés des termes heuristiques	115
4.3	Algorithmes A	116
4.3.1	Définition	116
4.3.2	Particularités des algorithmes A de types 1, 2 ou 3	116
4.3.3	Code pour algorithme A de type 1/2/3	118
4.4	Algorithmes $\tilde{A}^*, A^*$	119
4.5	Algorithmes $\tilde{A}^H, A^H$	120
4.6	Algorithmes $\tilde{A}^G, A^G$	120
4.7	Algorithmes $\tilde{A}^F, A^F$	120
4.8	Récapitulatif : familles $\tilde{A}$ de base	122
4.9	Position d'autres algorithmes : $\tilde{A}^P, \tilde{A}^\omega, \tilde{A}^M$	122
4.9.1	Algorithmes $\tilde{A}^P, A^P$	122
4.9.2	Algorithmes $\tilde{A}^\omega, A^\omega$	124
4.9.3	Algorithmes $\tilde{A}^M$	126
4.10	Algorithmes ϱ : autres cas	131
4.10.1	Propriétés des fonctions d'évaluation f_x	132
4.10.2	Algorithmes ϱ et modes d'extraction	132
4.10.3	Algorithmes ϱ^F	133
4.10.4	Rapports entre propriétés de f_x et de h_x	133
4.11	Notes historiques et bibliographiques	138
4.11.1	Les appellations A et A^*	138
4.11.2	L'idée de terme heuristique non minorant	138
4.11.3	L'idée de terme heuristique non statique	139
4.11.4	Autres propriétés des termes heuristiques	140
4.11.5	Cas où la fonction d'évaluation n'est pas additive	141
Chapitre 5 — Arrêt avec découverte d'un chemin vers un but		143
5.1	Arrêt sans but dans les graphes finis	143
5.1.1	Définition : applications aplaties	144
5.1.2	Théorème d'arrêt pour les graphes finis	145
5.2	Seule issue : trouver un but	145
5.2.1	Lemme du front garni	145
5.2.2	Lemme des entrées	146
5.2.3	Lemme de la seule issue	146

5.3	Condition nécessaire et suffisante d'arrêt avec extraction de but	147
5.3.1	Définition : applications plafonnées	147
5.3.2	Définition : applications circonscrites	147
5.3.3	Théorème général d'arrêt sur but pour ρ de types 1, 2 ou 3	147
5.4	Propriétés des applications aplaties	148
5.4.1	Aplatissement pour algorithme ρ avec f_x finiment décroissante	148
5.4.2	Aplatissement pour algorithme $\tilde{A}$ avec h_x finiment décroissante	149
5.5	Propriétés des applications plafonnées	149
5.5.1	Définition : applications chemin-majorées	150
5.5.2	Théorèmes de chemin-majoration	151
5.5.3	Théorème de plafonnement pour algorithmes $\rho_{\mathcal{E}}$	153
5.5.4	Corollaire de plafonnement pour algorithmes $\tilde{A}_{\mathcal{E}}$	153
5.6	Propriétés des applications circonscrites	154
5.6.1	Théorème de circonscription pour algorithmes ρ	156
5.6.2	Théorème de circonscription pour algorithmes $\tilde{A}$	157
5.7	Arrêt avec chemin vers but pour algorithmes ρ	157
5.7.1	Théorèmes d'arrêt sur but pour algorithmes $\rho_{\mathcal{E}}^F$	157
5.7.2	Contre-exemples : non arrêt pour $\rho_{\mathcal{E}}^F$	158
5.7.3	Arrêt avec découverte de chemin vers un but	159
5.8	Arrêt avec chemin vers but pour algorithmes $\tilde{A}$	160
5.8.1	Théorèmes d'arrêt sur but pour algorithmes $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^F$ et $\tilde{A}_{\mathcal{E}}$	160
5.8.2	Contre-exemples : non arrêt pour $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^F$	161
5.8.3	Arrêt avec découverte de chemin vers un but	162
5.9	Applicabilité — Conséquences	163
5.9.1	Discussion générale	163
5.9.2	Arrêt sur but pour le « taquin »	164
5.9.3	Arrêt sur but pour le « voyageur de commerce »	165
5.9.4	Arrêt sur but pour algorithmes $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^P$	165
5.9.5	Arrêt sur but pour algorithmes $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^G$	166
5.9.6	Arrêt sur but pour algorithmes $\tilde{A}_0^M$	167
5.10	Notes historiques et bibliographiques	179
5.10.1	Arrêt d'algorithmes A_0^*	179
5.10.2	Arrêt d'algorithmes $A_{\mathcal{E}}$	180
5.10.3	Arrêt d'algorithmes A_0^H	181
5.10.4	Arrêt d'algorithmes $A_{\mathcal{E}}^G$	181
5.10.5	Arrêt d'algorithmes $\tilde{A}_0^P$	181
5.10.6	Arrêt d'algorithmes A_0^O	182
5.10.7	Arrêt d'algorithmes $\tilde{A}_0^M$	182
5.10.8	Arrêt d'algorithmes ρ_0	182
Chapitre 6	Longueur du chemin découvert	183
6.1	Admissibilité, sous-admissibilité	183
6.1.1	Définition : admissibilité	183
6.1.2	Notion de sous-admissibilité	183
6.2	Garanties relatives aux entrées	184
6.2.1	Théorème des entrées, pour ρ de type 3	184
6.2.2	Corollaire des entrées, pour $\tilde{A}^F$ de type 3	185
6.2.3	Théorème d'extraction, pour $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^F$ de type 3	186
6.3	Longueur du chemin découvert par $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^F$ de type 3	186
6.3.1	Lemme du chemin découvert, pour $\tilde{A}$ types 1, 2 ou 3	186

6.3.2	Théorèmes pour $\tilde{A}_G^F$ de type 3	187
6.4	Conséquences et applications pour $\tilde{A}_G^F$ de type 3	188
6.4.1	Applicabilité des résultats précédents	188
6.4.2	Application aux $\tilde{A}_G^*$, $\tilde{A}_G^H$, $\tilde{A}_G^G$, $\tilde{A}_G^L$ de type 3 avec h_x pré-coïncidant	189
6.4.3	Application au « taquin »	193
6.4.4	Application au « voyageur de commerce »	194
6.4.5	Application aux $\tilde{A}_G^P$ de type 3	195
6.4.6	Application aux $\tilde{A}_G^O$ de type 3	196
6.4.7	Application aux $\tilde{A}_G^M$ de type 1, 2 ou 3	198
6.5	Longueur du chemin découvert par ϱ de type 3	200
6.5.1	Plafond d'arrêt F^i , pour ϱ_G^F de tous types	200
6.5.2	Théorèmes d'extraction, pour ϱ_G^F de tous types	201
6.5.3	Lemme du chemin découvert pour ϱ de type 1, 2 ou 3	202
6.5.4	Théorèmes pour ϱ de type 1, 2 ou 3	202
6.5.5	Plafond d'arrêt F^i	203
6.5.6	Théorèmes pour ϱ de type 1, 2 ou 3	204
6.5.7	Théorèmes pour $\tilde{A}$ de type 1, 2 ou 3	206
6.6	Notes historiques et bibliographiques	207
6.6.1	Admissibilité d'algorithmes A_0^*	208
6.6.2	Sous-admissibilité d'algorithmes A_G^*	209
6.6.3	Sous-admissibilité d'algorithmes A_0^H	209
6.6.4	Sous-admissibilité d'algorithmes A_G^G	209
6.6.5	Sous-admissibilité d'algorithmes $\tilde{A}_0^P$	210
6.6.6	Sous-admissibilité d'algorithmes A_0^O	210
6.6.7	Sous-admissibilité d'algorithmes $\tilde{A}_0^M$	210
6.6.8	Majorants a priori pour algorithmes ϱ_0	210
Chapitre 7 — Expansion du graphe d'états :		
	conditions, variantes, comparaisons	213
7.1	Conditions générales de développement d'état	213
7.1.1	Conditions nécessaires aux développements d'états	214
7.1.2	Conditions suffisantes de développement	216
7.2	Algorithmes $\tilde{A}^*$ mieux informés	217
7.2.1	Définitions	217
7.2.2	Théorème de comparaison des états développés	218
7.3	Algorithmes $\tilde{A}$ monotones	220
7.3.1	Théorème de mise en réserve définitive	220
7.3.2	Code pour algorithmes $\tilde{A}$ monotones de type 3	221
7.3.3	Théorème de fine comparaison stricte	221
7.3.4	Théorème des valeurs d'extraction	222
7.3.5	Conditions de développement pour $\tilde{A}$ monotones	223
7.3.6	Théorème de fine comparaison large	224
7.4	Algorithmes A_M^F	225
7.4.1	Spécificité des algorithmes A_M^F	225
7.4.2	Admissibilité, sous-admissibilité des A_M^F	227
7.4.3	Minoration des développements effectués par des A_M^*	228
7.4.4	Complexité en pire cas pour algorithmes A_M^*	234
7.5	Notes historiques et bibliographiques	236
7.5.1	Conditions de développement	236
7.5.2	Algorithmes mieux informés	237

7.5.3	Algorithmes monotones	238
7.5.4	Complexité algorithmique	238
Chapitre 8	Recherche heuristique bidirectionnelle	241
8.1	Recherche en arrière versus en avant	242
8.2	Recherche bidirectionnelle	242
8.3	Algorithmes B^Q	244
8.3.1	Code pour B^Q de type 1-1	245
8.3.2	Notations	247
8.3.3	Comment décider du sens de recherche ?	247
8.3.4	Comment décider de l'arrêt de la recherche ?	248
8.3.5	Modes d'extraction, algorithmes $B^Q \mathcal{E}$	250
8.3.6	Code pour B^Q de type 2-2	250
8.3.7	Code pour B^Q de type 3-3	251
8.4	Arrêt avec chemin vers but pour B^Q	252
8.4.1	Lemmes	253
8.4.2	Théorèmes d'arrêt avec chemin vers but pour $B^Q \mathcal{E}$	254
8.5	Algorithmes $B^{\tilde{A}}$	254
8.6	Arrêt avec chemin vers but pour $B^{\tilde{A}}$	258
8.7	Algorithmes B^Q et $B^{\tilde{A}}$	260
8.7.1	Spécificité du code des algorithmes B^Q et $B^{\tilde{A}}$	260
8.7.2	Lemmes	263
8.7.3	Théorèmes d'arrêt avec chemin vers but pour $B^Q \mathcal{E}$	264
8.7.4	Théorèmes d'arrêt avec chemin vers but pour $B^{\tilde{A}} \mathcal{E}$	265
8.8	Longueur du chemin découvert par $B^{\tilde{A}} \mathcal{E}$ et $B^Q \mathcal{E}$	267
8.8.1	Théorèmes pour $B^{\tilde{A}} \mathcal{E}$ type 3-3	267
8.8.2	Théorèmes pour $B^Q \mathcal{E}$ type 1-1, 2-2, 3-3, 1-2, 1-3, 2-3	271
8.9	De l'origine des termes heuristiques	273
8.10	Algorithmes $BFF^{\tilde{A}}$ et $BFF^{\tilde{A}}$	274
8.10.1	Spécificité des heuristiques des algorithmes $BFF^{\tilde{A}}$	274
8.10.2	Arrêt avec chemin vers but pour $BFF^{\tilde{A}}$ de type 3-3	274
8.10.3	Longueur du chemin découvert par des $BFF^{\tilde{A}} \mathcal{E}$	279
8.11	Notes historiques et bibliographiques	281
Bibliographie		283
Index général		289
Index des algorithmes		293