

*iiiiii*

**Recherche  
heuristiquement  
ordonnée  
dans les graphes d'états**

H. FARRENY



MASSON

# TABLE DES MATIÈRES

Contents .....	XIII
Table des algorithmes, figures et tableaux .....	XV
Avant-propos .....	1
<b>Chapitre 1 — Vue générale informelle</b> .....	<b>5</b>
1.1 Recherche dans des graphes d'états .....	5
1.1.1 Notion de graphe d'états .....	5
1.1.2 Expansion progressive d'un graphe d'états .....	8
1.2 Conventions d'écriture des algorithmes .....	9
1.3 Recherche Non Ordonnée : algorithme de base .....	10
1.4 Fonctions d'évaluation, fonctions heuristiques .....	11
1.5 Recherche Heuristiquement Ordonnée .....	14
1.5.1 Algorithme de base .....	15
1.5.2 Valuations d'arcs et de chemins. Solutions optimales .....	19
1.5.3 Algorithmes A : premier aperçu .....	19
1.5.4 Algorithmes A à fonction h monotone .....	25
1.5.5 Algorithme du Coût Uniforme .....	27
1.5.6 Algorithme En Largeur D'Abord .....	30
1.5.7 Algorithme A* : premier aperçu .....	32
1.6 Indications bibliographiques quant aux applications .....	35
1.7 Présentation détaillée d'un exemple .....	36
1.7.1 Le problème du voyageur de commerce .....	36
1.7.2 Passage à un problème de recherche dans un graphe d'états .....	37
1.7.3 Exemples d'heuristiques minorantes .....	38
1.7.4 Exemples d'heuristiques non minorantes .....	39
<b>Chapitre 2 — Graphes d'états — Propriétés de base</b> .....	<b>43</b>
2.1 Longueurs .....	44
2.1.1 Chemins et circuits .....	44
2.1.2 Monoïdes .....	44
2.1.3 Le monoïde des suites d'arcs .....	45
2.1.4 Infra croissance stricte .....	46
2.1.5 Les monoïdes de valeurs d'arcs .....	47
2.1.6 Les monoïdes de suites d'arcs valués .....	49
2.1.7 Longueurs de suites d'arcs valués .....	49
2.1.8 Circuits absorbants .....	52
2.1.9 Chemins minimaux .....	52
2.1.10 Théorèmes d'optimalité .....	55
2.2 Graphes d'états .....	56
2.2.1 États, espace d'états, opérateurs .....	56
2.2.2 Graphes d'états .....	57
2.2.3 Source .....	57
2.2.4 Espace des buts .....	57
2.2.5 Circuits s-absorbants .....	58
2.3 Fils-finitude et but-accessibilité .....	58
2.4 $\mathcal{L}$ -incompressibilité .....	59
2.4.1 Définition .....	59

2.4.2	<i>Lemmes</i> .....	59
2.4.3	<i>Théorèmes des chemins de longueur majorée</i> .....	61
2.4.4	<i>Théorème des chemins minimaux atteignables</i> .....	62
2.4.5	<i>Théorème de minoration de <math>\mathcal{L}^*(s,n)</math></i> .....	63
2.4.6	<i>Graphes d'états <math>\mathcal{L}</math>-standards</i> .....	63
2.4.7	<i>Théorème des chemins minimaux vers les buts</i> .....	63
2.4.8	<i>Corollaire des intervalles entre étapes et buts</i> .....	64
2.4.9	<i>Corollaire des intervalles entre étapes</i> .....	64
2.5	Fonctions $g^*$ , $h^*$ , $f^*$ .....	64
2.5.1	$g^*$ : meilleure distance depuis la source .....	64
2.5.2	$h^*$ : meilleure distance jusqu'aux buts .....	65
2.5.3	$f^*$ : meilleure distance via l'étape .....	66
<b>Chapitre 3 — Algorithmes <math>\rho</math> — Principe et axes de variation</b> .....		69
3.1	Algorithmes $\rho$ .....	70
3.1.1	<i>Introduction</i> .....	70
3.1.2	<i>Code d'algorithme <math>\rho</math> général</i> .....	71
3.1.3	<i>Extractions — Apparitions — Mises à jour</i> .....	72
3.1.4	<i>Développements complets et fils-finitude</i> .....	72
3.1.5	<i>Notations d'étude</i> .....	72
3.1.6	<i>Axes de variation des algorithmes <math>\rho</math></i> .....	74
3.2	Variations par les fonctions d'évaluation .....	75
3.3	Variations par l'extraction .....	75
3.3.1	<i>Extraction simple</i> .....	75
3.3.2	<i><math>\varepsilon</math>-extraction</i> .....	76
3.3.3	<i>e-extraction</i> .....	76
3.3.4	<i>Fonctions surpassées, fonctions surpassantes</i> .....	77
3.3.5	<i><math>\mathcal{E}</math>-extraction</i> .....	78
3.4	Variations par les mises à jour : types d'algorithmes $\rho$ .....	79
3.4.1	<i>Algorithmes <math>\rho</math> de type 1</i> .....	80
3.4.2	<i>Le terme standard <math>g_x</math></i> .....	81
3.4.3	<i>Algorithmes <math>\rho</math> de type 2</i> .....	83
3.4.4	<i>Algorithmes <math>\rho</math> de type 3</i> .....	84
3.4.5	<i>Tableau récapitulatif</i> .....	86
3.5	Propriétés du terme standard $g_x$ .....	86
3.6	Du Graphe de Recherche au chemin-des-pointeurs .....	91
3.7	Algorithmes en largeur ou profondeur .....	95
3.7.1	<i>Profondeur courante</i> .....	95
3.7.2	<i>Les algorithmes en largeur vus comme des <math>\rho</math></i> .....	96
3.7.3	<i>Les algorithmes en profondeur vus comme des <math>\rho</math></i> .....	96
3.8	Notes historiques et bibliographiques .....	97
3.8.1	<i>Sur l'emploi de fonctions d'évaluation</i> .....	97
3.8.2	<i>Sur la position des algorithmes <math>\rho</math></i> .....	97
3.8.3	<i>Sur les rapports avec le « Branch and Bound »</i> .....	98
3.8.4	<i>A propos des modes d'extraction</i> .....	99
3.8.5	<i>A propos des types de mises à jour</i> .....	99
<b>Chapitre 4 — Familles d'Algorithmes de Recherche Heuristiquement Ordonnée</b> .....		101
4.1	Algorithmes $\tilde{A}$ : principes .....	102

4.1.1	Algorithmes $\tilde{A}$ : définition .....	102
4.1.2	Le terme heuristique $h_i(n)$ .....	103
4.1.3	Algorithmes $\varrho$ versus algorithmes $\tilde{A}$ .....	103
4.1.4	Code pour algorithmes $\tilde{A}$ de type 2 .....	104
4.1.5	Code pour algorithmes $\tilde{A}$ de type 3 .....	107
4.1.6	Code pour algorithmes $\tilde{A}$ de type 1 .....	107
4.1.7	Algorithmes $\tilde{A}_0, \tilde{A}_\varepsilon, \tilde{A}_e, \tilde{A}_\mathcal{G}$ .....	108
4.2	Propriétés des termes heuristiques $h_x$ .....	109
4.2.1	$h_x$ semi-statique ou statique .....	109
4.2.2	$h_x$ minorée ou majorée dans $U$ , localement ou non .....	111
4.2.3	$h_x$ minorante ou *-localement majorée ou majorée .....	112
4.2.4	$h_x$ coïncidante ou pré-coïncidante ou $m_T$ -coïncidante .....	112
4.2.5	$h_x$ pleinement monotone, $h$ monotone .....	112
4.2.6	$h_x$ pleinement consistante, $h$ consistante .....	113
4.2.7	$h_x$ finiment décroissante .....	114
4.2.8	$h_x$ écartée .....	114
4.2.8	Rapports entre propriétés des termes heuristiques .....	115
4.3	Algorithmes $A$ .....	116
4.3.1	Définition .....	116
4.3.2	Particularités des algorithmes $A$ de types 1, 2 ou 3 .....	116
4.3.3	Code pour algorithme $A$ de type 1/2/3 .....	118
4.4	Algorithmes $\tilde{A}^*, A^*$ .....	119
4.5	Algorithmes $\tilde{A}^H, A^H$ .....	120
4.6	Algorithmes $\tilde{A}^G, A^G$ .....	120
4.7	Algorithmes $\tilde{A}^F, A^F$ .....	120
4.8	Récapitulatif : familles $\tilde{A}$ de base .....	122
4.9	Position d'autres algorithmes : $\tilde{A}^P, \tilde{A}^\omega, \tilde{A}^M$ .....	122
4.9.1	Algorithmes $\tilde{A}^P, A^P$ .....	122
4.9.2	Algorithmes $\tilde{A}^\omega, A^\omega$ .....	124
4.9.3	Algorithmes $\tilde{A}^M$ .....	126
4.10	Algorithmes $\varrho$ : autres cas .....	131
4.10.1	Propriétés des fonctions d'évaluation $f_x$ .....	132
4.10.2	Algorithmes $\varrho$ et modes d'extraction .....	132
4.10.3	Algorithmes $\varrho^F$ .....	133
4.10.4	Rapports entre propriétés de $f_x$ et de $h_x$ .....	133
4.11	Notes historiques et bibliographiques .....	138
4.11.1	Les appellations $A$ et $A^*$ .....	138
4.11.2	L'idée de terme heuristique non minorant .....	138
4.11.3	L'idée de terme heuristique non statique .....	139
4.11.4	Autres propriétés des termes heuristiques .....	140
4.11.5	Cas où la fonction d'évaluation n'est pas additive .....	141
<b>Chapitre 5 — Arrêt avec découverte d'un chemin vers un but</b> .....		143
5.1	Arrêt sans but dans les graphes finis .....	143
5.1.1	Définition : applications aplaties .....	144
5.1.2	Théorème d'arrêt pour les graphes finis .....	145
5.2	Seule issue : trouver un but .....	145
5.2.1	Lemme du front garni .....	145
5.2.2	Lemme des entrées .....	146
5.2.3	Lemme de la seule issue .....	146

5.3	Condition nécessaire et suffisante d'arrêt avec extraction de but .....	147
5.3.1	Définition : applications plafonnées .....	147
5.3.2	Définition : applications circonscrites .....	147
5.3.3	Théorème général d'arrêt sur but pour $\varrho$ de types 1, 2 ou 3 .....	147
5.4	Propriétés des applications aplaties .....	148
5.4.1	Aplatissement pour algorithme $\varrho$ avec $f_x$ finiment décroissante .....	148
5.4.2	Aplatissement pour algorithme $\tilde{A}$ avec $h_x$ finiment décroissante .....	149
5.5	Propriétés des applications plafonnées .....	149
5.5.1	Définition : applications chemin-majorées .....	150
5.5.2	Théorèmes de chemin-majoration .....	151
5.5.3	Théorème de plafonnement pour algorithmes $\varrho_{\mathcal{E}}$ .....	153
5.5.4	Corollaire de plafonnement pour algorithmes $\tilde{A}_{\mathcal{E}}$ .....	153
5.6	Propriétés des applications circonscrites .....	154
5.6.1	Théorème de circonscription pour algorithmes $\varrho$ .....	156
5.6.2	Théorème de circonscription pour algorithmes $\tilde{A}$ .....	157
5.7	Arrêt avec chemin vers but pour algorithmes $\varrho$ .....	157
5.7.1	Théorèmes d'arrêt sur but pour algorithmes $\varrho_{\mathcal{E}}^F$ .....	157
5.7.2	Contre-exemples : non arrêt pour $\varrho_{\mathcal{E}}^F$ .....	158
5.7.3	Arrêt avec découverte de chemin vers un but .....	159
5.8	Arrêt avec chemin vers but pour algorithmes $\tilde{A}$ .....	160
5.8.1	Théorèmes d'arrêt sur but pour algorithmes $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^F$ et $\tilde{A}_{\mathcal{E}}$ .....	160
5.8.2	Contre-exemples : non arrêt pour $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^F$ .....	161
5.8.3	Arrêt avec découverte de chemin vers un but .....	162
5.9	Applicabilité — Conséquences .....	163
5.9.1	Discussion générale .....	163
5.9.2	Arrêt sur but pour le « taquin » .....	164
5.9.3	Arrêt sur but pour le « voyageur de commerce » .....	165
5.9.4	Arrêt sur but pour algorithmes $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^P$ .....	165
5.9.5	Arrêt sur but pour algorithmes $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^G$ .....	166
5.9.6	Arrêt sur but pour algorithmes $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^M$ .....	167
5.10	Notes historiques et bibliographiques .....	179
5.10.1	Arrêt d'algorithmes $A_0^*$ .....	179
5.10.2	Arrêt d'algorithmes $A_{\mathcal{E}}$ .....	180
5.10.3	Arrêt d'algorithmes $A_0^H$ .....	181
5.10.4	Arrêt d'algorithmes $A_{\mathcal{E}}^G$ .....	181
5.10.5	Arrêt d'algorithmes $\tilde{A}_0^P$ .....	181
5.10.6	Arrêt d'algorithmes $A_0^{\omega}$ .....	182
5.10.7	Arrêt d'algorithmes $\tilde{A}_0^M$ .....	182
5.10.8	Arrêt d'algorithmes $\varrho_0$ .....	182
<b>Chapitre 6 — Longueur du chemin découvert .....</b>		<b>183</b>
6.1	Admissibilité, sous-admissibilité .....	183
6.1.1	Définition : admissibilité .....	183
6.1.2	Notion de sous-admissibilité .....	183
6.2	Garanties relatives aux entrées .....	184
6.2.1	Théorème des entrées, pour $\varrho$ de type 3 .....	184
6.2.2	Corollaire des entrées, pour $\tilde{A}^F$ de type 3 .....	185
6.2.3	Théorème d'extraction, pour $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^F$ de type 3 .....	186
6.3	Longueur du chemin découvert par $\tilde{A}_{\mathcal{E}}^F$ de type 3 .....	186
6.3.1	Lemme du chemin découvert, pour $\tilde{A}$ types 1, 2 ou 3 .....	186

6.3.2	<i>Théorèmes pour <math>\tilde{A}_{\mathcal{E}}^F</math> de type 3</i> .....	187
6.4	<i>Conséquences et applications pour <math>\tilde{A}_{\mathcal{E}}^F</math> de type 3</i> .....	188
6.4.1	<i>Applicabilité des résultats précédents</i> .....	188
6.4.2	<i>Application aux <math>\tilde{A}_{\mathcal{E}}^*</math>, <math>\tilde{A}_{\mathcal{E}}^H</math>, <math>\tilde{A}_{\mathcal{E}}^G</math>, <math>\tilde{A}_{\mathcal{E}}^L</math> de type 3 avec <math>h_x</math> pré-coïncidant</i> .....	189
6.4.3	<i>Application au « taquin »</i> .....	193
6.4.4	<i>Application au « voyageur de commerce »</i> .....	194
6.4.5	<i>Application aux <math>\tilde{A}_{\mathcal{E}}^P</math> de type 3</i> .....	195
6.4.6	<i>Application aux <math>\tilde{A}_{\mathcal{E}}^O</math> de type 3</i> .....	196
6.4.7	<i>Application aux <math>\tilde{A}_0^M</math> de type 1, 2 ou 3</i> .....	198
6.5	<i>Longueur du chemin découvert par <math>\rho</math> de type 3</i> .....	200
6.5.1	<i>Plafond d'arrêt <math>\mathbb{F}^i</math>, pour <math>\rho_{\mathcal{E}}^F</math> de tous types</i> .....	200
6.5.2	<i>Théorèmes d'extraction, pour <math>\rho_{\mathcal{E}}^F</math> de tous types</i> .....	201
6.5.3	<i>Lemme du chemin découvert pour <math>\rho</math> de type 1, 2 ou 3</i> .....	202
6.5.4	<i>Théorèmes pour <math>\rho</math> de type 1, 2 ou 3</i> .....	202
6.5.5	<i>Plafond d'arrêt <math>\mathbb{F}^i</math></i> .....	203
6.5.6	<i>Théorèmes pour <math>\rho</math> de type 1, 2 ou 3</i> .....	204
6.5.7	<i>Théorèmes pour <math>\tilde{A}</math> de type 1, 2 ou 3</i> .....	206
6.6	<i>Notes historiques et bibliographiques</i> .....	207
6.6.1	<i>Admissibilité d'algorithmes <math>A_0^*</math></i> .....	208
6.6.2	<i>Sous-admissibilité d'algorithmes <math>A_{\mathcal{E}}^*</math></i> .....	209
6.6.3	<i>Sous-admissibilité d'algorithmes <math>A_0^H</math></i> .....	209
6.6.4	<i>Sous-admissibilité d'algorithmes <math>A_{\mathcal{E}}^G</math></i> .....	209
6.6.5	<i>Sous-admissibilité d'algorithmes <math>\tilde{A}_0^P</math></i> .....	210
6.6.6	<i>Sous-admissibilité d'algorithmes <math>A_0^O</math></i> .....	210
6.6.7	<i>Sous-admissibilité d'algorithmes <math>\tilde{A}_0^M</math></i> .....	210
6.6.8	<i>Majorants a priori pour algorithmes <math>\rho_0</math></i> .....	210
<b>Chapitre 7 — Expansion du graphe d'états :</b>		
	<b>conditions, variantes, comparaisons</b> .....	213
7.1	<i>Conditions générales de développement d'état</i> .....	213
7.1.1	<i>Conditions nécessaires aux développements d'états</i> .....	214
7.1.2	<i>Conditions suffisantes de développement</i> .....	216
7.2	<i>Algorithmes <math>\tilde{A}^*</math> mieux informés</i> .....	217
7.2.1	<i>Définitions</i> .....	217
7.2.2	<i>Théorème de comparaison des états développés</i> .....	218
7.3	<i>Algorithmes <math>\tilde{A}</math> monotones</i> .....	220
7.3.1	<i>Théorème de mise en réserve définitive</i> .....	220
7.3.2	<i>Code pour algorithmes <math>\tilde{A}</math> monotones de type 3</i> .....	221
7.3.3	<i>Théorème de fine comparaison stricte</i> .....	221
7.3.4	<i>Théorème des valeurs d'extraction</i> .....	222
7.3.5	<i>Conditions de développement pour <math>\tilde{A}</math> monotones</i> .....	223
7.3.6	<i>Théorème de fine comparaison large</i> .....	224
7.4	<i>Algorithmes <math>A_M^{\mathcal{F}}</math></i> .....	225
7.4.1	<i>Spécificité des algorithmes <math>A_M^{\mathcal{F}}</math></i> .....	225
7.4.2	<i>Admissibilité, sous-admissibilité des <math>A_M^{\mathcal{F}}</math></i> .....	227
7.4.3	<i>Minoration des développements effectués par des <math>A_M^*</math></i> .....	228
7.4.4	<i>Complexité en pire cas pour algorithmes <math>A_M^*</math></i> .....	234
7.5	<i>Notes historiques et bibliographiques</i> .....	236
7.5.1	<i>Conditions de développement</i> .....	236
7.5.2	<i>Algorithmes mieux informés</i> .....	237

7.5.3	Algorithmes monotones .....	238
7.5.4	Complexité algorithmique .....	238
<b>Chapitre 8 — Recherche heuristique bidirectionnelle .....</b>		<b>241</b>
8.1	Recherche en arrière versus en avant .....	242
8.2	Recherche bidirectionnelle .....	242
8.3	Algorithmes $B^{\varrho}$ .....	244
8.3.1	Code pour $B^{\varrho}$ de type 1-1 .....	245
8.3.2	Notations .....	247
8.3.3	Comment décider du sens de recherche ? .....	247
8.3.4	Comment décider de l'arrêt de la recherche ? .....	248
8.3.5	Modes d'extraction, algorithmes $B^{\varrho}_{\mathcal{E}}$ .....	250
8.3.6	Code pour $B^{\varrho}$ de type 2-2 .....	250
8.3.7	Code pour $B^{\varrho}$ de type 3-3 .....	251
8.4	Arrêt avec chemin vers but pour $B^{\varrho}$ .....	252
8.4.1	Lemmes .....	253
8.4.2	Théorèmes d'arrêt avec chemin vers but pour $B^{\varrho}_{\mathcal{E}}$ .....	254
8.5	Algorithmes $B^{\tilde{A}}$ .....	254
8.6	Arrêt avec chemin vers but pour $B^{\tilde{A}}$ .....	258
8.7	Algorithmes $B^{\varrho}$ et $B^{\tilde{A}}$ .....	260
8.7.1	Spécificité du code des algorithmes $B^{\varrho}$ et $B^{\tilde{A}}$ .....	260
8.7.2	Lemmes .....	263
8.7.3	Théorèmes d'arrêt avec chemin vers but pour $B^{\varrho}_{\mathcal{E}}$ .....	264
8.7.4	Théorèmes d'arrêt avec chemin vers but pour $B^{\tilde{A}}_{\mathcal{E}}$ .....	265
8.8	Longueur du chemin découvert par $B^{\tilde{A}}_{\mathcal{E}}$ et $B^{\varrho}_{\mathcal{E}}$ .....	267
8.8.1	Théorèmes pour $B^{\tilde{A}}_{\mathcal{E}}$ type 3-3 .....	267
8.8.2	Théorèmes pour $B^{\varrho}_{\mathcal{E}}$ type 1-1, 2-2, 3-3, 1-2, 1-3, 2-3 .....	271
8.9	De l'origine des termes heuristiques .....	273
8.10	Algorithmes $BFF^{\tilde{A}}$ et $BFF^{\tilde{A}}$ .....	274
8.10.1	Spécificité des heuristiques des algorithmes $BFF^{\tilde{A}}$ .....	274
8.10.2	Arrêt avec chemin vers but pour $BFF^{\tilde{A}}$ de type 3-3 .....	274
8.10.3	Longueur du chemin découvert par des $BFF^{\tilde{A}}_{\mathcal{E}}$ .....	279
8.11	Notes historiques et bibliographiques .....	281
<b>Bibliographie .....</b>		<b>283</b>
<b>Index général .....</b>		<b>289</b>
<b>Index des algorithmes .....</b>		<b>293</b>