

Révision

Éric Sorosina • Paul Métier

Systeme D Algèbre générale

350 méthodes
400 exercices corrigés

1^{re} et 2^e années toutes filières

Préface de Jean-Marie Monier

l'intégrale

DUNOD

Table des matières

Avant-propos	XI
Chapitre 1. Groupes, anneaux, corps. Utilisation des structures algébriques	1
I. Groupes	2
I.1 Généralités	2
I.2 Autour du groupe symétrique	14
I.2.1 Comment établir un résultat sur le groupe symétrique (resp. sur une permutation)	15
I.2.2 Comment calculer la signature d'une permutation	18
II. Anneaux	21
II.1 Généralités	21
II.2 Une classe particulière d'anneaux : les anneaux principaux	32
III. Corps	45
IV. Arithmétique dans \mathbb{Z}	54
IV.1 Généralités	54
IV.1.1 Divisibilité	54
IV.1.2 pgcd	58
IV.2 Résolution de problèmes en arithmétique	61
IV.2.1 Utilisation d'une décomposition primaire	61
IV.2.2 Utilisation de la congruence	66
IV.2.3 Utilisation du petit théorème de FERMAT et du théorème de WILSON	68
IV.2.4 Utilisation du théorème chinois	70
IV.3 Résolution d'équations diophantiennes	73
V. Coupures transversales du programme	76
V.1 Prolongement de structures	76
V.2 Restriction de structures	79
VI. Aller plus loin	81

Chapitre 2. Polynômes	91
I. Les structures de $\mathbb{K}[X]$	91
I.1 Algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$	92
I.1.1 L'espace vectoriel $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$	92
I.1.2 L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$	97
I.2 Injection de $\mathbb{K}[X]$ dans l'ensemble des fonctions polynomiales	98
I.3 $A[X]$ et ses propriétés	103
I.4 Objets mathématiques définis à partir de $\mathbb{K}[X]$	109
I.4.1 Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices	109
I.4.2 Polynômes à plusieurs indéterminées	110
II. Applications à la résolution d'équations en des polynômes	111
III. L'anneau euclidien $\mathbb{K}[X]$	120
III.1 Divisibilité et division euclidienne	120
III.2 pgcd. Utilisation du théorème de BEZOUT	128
III.3 Polynômes irréductibles	131
IV. Racines (ou zéros) de polynômes	134
IV.1 Nombres de racines. Multiplicité d'une racine	134
IV.2 Localisation des racines	135
IV.3 Polynômes scindés. Résolubilité par radicaux	142
V. Quelques familles particulières de polynômes	151
Chapitre 3. Fractions rationnelles	157
I. Méthodes générales de décomposition en éléments simples	158
I.1 Cas de la partie entière	158
I.2 Cas d'un pôle simple	159
I.3 Cas d'un pôle multiple d'ordre de multiplicité « faible » ($\leq 2, 3$)	163
I.4 Cas d'un pôle multiple d'ordre de multiplicité « élevé » ($\geq 3, 4$)	165
I.4.1 Utilisation d'un diviseur suivant les puissances croissantes	165
I.4.2 Utilisation des dérivées successives	168
I.5 Réduction des calculs lors d'une décomposition en éléments simples	170
I.5.1 Utilisation d'un argument de parité	170
I.5.2 Utilisation d'un remplacement de X par une valeur particulière	171
I.5.3 Utilisation d'un passage à la limite	172
II. Étude de cas particuliers	173
II.1 Cas $\mathbb{C}(X)$	173
II.2 Cas $\mathbb{R}(X)$	175
II.2.1 Méthode générale de décomposition en éléments simples	175
II.2.2 Un cas particulier important	176
II.3 Cas $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})(X)$	177
III. Application de la décomposition en éléments simples	178

Chapitre 4. Espaces vectoriels. Application à la dualité	181
I. Espaces vectoriels	181
I.1 Généralités	181
I.1.1 La structure d'espace vectoriel	181
I.1.2 Relation entre deux sous-espaces vectoriels	186
I.2 Dépendance et indépendance linéaires	187
I.2.1 Familles libres	187
I.2.2 Familles liées	197
I.2.3 Familles génératrices	198
I.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires	201
II. Applications linéaires	204
II.1 Bijectivité d'une application linéaire	204
II.2 Problèmes de construction d'applications linéaires	206
II.3 Calcul du rang d'applications linéaires	209
II.4 Applications linéaires classiques	212
II.4.1 Homothéties	212
II.4.2 Projecteurs	214
III. Dualité	215
III.1 Généralités	215
III.1.1 Formes linéaires	215
III.1.2 Bases duales	218
III.2 Orthogonalité	220
III.2.1 Orthogonal d'une partie	220
III.2.2 Utilisation de l'orthogonalité	222
III.3 Transposition : transposée d'une application linéaire	222
Chapitre 5. Calcul matriciel	229
I. Généralités	229
I.1 Produit matriciel	229
I.2 Application linéaire et matrices	234
II. Rang d'une matrice	239
III. Puissances et exponentielles de matrices	243
III.1 Puissances de matrices	243
III.2 Exponentielles de matrices	249
IV. Inversion	257
V. Équations matricielles	270
Chapitre 6. Déterminants. Applications aux systèmes linéaires	283
I. Calculs de déterminants	284
I.1 Utilisation des propriétés fondamentales du déterminant	284
I.2 Utilisation de transformations : « Provoquer la chance ! »	295
I.3 Utilisation d'outils plus fins	304

II.	Déterminants classiques	308
II.1	Déterminants de VANDERMONDE	308
II.2	Déterminants de matrices circulantes	310
II.3	Déterminants de CAUCHY	312
III.	Systèmes linéaires	312
III.1	Résolution	312
III.1.1	Un premier cas particulier : les systèmes de CRAMER	312
III.1.2	Un deuxième cas particulier : $r = n < p$	313
III.1.3	Cas général : $r \leq n$	313
III.2	Aller voir ailleurs	313
III.2.1	Méthodes pratiques de résolution des systèmes linéaires : méthodes directes	313
III.2.2	Méthodes pratiques de résolution des systèmes linéaires : méthodes itératives	324
III.2.3	Quelques idées pratiques de résolution des systèmes non linéaires	335
Chapitre 7. Topologie matricielle		337
I.	Normes sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{K})$	338
I.1	Les normes subordonnées	338
I.1.1	Définition d'une norme subordonnée	338
I.1.2	Intérêt des normes subordonnées	341
I.1.3	Reconnaître une norme non subordonnée	347
I.2	Les normes non subordonnées	348
I.2.1	La norme N_∞	348
I.2.2	La norme de SCHUR	349
II.	Étude topologique d'ensembles matriciels particuliers. Applications	351
II.1	Le groupe linéaire de $M_n(\mathbb{K})$: $GL_n(\mathbb{K})$	351
II.2	L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$: $DG_n(\mathbb{K})$	355
II.2.1	Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$	355
II.2.2	Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	357
II.3	Le groupe orthogonal de $M_n(\mathbb{R})$: $O_n(\mathbb{R})$ (resp. le groupe unitaire de $M_n(\mathbb{C})$: $U_n(\mathbb{C})$)	357
III.	Étude de la continuité d'applications matricielles particulières. Applications	361
III.1	Applications matricielles « élémentaires »	361
III.2	Applications matricielles liées à l'inversion	362
III.3	L'application « polynôme caractéristique »	365
Index		369