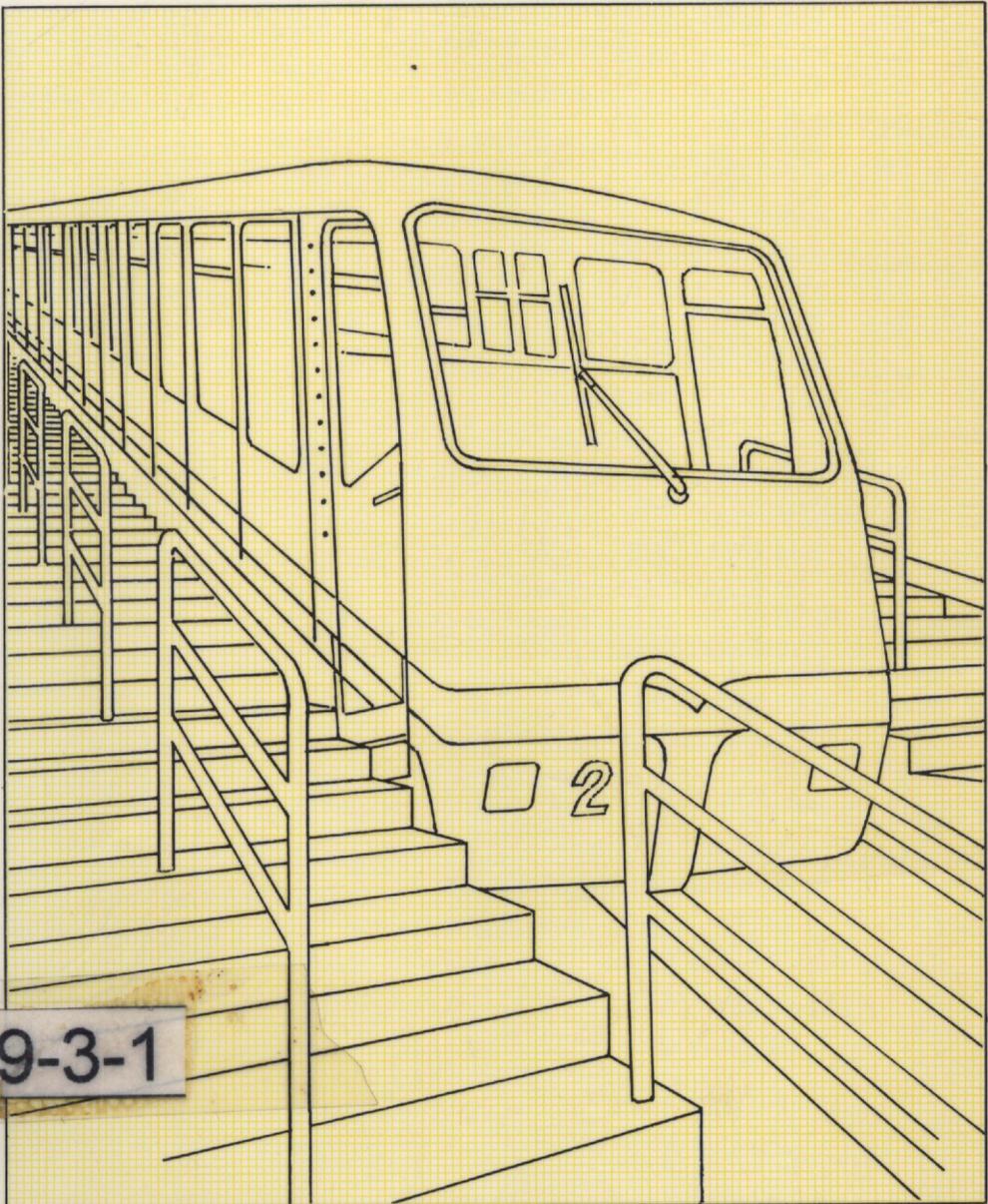


# Processus stochastiques

ALAN RUEGG



519-3-1

## TABLE DES MATIÈRES

	AVANT-PROPOS .....	v
CHAPITRE 1	INTRODUCTION .....	1
	1.1 Rappels de quelques résultats de calcul de probabilité .....	1
	1.1.1 Généralités .....	1
	1.1.2 Théorème des probabilités totales .....	1
	1.1.3 Espérances mathématiques conditionnelles .....	2
	1.1.4 Théorème de multiplication .....	3
	1.1.5 Quelques propriétés de la loi exponentielle .....	3
	1.1.6 Loi gamma .....	4
	1.2 Rappels d'analyse linéaire .....	4
	1.2.1 Valeurs propres et vecteurs propres .....	4
	1.2.2 Matrices stochastiques .....	5
	1.3 Rappels d'analyse mathématique .....	6
	1.3.1 Fonctions génératrices .....	6
	1.3.2 Transformées de Laplace .....	8
	1.3.3 Equations aux différences .....	8
	1.3.4 Equations aux dérivées partielles .....	9
	1.3.5 La fonction $o(h)$ .....	10
	1.4 Généralités sur les processus stochastiques .....	11
	1.5 Problèmes .....	12
CHAPITRE 2	CHAÎNES DE MARKOV .....	15
	2.1 Introduction .....	15
	2.2 Définitions .....	16
	2.2.1 Chaînes de Markov à temps discret .....	16
	2.2.2 Matrice de transition et graphe des transitions ..	17
	2.2.3 Exemples .....	18
	2.3 Propriétés fondamentales .....	19
	2.3.1 Probabilités de transition à $n$ étapes .....	19
	2.3.2 Loi de probabilité de $X_n$ .....	20
	2.3.3 Exemples .....	21

2.3.4	Chaînes de Markov à deux états.....	22
2.4	Comportement asymptotique.....	23
2.4.1	Régime transitoire et régime permanent.....	23
2.4.2	Existence d'une distribution limite.....	24
2.4.3	Exemples.....	24
2.5	Distributions stationnaires.....	25
2.5.1	Définitions et méthodes de calcul.....	25
2.5.2	Exemples.....	26
2.5.3	Existence et unicité des distributions stationnaires.....	27
2.5.4	Distributions stationnaires et distributions limites.....	29
2.6	Chaînes de Markov absorbantes.....	30
2.6.1	Définition.....	30
2.6.2	Délais d'absorption et probabilités d'absorption.....	30
2.6.3	Deux théorèmes.....	32
2.6.4	Exemples.....	33
2.6.5	Délais d'atteinte et probabilités d'atteinte.....	34
2.7	Chemins aléatoires.....	35
2.7.1	Généralités.....	35
2.7.2	Chemins aléatoires à deux états absorbants.....	36
2.7.3	Temps moyen d'absorption.....	38
2.7.4	Chemins aléatoires à un état absorbant.....	39
2.8	Phénomènes d'attente à temps discret.....	40
2.9	Problèmes.....	42
CHAPITRE 3	PROCESSUS DE POISSON.....	47
3.1	Introduction.....	47
3.1.1	Processus aléatoires à temps continu.....	47
3.1.2	Processus de comptage.....	48
3.1.3	Une relation fondamentale.....	48
3.2	Définition et propriété principale.....	49
3.2.1	Définition.....	49
3.2.2	Propriété principale.....	50
3.2.3	Démonstration.....	50
3.2.4	Graphe des transitions.....	52
3.3	Processus de Poisson et loi exponentielle.....	52
3.3.1	Intervalle entre deux événements.....	52
3.3.2	Généralisations.....	53
3.3.3	Nouvelle caractérisation du processus de Poisson.....	53
3.3.4	Exemple.....	54
3.4	Propriétés supplémentaires.....	55

88	3.4.1	Superposition .....	55
88	3.4.2	Décomposition .....	56
90	3.4.3	Processus de Poisson et loi uniforme .....	57
90	3.4.4	Nombre d'événements pendant un intervalle aléatoire .....	58
90	3.4.5	Processus de Bernoulli .....	59
90	3.5	Processus de Poisson composé .....	60
92	3.5.1	Définition .....	60
92	3.5.2	Caractéristiques du processus de Poisson composé .....	60
94	3.5.3	Généralisation .....	62
94	3.6	Problèmes .....	63
97	CHAPITRE 4	PHÉNOMÈNES D'ATTENTE, PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT .....	65
97	4.1	Phénomènes d'attente .....	65
100	4.1.1	Introduction .....	65
101	4.1.2	Classification des systèmes d'attente .....	65
101	4.1.3	Analyse mathématique .....	67
103	4.2	Le système d'attente M/M/1 .....	67
104	4.2.1	Régime transitoire .....	67
102	4.2.2	Régime stationnaire .....	60
107	4.2.3	Remarques et exemples .....	70
107	4.3	Caractéristiques d'un système d'attente .....	71
108	4.3.1	Définitions, formules de Little .....	71
109	4.3.2	Caractéristiques du système M/M/1 .....	72
111	4.3.3	Distribution du temps de séjour T .....	73
112	4.4	Processus de naissance et de mort .....	74
112	4.4.1	Introduction .....	74
112	4.4.2	Définition .....	75
112	4.4.3	Régime transitoire et régime stationnaire .....	75
112	4.4.4	Graphes des transitions .....	76
112	4.4.5	Exemples .....	77
121	4.5	Systèmes d'attente autres que M/M/1 .....	79
121	4.5.1	Généralités .....	79
121	4.5.2	Système à plusieurs stations M/M/s .....	79
121	4.5.3	Distribution du temps de séjour .....	82
121	4.5.4	Le système M/M/ $\infty$ .....	82
121	4.5.5	Système à pertes M/M/s/s .....	83
124	4.5.6	Remarques .....	84
124	4.6	Croissance de populations .....	85
124	4.6.1	Introduction .....	85
124	4.6.2	Croissance pure .....	86

4.6.3	Décroissance pure .....	88
4.6.4	Croissance et décroissance .....	88
4.7	Problèmes d'absorption .....	90
4.7.1	Généralités .....	90
4.7.2	Probabilités d'absorption et probabilités d'atteinte .....	90
4.7.3	Temps jusqu'à l'absorption .....	92
4.7.4	Temps moyen jusqu'à l'absorption .....	92
4.7.5	Période d'activité d'un système d'attente .....	93
4.8	Problèmes .....	94
<b>CHAPITRE 5 GÉNÉRALISATION DES PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT .....</b>		
5.1	Chaînes de Markov à paramètre continu .....	97
5.1.1	Introduction .....	97
5.1.2	Exemple .....	98
5.1.3	Définitions et propriétés principales .....	100
5.1.4	Taux de transition .....	101
5.1.5	Equations de Kolmogorov et régime transitoire .....	102
5.1.6	Exemple .....	103
5.1.7	Equations de balance et régime transitoire .....	104
5.1.8	Evolution temporelle des chaînes de Markov ....	105
5.2	Le système d'attente M/G/1 .....	107
5.2.1	Introduction .....	107
5.2.2	Chaîne de Markov induite .....	108
5.2.3	Distribution stationnaire .....	109
5.2.4	Nombre moyen de clients dans le système .....	111
5.2.5	Temps de séjour moyen .....	112
5.2.6	Période d'activité .....	113
5.2.7	Exemples .....	113
5.3	Le système d'attente M/G/ $\infty$ .....	116
5.4	Problèmes .....	117
<b>CHAPITRE 6 APPLICATION A DES PROBLÈMES DE FIABILITÉ .....</b>		
6.1	Introduction .....	121
6.1.1	Généralités .....	121
6.1.2	Définitions .....	121
6.1.3	Distribution exponentielle .....	123
6.1.4	Autres distributions de fiabilité .....	124
6.2	Systèmes non réparables .....	125
6.2.1	Généralités .....	125
6.2.2	Systèmes sans redondance .....	126

6.2.3	Systèmes en parallèle.....	126
6.2.4	Autres système à redondance active.....	127
6.2.5	Systèmes à redondance passive.....	129
6.2.6	Composants à fiabilité exponentielle.....	129
6.2.7	Exemples.....	130
6.3	Systèmes réparables.....	131
6.3.1	Introduction.....	131
6.3.2	Méthode des processus stochastiques.....	132
6.3.3	Fiabilité et disponibilité.....	133
6.3.4	Modélisation par les processus de naissance et de mort.....	134
6.3.5	Modélisation par les chaînes de Markov à temps continu.....	136
6.3.6	Systèmes non markoviens.....	137
6.3.7	Cycles de service.....	139
6.4	Problèmes.....	140
SOLUTIONS DES PROBLÈMES.....		143
BIBLIOGRAPHIE.....		147
INDEX ALPHABÉTIQUE.....		149

### 1.1. Théorème des probabilités totales

Si les probabilités conditionnelles sont considérées comme un outil principal de calcul des probabilités elles doivent cette réputation avant tout au résultat obtenu dans ce livre le *théorème des probabilités totales*. Avant de l'énoncer, rappelons qu'en calcul des probabilités, on fait correspondre à une expérience stochastique l'ensemble fondamental  $\Omega$  formé de toutes les issues possibles de cette expérience. On appelle alors *partition* de  $\Omega$  toute famille d'événements  $(B_1, B_2, \dots)$  s'excluant mutuellement et dont la réunion est  $\Omega$ .

**PROPOSITION 1.1.** Soit  $(B_1, B_2, \dots)$  une partition de l'ensemble fondamental  $\Omega$ . Soit

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

quel que soit l'événement  $A$ .

# Processus stochastiques

ALAN RUEGG

Les applications des processus stochastiques existent dans de nombreux domaines de l'ingénieur (transmission de signaux, télétrafic, transport ou fiabilité), mais ce sont également des informaticiens, physiciens, biologistes, sociologues, ainsi que des spécialistes d'autres disciplines qui font appel, de plus en plus, à la modélisation par les processus stochastiques, notamment ceux du type markovien. La lecture du livre ne nécessite que des connaissances élémentaires en calcul des probabilités, ainsi qu'en calcul différentiel et intégral.

Cet ouvrage se veut une introduction aux processus stochastiques à valeurs discrètes. Il est destiné en premier lieu à des étudiants ingénieurs du premier et du deuxième cycle universitaire; il permet également à l'ingénieur praticien de s'initier à ce domaine important des mathématiques appliquées.

L'auteur est né à Bâle en 1932. Il est mathématicien, diplômé (1956) de l'École polytechnique fédérale de Zurich et Docteur ès sciences de cette même institution (1962). Il a été professeur assistant (1967-70) à l'Université du Connecticut (USA). Depuis 1970, il est professeur de mathématiques à l'École polytechnique fédérale de Lausanne où il s'est spécialisé dans l'enseignement de cours destiné à des ingénieurs et à des architectes.

