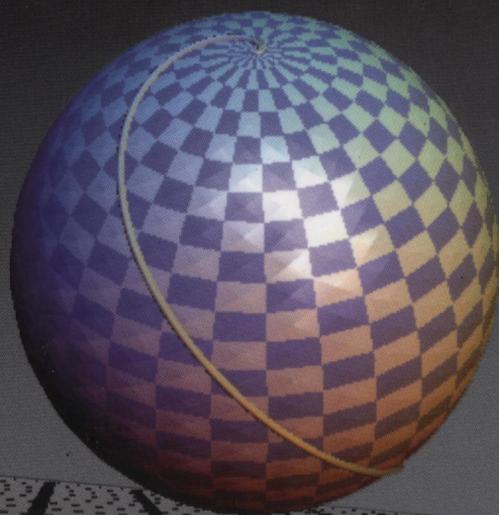


*Enseignement des mathématiques*

# Cours de géométrie

Marc Troyanov



Presses polytechniques et universitaires romandes

# Table des matières

Avant-propos	vii
Table des matières	xi
<b>Notions fondamentales</b>	<b>1</b>
<b>1 Du point aux vecteurs</b>	<b>3</b>
1.1 Distances, droites et rapports de sections . . . . .	4
1.2 Applications à la statique . . . . .	8
1.3 Le plan . . . . .	9
1.4 Droites parallèles . . . . .	11
1.5 Triangles et parallélogrammes . . . . .	13
1.6 Dédoublément d'un parallélogramme . . . . .	14
1.7 Le théorème de Thalès . . . . .	16
1.8 Prismes et parallélépipèdes . . . . .	19
1.9 La notion de vecteur fixe . . . . .	20
1.10 Orthogonalité . . . . .	24
1.11 Le rectangle . . . . .	27
1.12 Le plan euclidien $\mathbb{E}^2$ . . . . .	28
1.13 Exercices . . . . .	28
1.14 Annexe : axiomatisation de la géométrie . . . . .	31
<b>2 Bases de la géométrie vectorielle et géométrie affine</b>	<b>35</b>
2.1 Vecteurs fixes . . . . .	35
2.2 La notion de vecteur libre . . . . .	36
2.3 Repères affines . . . . .	41
2.4 La géométrie analytique . . . . .	45
2.5 Changements de repères et transformations de coordonnées . .	50
2.6 La géométrie vectorielle dans le plan euclidien $\mathbb{E}^2$ . . . . .	51
2.7 Orientation du plan et de l'espace . . . . .	52

2.8	Coordonnées homogènes . . . . .	54
2.9	Coordonnées barycentriques . . . . .	57
2.10	La géométrie des couleurs . . . . .	66
2.11	Exercices . . . . .	73
<b>Méthodes vectorielles en géométrie euclidienne</b>		<b>77</b>
<b>3</b>	<b>Produit scalaire</b>	<b>79</b>
3.1	Norme et orthogonalité des vecteurs . . . . .	79
3.2	Le produit scalaire . . . . .	85
3.3	Repères orthonormés . . . . .	88
3.4	Matrice de Gram . . . . .	90
3.5	Quelques applications du produit scalaire . . . . .	93
3.6	Aire d'une région plane . . . . .	96
3.7	Mesure des angles . . . . .	98
3.8	Sur les fonctions trigonométriques . . . . .	99
3.9	Applications à la géométrie du triangle . . . . .	103
3.10	Exercices . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Produits extérieur, vectoriel et mixte</b>	<b>117</b>
4.1	Le produit extérieur dans un plan orienté . . . . .	117
4.2	Géométrie des droites dans le plan orienté . . . . .	122
4.3	Faisceaux de droites dans un plan . . . . .	125
4.4	La trigonométrie dans un plan orienté . . . . .	127
4.5	Le produit vectoriel . . . . .	135
4.6	Volume orienté et produit mixte . . . . .	139
4.7	Géométrie des droites dans l'espace . . . . .	146
4.8	Projections . . . . .	155
4.9	Le tétraèdre . . . . .	160
4.10	La trigonométrie sphérique . . . . .	163
4.11	Exercices . . . . .	167

<b>5 Transformations affines et isométries</b>	<b>173</b>
5.1 Transformations affines . . . . .	173
5.2 Application linéaire associée à une application affine . . . . .	177
5.3 Premiers exemples . . . . .	180
5.4 Compositions et inversions . . . . .	186
5.5 Isométries . . . . .	187
5.6 Théorème de Chasles en dimension 2 . . . . .	188
5.7 Le Théorème d'Euler . . . . .	191
5.8 Théorème de Chasles dans l'espace . . . . .	194
5.9 Ecriture d'une transformation affine en coordonnées homogènes	198
5.10 Conjugaison . . . . .	199
5.11 Application aux bras manipulateurs de robots . . . . .	200
5.12 Distorsion des transformations affines . . . . .	202
5.13 Décomposition d'une transformation affine . . . . .	204
5.14 La notion de groupe . . . . .	206
5.15 Exercices . . . . .	208
 <b>Géométrie différentielle</b>	 <b>213</b>
<b>6 Géométrie des courbes</b>	<b>215</b>
6.1 Qu'est ce qu'une courbe? . . . . .	215
6.2 Notions fondamentales . . . . .	215
6.3 Champs de vecteurs le long d'une courbe . . . . .	221
6.4 Longueur et abscisse curviligne . . . . .	223
6.5 Changement de paramétrage d'une courbe . . . . .	226
6.6 Quantités géométriques et quantités cinématiques . . . . .	227
6.7 Courbure d'une courbe de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	231
6.8 Contact entre deux courbes . . . . .	234
6.9 Courbes dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	237
6.10 Courbes dans un plan orienté . . . . .	247
6.11 Courbes planes en coordonnées polaires . . . . .	253
6.12 Développante et développée . . . . .	257
6.13 Epicycloïdes . . . . .	259
6.14 Courbes planes définies implicitement . . . . .	262
6.15 Quelques applications de la substitution $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$ . . . . .	271

6.16	Dérivation implicite . . . . .	273
6.17	Enveloppe d'une famille de courbes planes . . . . .	277
6.18	Exercices . . . . .	279
<b>7</b>	<b>Surfaces</b> . . . . .	<b>287</b>
7.1	Qu'est-ce qu'une surface ? . . . . .	287
7.2	Surfaces définies implicitement . . . . .	288
7.3	Le plan tangent . . . . .	291
7.4	Surfaces paramétrées . . . . .	294
7.5	Le tenseur métrique . . . . .	297
7.6	Aire d'une surface paramétrée . . . . .	302
7.7	Longueur d'une courbe tracée sur une surface . . . . .	304
7.8	Loxodrome . . . . .	305
7.9	Géodésiques sur une surface . . . . .	307
7.10	Courbures normales d'une surface . . . . .	310
7.11	Courbure moyenne . . . . .	311
7.12	Courbures principales . . . . .	313
7.13	Surface uniformément extensible . . . . .	314
7.14	Dérivée du repère adapté . . . . .	318
7.15	La deuxième forme fondamentale . . . . .	319
7.16	L'application de Weingarten . . . . .	321
7.17	Accélération des courbes tracées sur une surface . . . . .	322
7.18	Courbure des courbes tracées sur une surface . . . . .	323
7.19	Courbure d'une surface . . . . .	326
7.20	La troisième forme fondamentale . . . . .	329
7.21	Retour aux exemples . . . . .	330
7.22	Surfaces parallèles . . . . .	333
7.23	Sur les symboles de Christoffel . . . . .	337
7.24	Sur la courbure de Gauß . . . . .	339
7.25	Les équations de Codazzi-Mainardi . . . . .	343
7.26	Surfaces isométriques et géométrie intrinsèque . . . . .	344
7.27	Exercices . . . . .	346
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>351</b>
	<b>Index</b> . . . . .	<b>355</b>

## Cours de géométrie

Ce cours d'introduction à la géométrie propose une vision et une pensée solides ainsi qu'une initiation aux applications de la géométrie ■ Rigoureuse dans son approche, la matière est exposée sous forme de principes premiers, dont tous les théorèmes sont démontrés. L'utilisation de l'algèbre linéaire en géométrie est par ailleurs justifiée mathématiquement et non uniquement de façon heuristique ■ L'exposé débute par une fondation axiomatique de l'espace euclidien, avant que ne soient prouvées les propriétés algébriques des vecteurs. Une présentation complète de la géométrie vectorielle ainsi qu'une introduction à la géométrie différentielle complètent l'ouvrage. Les notions étudiées sont illustrées d'exemples et d'applications concrètes, et chaque chapitre se clôt par de nombreux exercices ■ Ce manuel est principalement destiné aux étudiants de premier cycle en sciences et sciences de l'ingénieur, et constitue aussi une solide référence pour les physiciens et les mathématiciens.



**Marc Troyanov** effectue ses études à Genève où il obtient son doctorat en mathématiques en 1987. Il passe ensuite deux années de postdoc à Paris où il collabore avec l'Ecole polytechnique et l'Université d'Orsay, dont il obtient une habilitation. Il est ensuite visiting professor à Salt Lake City, puis professeur-assistant à l'Université du Québec à Montréal et il est nommé à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL) en 1993. Il enseigne la géométrie et l'analyse. Son domaine de recherche est la géométrie différentielle.

ISBN 978-2-88074-817-3



9 782880 748173