

Agrégation de mathématiques

**THÈMES DE
PROBABILITÉS
ET STATISTIQUE**

Paul S. Toulouse

DUNOD

Table des matières

	IX
Avant-propos	1
Introduction	1
1 La loi des grands nombres	9
1. Convergence presque sûre	10
2. Théorème de Kolmogorov	13
3. Variations	18
4. Applications	23
5. Illustration numérique	26
6. Références	28
2 Les lois gaussiennes et le théorème central limite	29
1. Les lois gaussiennes dans \mathbf{R}	29
2. Caractérisations de la loi gaussienne	33
3. La covariance d'une loi dans un espace vectoriel	34
4. Loi gaussienne dans un espace vectoriel	38
5. Conditionnement dans une loi gaussienne	45
6. Théorème central limite	48
7. Lois du χ^2 , du t de Student et du F de Fisher	51
8. Illustration numérique	57
9. Références	58

3	Grandes déviations	59
1.	Introduction	59
2.	Transformée de Cramer d'une loi réelle	61
3.	Les théorèmes de grandes déviations	68
4.	Le lemme de Varadhan	73
5.	Illustration numérique	76
6.	Références	77
4	Méthode de Monte Carlo	78
1.	Principe de la méthode	78
2.	Propriétés de l'approximation	79
3.	Exemples et limites de la méthode	80
4.	Réduction de la variance	82
5.	Illustration numérique	85
6.	Références	86
5	Intervalles de confiance et familles de tests	87
1.	Introduction	87
2.	Observations gaussiennes	90
3.	Observation binomiale	94
4.	Développements	99
5.	Illustration numérique	99
6.	Références	100
6	Le modèle linéaire gaussien	102
1.	Introduction	102
2.	Le modèle linéaire gaussien simple	103
3.	Le modèle linéaire multiple	108
4.	Test de l'hypothèse linéaire $H\beta - h = 0$	112
5.	Modèle d'analyse de la variance	125
6.	Illustration numérique	127
7.	Références	129

7 Le test du χ^2	130
1. Introduction	130
2. Test d'une hypothèse simple	131
3. Test de symétrie	134
4. Test d'indépendance	138
5. Développements possibles	142
6. Illustration numérique	142
7. Références	144
8 Convergence des mesures empiriques	145
1. Théorème de Glivenko-Cantelli	145
2. Test de Kolmogorov-Smirnov	148
3. Illustration numérique	151
4. Références	152
9 Martingales	153
1. Filtrations, temps d'arrêt	153
2. Propriétés élémentaires	157
3. Le théorème d'arrêt	159
4. Convergence	164
5. Loi des grands nombres et théorème central limite	171
6. Applications et exemples	174
7. Illustration numérique	178
8. Références	181
10 Chaînes de Markov finies	182
1. Notations, indépendance conditionnelle	182
2. Suites markoviennes finies	187
3. Chaînes homogènes, mesure stationnaire	191
4. Classification des états	196
5. Périodes, chaînes apériodiques	202
6. Théorème ergodique et théorème central limite	207
7. Illustration numérique	209
8. Références	210

11 Chaînes de Markov dénombrables	211
1. Systèmes de renouvellement	211
2. Transition sur un espace dénombrable	216
3. Classification ensembliste des états	217
4. Récurrence et transience des états et des classes	218
5. Processus de vie et de mort	222
6. Chaînes bistochastiques	224
7. Chaînes réversibles	228
8. Illustration numérique	232
9. Références	234
12 Séries d'événements, renouvellement	235
1. Loi exponentielle	235
2. Processus de Poisson	239
3. Exemples de processus de Poisson	246
4. Processus de renouvellement	248
5. Illustration numérique	251
6. Références	252
13 Les processus de population	253
1. L'arbre de Galton-Watson	253
2. Loi et moments de Z_n	255
3. L'extinction	257
4. Martingales et comportement asymptotique	258
5. Équations fonctionnelles	262
6. L'exemple des fonctions homographiques	264
7. Illustration numérique	267
8. Références	268
Index	269

Paul S. Toulouse

THÈMES DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Cet ouvrage s'adresse à des personnes ayant la formation d'une maîtrise de mathématiques, non nécessairement spécialisée en probabilités et statistique, et souhaitant préparer l'agrégation ou acquérir une culture générale.

À travers l'exposé de différents thèmes, il illustre la pertinence des concepts probabilistes récents dans plusieurs domaines d'applications.

Un chapitre introductif regroupe la quinzaine de résultats indispensables d'un cours de mesure et intégration.

Les treize chapitres suivants, quasiment indépendants les uns des autres afin de simplifier l'accès aux résultats, sont tous suivis de suggestions d'applications numériques et de simulations, composées de programmes en Matlab d'un niveau élémentaire et dont certains peuvent aider aux premiers pas d'un novice. La plupart des résultats sont accompagnés de démonstrations détaillées.

PAUL S. TOULOUSE
enseigne à l'Université
Paul Sabatier de Toulouse
et à l'Université
de Virginie (USA).



9 782100 043088

ISBN 2 10 004308 0
Code 044308

