

# La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire

Pierre Ladevèze  
Jean-Pierre Pelle

*Hermès*

*Lavoisier*

---

## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	11
<b>Chapitre 1. La notion de qualité pour une solution éléments finis</b> .....	17
1.1. Introduction .....	17
1.2. Modèle de référence .....	19
1.3. Problème approché et erreurs de discrétisation .....	23
1.3.1. Problèmes linéaires .....	24
1.3.2. Problèmes non linéaires .....	28
1.4. Estimation des erreurs de discrétisation .....	31
1.4.1. Les estimations <i>a priori</i> .....	31
1.4.2. Les estimations <i>a posteriori</i> .....	32
1.4.3. Qualités d'un estimateur .....	33
1.5. Extensions et références générales .....	35
<b>Chapitre 2. La méthode de l'erreur en relation de comportement pour les problèmes linéaires</b> .....	37
2.1. Introduction .....	37
2.2. Erreur en relation de comportement .....	39
2.2.1. Solution approchée admissible .....	39
2.2.2. Erreur en relation de comportement en linéaire .....	39
2.3. Propriétés de l'erreur en relation de comportement .....	42
2.3.1. Nouvelle formulation d'un problème d'élasticité .....	42
2.3.2. Energie potentielle et énergie complémentaire .....	44
2.3.3. Extensions .....	45
2.4. Utilisation pour les calculs éléments finis .....	46
2.4.1. Construction d'un couple admissible .....	46
2.4.2. Champ de déplacement .....	47

6	La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire	
2.4.3.	Champ de contrainte	47
2.4.4.	Lien avec les erreurs en solution	53
2.4.5.	Comportement asymptotique	57
<b>Chapitre 3.</b>	<b>Les autres méthodes pour les problèmes linéaires</b>	<b>59</b>
3.1.	Introduction	59
3.2.	Les méthodes fondées sur les résidus d'équilibre	60
3.2.1.	Principe général	60
3.2.2.	Estimateurs explicites	62
3.2.3.	Estimateurs implicites	66
3.2.4.	Commentaires	72
3.3.	Les méthodes fondées sur le lissage des contraintes	72
3.3.1.	Principe général	72
3.3.2.	La méthode $zz1$	73
3.3.3.	Recouvrement par lissage local ( $zz2$ )	75
3.3.4.	Quelques variantes	77
3.3.5.	Commentaires	78
3.4.	Les techniques itératives d'encadrement	79
3.4.1.	Identité de base	79
3.4.2.	Technique itérative d'encadrement	82
3.4.3.	Commentaire	84
<b>Chapitre 4.</b>	<b>Éléments de comparaison entre les différents estimateurs en linéaire</b>	<b>85</b>
4.1.	Introduction	85
4.2.	Erreurs en relation de comportement	86
4.2.1.	Un exemple en 2D	86
4.2.2.	Comparaison des différents types de construction	87
4.3.	Indice global d'efficacité	89
4.3.1.	Comparaison d'estimateur sur un problème de thermique	89
4.3.2.	Comparaison sur un problème d'élasticité	91
4.3.3.	Analyse de la qualité de l'estimateur « amélioré »	94
4.4.	Versions usuelles des estimateurs en relation de comportement	95
<b>Chapitre 5.</b>	<b>L'adaptation des maillages pour les problèmes linéaires</b>	<b>97</b>
5.1.	Introduction	97
5.2.	Les techniques d'adaptation des maillages	100
5.2.1.	r-version	100
5.2.2.	h-version	100
5.2.3.	p-version	104
5.3.	Adaptation des maillages	105
5.3.1.	Adaptation par raffinement local	105

5.3.2. Adaptation par remaillage global .....	106
5.3.3. Construction d'un maillage optimal .....	112
5.3.4. Vérification de l'optimalité .....	115
5.4. Traitement des zones à forts gradients .....	117
5.4.1. Les zones à forts gradients .....	117
5.4.2. Etude d'un exemple test .....	119
5.4.3. Prise en compte des zones à forts gradients .....	122
5.4.4. Détection automatique des zones à forts gradients .....	125
5.4.5. Extension aux zones de concentration de contraintes .....	129
5.4.6. Un exemple d'adaptation en 3D .....	130
5.5. Vers l'automatisation des analyses éléments finis .....	132
5.5.1. Objectifs .....	132
5.5.2. Un algorithme d'automatisation .....	132
5.5.3. Commentaires .....	135
5.6. Exemples .....	135
5.6.1. Premier exemple .....	135
5.6.2. Deuxième exemple .....	137
5.6.3. Troisième exemple .....	140
<b>Chapitre 6. La méthode de l'erreur en relation de comportement pour les problèmes non linéaires d'évolution .....</b>	<b>143</b>
6.1. Introduction .....	143
6.2. Plasticité et viscoplasticité en petites perturbations .....	145
6.2.1. Rappel du problème de référence .....	145
6.2.2. Relation de comportement .....	146
6.3. Erreur au sens de Drucker .....	154
6.3.1. Champs admissibles .....	154
6.3.2. Définition de la mesure d'erreur .....	155
6.3.3. Construction des champs admissibles .....	161
6.3.4. Indicateurs d'erreurs en temps et en espace .....	166
6.3.5. Indice global d'efficacité .....	173
6.4. Erreur en dissipation .....	177
6.4.1. Champs admissibles .....	178
6.4.2. Mesures d'erreur en dissipation .....	179
6.4.3. Erreur en solution .....	180
6.4.4. Erreur relative .....	182
6.4.5. Construction des champs admissibles .....	183
6.4.6. Indicateurs d'erreurs en temps et en espace .....	186
6.5. Exemples .....	190
6.5.1. Comparaison des deux erreurs .....	191
6.5.2. Comportement des erreurs et des indicateurs spécifiques .....	192



## 8 La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire

6.6. Contrôle adaptatif des calculs.....	196
6.7. Généralisations.....	200
6.7.1. Extension aux formulations bi-standards.....	200
6.7.2. Extension aux formulations à bipotentiel.....	201
6.7.3. Application aux problèmes de contact unilatéral.....	203
6.7.4. Extension aux problèmes en grandes transformations.....	206
6.7.5. Extension aux matériaux endommageables.....	207
<b>Chapitre 7. La méthode de l'erreur en relation de comportement en dynamique.....</b>	<b>209</b>
7.1. Introduction.....	209
7.2. Vibrations linéaires.....	211
7.2.1. Formulation du problème.....	211
7.2.2. Discrétisation par éléments finis.....	212
7.2.3. Nouvelle formulation.....	214
7.2.4. Méthode d'encadrement des pulsations propres exactes.....	215
7.2.5. Mise en œuvre de la méthode d'encadrement.....	217
7.2.6. Évaluation de la constante $k_j$ .....	223
7.2.7. Méthode pratique d'encadrement.....	228
7.2.8. Exemple.....	230
7.2.9. Calculs adaptatifs en vibrations.....	232
7.3. Dynamique transitoire.....	241
7.3.1. Nouvelle formulation du problème de référence.....	241
7.3.2. Extension de la condition de stabilité de Drucker.....	244
7.3.3. Erreur en relation de comportement.....	245
7.3.4. Discrétisation du problème de référence.....	250
7.3.5. Construction de triplets admissibles.....	253
7.3.6. Indicateurs d'erreurs en temps et en espace.....	260
7.3.7. Indicateur d'erreur de diagonalisation de la masse.....	268
7.3.8. Exemples simples.....	270
<b>Chapitre 8. Les techniques de construction de champs admissibles.....</b>	<b>279</b>
8.1. Introduction.....	279
8.2. Problème de type Thermique 2D.....	281
8.2.1. Formulation du problème.....	281
8.2.2. Discrétisation éléments finis.....	282
8.2.3. Construction de champs admissibles.....	282
8.3. Problèmes d'élasticité 2D.....	292
8.3.1. Construction des densités en élasticité.....	292
8.3.2. Construction de champs de contrainte admissibles.....	295
8.4. Problèmes d'élasticité axisymétrique.....	302
8.4.1. Construction des densités.....	303

8.4.2. Construction du champ de contrainte.....	305
8.4.3. Traitement spécifique aux nœuds situés sur l'axe.....	306
8.5. Problèmes d'élasticité 3D.....	309
8.5.1. Construction des densités.....	309
8.5.2. Construction de champs de contrainte admissibles.....	311
8.6. Amélioration de la construction des densités.....	313
8.6.1. Condition de prolongement faible.....	313
8.6.2. Notations et résultats préliminaires.....	314
8.6.3. Décomposition de $\hat{\mathbf{E}}$ .....	315
8.6.4. Nouvelle construction des densités.....	317
8.7. Elasticité incompressible ou quasi-incompressible.....	325
8.7.1. Problème de référence.....	325
8.7.2. Erreur en relation de comportement.....	326
8.7.3. Discrétisation du problème.....	327
8.7.4. Construction des champs admissibles.....	328
8.7.5. Exemples.....	331
8.8. Plaques élastiques.....	335
8.8.1. Modèle de flexion de Kirchhoff-Love.....	336
8.8.2. Erreur en relation de comportement.....	337
8.8.3. Application aux méthodes de calculs par éléments finis.....	337
8.8.4. Construction d'un couple admissible.....	339
8.8.5. Exemples.....	340
8.9. Comportement asymptotique.....	343
<b>Chapitre 9. Estimation des erreurs locales.....</b>	<b>353</b>
9.1. Introduction.....	353
9.2. Rappel du problème de référence.....	354
9.3. Une propriété heuristique des erreurs locales sur les contraintes.....	355
9.3.1. Indices d'efficacité locaux.....	355
9.3.2. Exemples.....	356
9.3.3. Une estimation d'erreur sur les contraintes locales.....	364
9.4. Types de quantités locales à estimer.....	365
9.4.1. Grandeurs moyennes associées à la contrainte.....	365
9.4.2. Grandeur moyenne associée au déplacement.....	369
9.4.3. Opérateurs d'extraction.....	371
9.4.4. Estimation des erreurs locales.....	373
9.4.5. Exemple.....	382
9.4.6. Commentaires.....	384
<b>Bibliographie.....</b>	<b>385</b>
<b>Index.....</b>	<b>407</b>

Le présent ouvrage traite de la maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire. Cette préoccupation de toujours, tant au niveau industriel qu'au niveau de la recherche, connaît depuis une vingtaine d'années une révolution avec l'apparition d'outils véritablement quantitatifs. Une attention particulière est portée aux estimateurs et indicateurs d'erreur pour le calcul des structures qui, en la matière, est le domaine le plus avancé ; l'accent est mis sur le concept d'erreur en relation de comportement. Une part importante de l'ouvrage est également consacrée à l'exploitation des estimateurs d'erreur, quels qu'ils soient, pour contrôler les différents paramètres qui interviennent dans un calcul, et en premier lieu, les paramètres liés au maillage.

Bon nombre de développements sont issus des plus récentes recherches des auteurs : les estimateurs d'erreurs locales, l'extension du concept d'erreur en relation de comportement aux problèmes non linéaires d'évolution et aux problèmes de dynamique, les améliorations adaptatives des calculs en mécanique non linéaire.

L'ouvrage s'adresse à tous ceux qui s'intéressent à la mécanique, étudiants, chercheurs, ingénieurs, tant au niveau de la construction des modèles qu'au niveau de leur simulation à des fins industrielles.

#### *Les auteurs*

Pierre Ladevèze est professeur à l'École normale supérieure de Cachan où il anime, au sein du LMT-Cachan, un groupe de chercheurs dont les activités portent sur la modélisation et le calcul des structures, notamment des structures composites.

Jean-Pierre Pelle est professeur à l'École normale supérieure de Cachan. Il est responsable de l'équipe de recherche « Contrôle des modèles numériques et CAO » du LMT-Cachan et directeur du département de génie mécanique de l'ENS-Cachan.

**Hermès**  
**Science**  
publ. - rev. - coll.

[www.hermes-science.com](http://www.hermes-science.com)

