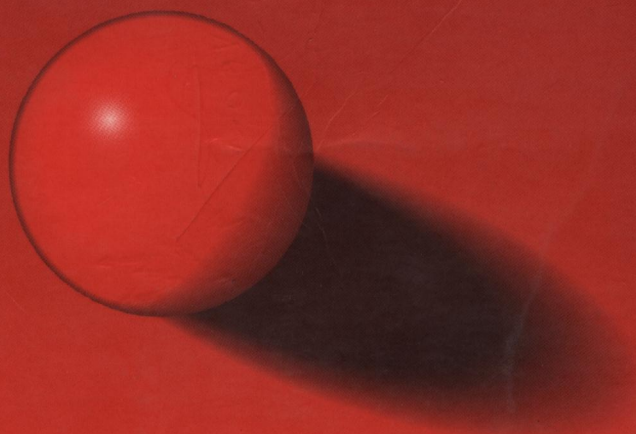


PASCAL KAUFFMANN

---

# Statistique

Information  
Estimation  
Tests



---

**ECONOMIE**  
**MODULE**  
DUNOD

# Table des matières

	Pages
<b>AVANT-PROPOS</b>	<b>XV</b>
<b>1. VECTEURS ALÉATOIRES</b>	
I. EXEMPLE INTRODUCTIF	2
II. LES VECTEURS ALÉATOIRES DE DIMENSION 2	3
1. Définitions	3
2. Lois marginales d'un vecteur aléatoire de dimension 2	5
3. Moments d'un vecteur aléatoire de dimension 2	6
1) Moments d'un vecteur à composantes continues	6
2) Moments d'un vecteur à composantes discrètes	7
4. Vecteur espérance et matrice des variances-covariances d'un vecteur aléatoire de dimension 2	9
III. INTERDÉPENDANCES ENTRE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES	9
1. Conditionnalité entre deux variables aléatoires	10
2. Indépendance entre deux variables aléatoires	11
3. Covariance entre deux variables aléatoires	13
4. Coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires	15
IV. VECTEURS ALÉATOIRES DE DIMENSION QUELCONQUE	16
1. Définitions	16
2. Lois marginales d'un vecteur aléatoire de dimension $n$	17
3. Moments d'un vecteur aléatoire de dimension $n$	18
4. Vecteur espérance et matrice des variances-covariances d'un vecteur aléatoire de dimension $n$	20



## 2. EXEMPLES DE VECTEURS ALÉATOIRES

I.	EXEMPLES SIMPLES DE VECTEURS ALÉATOIRES	24
1.	Exemple de vecteur aléatoire de dimension 2 à composantes continues	24
2.	Exemple de vecteur aléatoire de dimension 2 à composantes discrètes	27
II.	LA LOI NORMALE DANS $\mathbb{R}^2$	29
1.	Définition	29
2.	Récriture de la densité d'une loi normale dans $\mathbb{R}^2$	30
3.	Lois marginales d'un vecteur gaussien de dimension 2	31
4.	Vecteur espérance et matrice des variances-covariances d'un vecteur gaussien de dimension 2	32
5.	Écriture matricielle de la densité d'une loi normale dans $\mathbb{R}^2$	35
III.	LA LOI NORMALE DANS $\mathbb{R}^n$	36
1.	Définition	36
2.	Principales propriétés d'un vecteur gaussien de dimension $n$	37
3.	Illustration : vecteur gaussien à composantes non corrélées	38
IV.	LA LOI MULTINOMIALE	39
1.	Exemple introductif	39
2.	Vecteur aléatoire bernoullien	41
1)	Définitions	41
2)	Remarques	41
3)	Vecteur espérance	42
4)	Matrice des variances-covariances	42
3.	Vecteur aléatoire multinomial	43
1)	Définition	43
2)	Remarques	43
3)	Fréquence d'un vecteur multinomial	44
4)	Lois marginales et vecteur espérance d'un vecteur multinomial	46
5)	Matrice des variances-covariances d'un vecteur multinomial	47

## 3. CONVERGENCES STOCHASTIQUES

I.	LA CONVERGENCE EN LOI	49
1.	Rappel : la convergence simple d'une suite de fonctions	50
2.	Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires	51
3.	Les principales propriétés de la convergence en loi	53
4.	Application de la convergence en loi : l'approximation de lois de probabilité	54



## 6. ÉCHANTILLONS ISSUS D'UNE LOI NORMALE

I.	PROPRIÉTÉS DES MOYENNES ET VARIANCES EMPIRIQUES SUR UN ÉCHANTILLON GAUSSIEN	92
1.	Loi de la moyenne empirique sur un échantillon gaussien	92
2.	Indépendance entre moyenne empirique et variances empiriques	92
1)	Résultat préliminaire	93
2)	Conséquences pour les échantillons gaussiens	93
II.	LE THÉORÈME DE FISHER ET SES CONSÉQUENCES	94
1.	La loi du Khi-deux	94
2.	La loi de Student	96
3.	Le théorème de Fisher	101
4.	Conséquences du théorème de Fisher	103
1)	Moments de la variance empirique	103
2)	Moments de la variance empirique corrigée	104
3)	Loi de $\frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n / \sqrt{n}}$	104

## 7. L'INFORMATION AU SENS DE FISHER

I.	L'INFORMATION AU SENS DE FISHER POUR UN PARAMÈTRE RÉEL	106
1.	Notations et hypothèses	106
2.	Score et quantité d'information pour un paramètre réel	108
3.	Positivité de l'information au sens de Fisher	109
4.	Additivité de l'information au sens de Fisher	110
5.	Calcul pratique de l'information fournie par une variable aléatoire réelle sur un paramètre réel	113
6.	Illustrations	113
1)	Loi exponentielle	114
2)	Loi binomiale	115
3)	Loi normale	116
4)	Autres résultats usuels	118
II.	L'INFORMATION AU SENS DE FISHER POUR UN PARAMÈTRE VECTORIEL	118
1.	Notations et hypothèses	119
2.	Vecteur score et matrice d'information pour un paramètre vectoriel	119
3.	Propriétés de la matrice d'information	122
4.	Illustration	123

## 8. ESTIMATION PONCTUELLE D'UN PARAMÈTRE

I.	L'ESTIMATION PONCTUELLE D'UN PARAMÈTRE RÉEL	126
1.	Notations et définitions	126
2.	Biais d'un estimateur	128



3. Estimateur convergent	129
4. Comparaisons d'estimateurs	130
1) Cas particulier : comparaison d'estimateurs sans biais	130
2) Cas général : comparaison d'estimateurs quelconques	131
5. L'inégalité de Frechet, Darmois, Cramer et Rao	132
6. Estimateur efficace et estimateur asymptotiquement efficace	134
7. Illustrations	135
1) Estimation du paramètre d'une loi de Poisson	135
2) Estimation de la variance d'une loi normale	137
<b>II. L'ESTIMATION PONCTUELLE</b>	
<b>D'UN PARAMÈTRE VECTORIEL</b>	138
1. Notations et définitions	138
2. Biais d'un estimateur	139
3. Estimateur convergent	140
4. Comparaisons d'estimateurs	141
5. Généralisation de l'inégalité de Frechet, Darmois, Cramer et Rao	143
6. Illustrations	145
1) Estimation de $\varphi(m, \sigma) = \begin{bmatrix} m \\ \sigma^2 \end{bmatrix}$ , $(m, \sigma)$ étant le paramètre d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$	145
2) Borne de Frechet pour $\varphi(p, \theta) = \begin{bmatrix} p/\theta \\ p/\theta^2 \end{bmatrix}$ , $(p, \theta)$ étant le paramètre d'une loi $\Gamma(p, \theta)$	147
<b>9. MÉTHODES D'ESTIMATION PONCTUELLE</b>	
<b>I. L'ESTIMATION PAR LA MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE</b>	150
1. Vraisemblance d'un paramètre sur un échantillon	150
2. Estimateur du maximum de vraisemblance d'un paramètre	152
3. L'équation de la vraisemblance pour un paramètre réel	154
4. Les équations de la vraisemblance pour un paramètre vectoriel	157
5. Les principales propriétés de l'estimation par le maximum de vraisemblance	163
1) Estimateurs du maximum de vraisemblance et efficacité	163
2) Comportement asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance	164
<b>II. L'ESTIMATION PAR LA MÉTHODE DES MOMENTS</b>	166
1. Rappels : moments empiriques sur un échantillon	167
2. Le principe de l'estimation par la méthode des moments	168
3. Exemples	169
1) Estimation du paramètre $p$ d'une loi binomiale $\mathcal{B}(k, p)$	169



2) Estimation du paramètre $(k, p)$ d'une loi binomiale $\mathcal{B}(k, p)$	170
3) Estimation du paramètre $(m, \sigma)$ d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$	171
4) Estimation du paramètre $(p, \theta)$ d'une loi $\Gamma(p, \theta)$	171
4. Les principales propriétés de l'estimation par la méthode des moments	173
<b>III. L'ESTIMATION D'UNE ESPÉRANCE OU D'UNE VARIANCE</b>	<b>174</b>
1. Estimation d'une espérance	174
2. Estimation d'une variance	175
<b>10. L'ESTIMATION PAR INTERVALLE DE CONFIANCE</b>	
<b>I. EXEMPLE INTRODUCTIF ET DÉFINITIONS</b>	<b>178</b>
1. Intervalle de confiance pour l'espérance d'une loi normale	178
2. Intervalles de confiance pour un paramètre réel	180
3. Variable aléatoire pivotale pour un paramètre	181
<b>II. CONSTRUCTION D'INTERVALLES DE CONFIANCE POUR UN PARAMÈTRE RÉEL</b>	<b>184</b>
1. Procédé général de construction	184
2. Intervalles de confiance unilatéraux et intervalles de confiance de longueur minimale	187
3. Intervalles de confiance pour les paramètres des lois usuelles	190
1) Intervalles de confiance pour l'espérance d'une loi normale	190
2) Intervalles de confiance pour la variance d'une loi normale	190
3) Intervalles de confiance pour l'écart-type d'une loi normale	191
4) Intervalles de confiance pour une proportion	192
5) Intervalles de confiance pour le paramètre d'une loi de Poisson	193
<b>III. AUTRES INTERVALLES DE CONFIANCE USUELS</b>	<b>193</b>
1. Estimation par intervalle de confiance du rapport des variances de deux lois normales	193
2. Estimation par intervalle de confiance de la différence des espérances de deux lois normales	195
<b>11. INTRODUCTION À LA THÉORIE DES TESTS</b>	
<b>I. EXEMPLES INTRODUCTIFS</b>	<b>200</b>
1. Exemple de test paramétrique	200
2. Exemple de test non paramétrique	201
3. Exemple de résolution d'un problème de test paramétrique	201
<b>II. DÉFINITIONS</b>	<b>203</b>
1. Hypothèses, test d'hypothèses et règle de décision	203
2. Région critique et région d'acceptation d'un test	205
3. Risques associés à une règle de décision	205



4. Mesure des risques associés à une règle de décision	207
1) Exemple	208
2) Généralisation	210
5. Niveau et puissance d'une règle de décision	211
6. Courbe d'efficacité d'un test paramétrique	212
<b>III. LE PROBLÈME DU CHOIX D'UNE RÈGLE DE DÉCISION.</b>	
<b>LA DÉMARCHE DE NEYMAN ET PEARSON</b>	214
1. Dilemme dans la comparaison de deux règles de décision	214
2. La démarche de Neyman et Pearson ; les règles de décision UPP (ou UMP)	215

## 12. TESTS ADMETTANT DES RÈGLES DE DÉCISION UPP

<b>I. TESTS ENTRE DEUX HYPOTHÈSES SIMPLES</b>	218
1. Hypothèses simples	218
2. Le théorème de Neyman et Pearson	218
3. Exemples	220
1) Hypothèses simples relatives à l'écart-type d'une loi normale	220
2) Hypothèses simples relatives à une proportion	221
<b>II. TESTS D'UNE HYPOTHÈSE DE LA FORME <math>\mu \geq \mu_0</math> (ou <math>\mu \leq \mu_0</math>) CONTRE <math>\mu &lt; \mu_0</math> (ou <math>\mu &gt; \mu_0</math>)</b>	224
1. Les familles de lois à rapport de vraisemblance monotone	224
2. Le théorème de Lehmann	227
3. Exemples	229
1) Test relatif à l'espérance d'une loi normale de variance connue	229
2) Test relatif au paramètre d'une loi de Poisson	230
3) Test relatif à une proportion	232
<b>III. TESTS D'UNE HYPOTHÈSE DE LA FORME <math>\mu \notin ]\mu_1, \mu_2[</math> CONTRE <math>\mu \in ]\mu_1, \mu_2[</math></b>	233
1. Théorème	234
2. Exemple	235

## 13. AUTRES PROBLÈMES DE TEST

<b>I. TESTS RELATIFS À UNE ESPÉRANCE</b>	240
1. Notations et hypothèses testées	240
2. Cas particulier où l'écart-type de la loi $\mathcal{L}_\mu$ est connu	240
3. Cas où l'écart-type de la loi $\mathcal{L}_\mu$ est inconnu	243
1) Cas où l'échantillon dont on dispose est gaussien : le test de Student	243



2) Cas où l'on dispose d'un grand échantillon	245
3) Cas où l'on ne dispose que d'un petit échantillon	246
<b>II. TESTS RELATIFS À UNE VARIANCE OU À UN ÉCART-TYPE</b>	<b>247</b>
1. Notations et hypothèses testées	247
2. Test relatif à la variance ou à l'écart-type d'une loi normale	248
3. Cas particulier des grands échantillons gaussiens	249
4. Test relatif à la variance ou à l'écart-type d'une loi quelconque	250
<b>III. TESTS DE COMPARAISON</b>	<b>251</b>
1. Notations et hypothèses testées	251
2. Comparaison de deux espérances	251
1) Comparaison des espérances de deux lois normales	251
2) Comparaison des espérances de deux lois quelconques	253
3. Comparaison de deux proportions	254
4. Comparaison de deux variances	256
1) Comparaison des variances de deux lois normales : le test de Fisher	256
2) Comparaison de variances sur de grands échantillons	258
<b>IV. TESTS D'ADÉQUATION</b>	<b>258</b>
1. Le test du Khi-deux	258
2. Le test d'adéquation de Kolmogorov	262
1) Fonction de répartition empirique sur un échantillon	263
2) Principe du test d'adéquation de Kolmogorov	263
<b>ANNEXE 1</b>	
<b>ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE BILINÉAIRE</b>	<b>267</b>
I. Formes bilinéaires symétriques	268
II. Formes quadratiques	268
III. Formes bilinéaires symétriques en dimension finie	269
IV. Formes quadratiques en dimension finie	271
V. Principales propriétés des matrices symétriques définies positives et des matrices symétriques définies négatives	272
<b>ANNEXE 2</b>	
<b>LES LOIS GAMMA ET BÊTA</b>	<b>275</b>
I. La famille des lois gamma	275
1. Définition	275
2. Remarques	276
3. Moments d'une loi gamma	276
4. Cas particulier : les lois $\gamma(p)$	277



II. Les familles de lois bêta	277
1. Les lois bêta de seconde espèce	277
1) Définition	277
2) Remarques	278
3) Moments d'une loi $\mathcal{B}_2(p, q)$	278
2. Les lois bêta de première espèce	279
1) Définition	279
2) Densité d'une loi $\mathcal{B}_1(p, q)$	279

### ANNEXE 3

TABLES	281
--------	-----

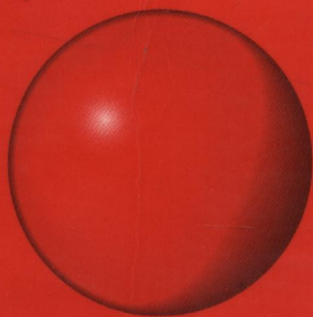
BIBLIOGRAPHIE	297
---------------	-----

INDEX	299
-------	-----

Ce livre est un manuel qui s'adresse principalement aux étudiants de licence en sciences économiques ou en sciences de gestion, ainsi qu'à un public de niveau comparable (premières années de magistère, de MST, d'écoles de commerce). Son contenu correspond à l'enseignement de statistiques généralement dispensé dans les seconds cycles universitaires, dont les mots-clés sont l'échantillonnage, l'inférence, l'estimation, les tests d'hypothèses.

D'une façon générale, l'objectif de cet enseignement est de traiter de problèmes d'inférence. Alors que le verbe "inférer" est couramment utilisé comme synonyme de "déduire", il s'en distingue fondamentalement aux yeux du statisticien. Déduire, c'est obtenir, à partir d'hypothèses, des conclusions logiquement irréfutables ; ainsi peut-on déduire des hypothèses usuelles relatives au comportement des entreprises en situation de concurrence pure et parfaite, qu'elles offriront leur produit à un prix égal au coût marginal de production. L'inférence, pour sa part, consiste à énoncer des résultats généraux relatifs à un phénomène qu'on ne connaît que *partiellement*. Inférer conduit donc, en particulier, à prendre un risque — celui de généraliser à tort. Ce risque est inévitable ; il doit être mesuré et pris (ou refusé) en toute connaissance de cause. Un exemple classique d'inférence est fourni par les instituts de sondage qui, un soir d'élection, viennent offrir au public un résultat de portée générale, alors que le scrutin n'est qu'en partie dépouillé. Le risque d'annoncer un résultat erroné est bien réel, et peut conduire le statisticien à s'abstenir de toute conclusion.





# Statistique

Information • Estimation • Tests

Destiné aux étudiants du deuxième cycle en sciences économiques ou en sciences de gestion – ainsi qu'à un public de formation comparable (magistères, MST, écoles de commerce et d'ingénieurs) –, cet ouvrage concilie trois objectifs : présenter les principaux fondements théoriques des méthodes statistiques ; proposer une approche générale des problèmes (et non une succession de recettes) ; offrir de nombreuses applications pratiques relevant de l'économie et de la gestion.

Sont ainsi exposés de façon extrêmement pédagogique :

- des rappels et compléments relatifs aux vecteurs aléatoires, aux convergences stochastiques et aux familles de lois exponentielles ;
- l'échantillonnage et la notion d'information au sens de R. Fisher ;
- la théorie de l'estimation ;
- la théorie des tests.

Les notions clefs des méthodes statistiques enseignées dans les deuxièmes cycles universitaires sont ainsi traitées avec beaucoup de rigueur et de clarté.

Ancien élève de l'École centrale de Paris, Pascal Kauffmann est maître de conférences à l'université Bordeaux I, où il assure depuis plusieurs années l'enseignement de statistique en magistère d'économie et finance internationales.



Code 042133  
ISBN 2 10 002133 8

