
Calcul différentiel pour les langues de la logique

théorie et applications

André Thayse

hermes

Lavoisier

Table des matières

1	Calcul différentiel pour la logique des propositions	11
1.1.	Introduction	11
1.2.	Logique des propositions et fonctions booléennes	13
1.2.1.	Fonctions et expressions booléennes	13
1.2.2.	Expression latticielle	16
1.2.3.	Expressions dans l'anneau des entiers modulo-2, expressions galoisiennes	18
1.2.4.	Expressions dans le champ des réels	19
1.3.	Dérivées et formules de Taylor et de Maclaurin	20
1.3.1.	Dérivées de fonctions de variables réelles	21
1.3.2.	Dérivées d'expressions $f_r(x)$	22
1.3.3.	Formule de Taylor de fonctions de variables réelles	24
1.3.4.	Formule de Taylor d'expressions f_r	25
1.3.5.	Dérivées booléennes	28
1.3.6.	Formules booléennes de Taylor	29
1.3.7.	Formules de Taylor optimales	31
1.4.	Différentielles totales et dérivées totales	35
1.4.1.	Différentielles de fonctions de variables réelles	35
1.4.2.	Différentielles booléennes	38
1.4.3.	Différentielles de fonctions de fonctions de variables réelles	40
1.4.4.	Différentielles de fonctions de fonctions booléennes	41
1.5.	Opérateurs différentiels propres aux fonctions booléennes	44
1.5.1.	Variations	44
1.5.2.	Dérivées conjonctives et disjonctives	47

1.5.3.	Recherche d'impliquants et d'impliqués premiers	50
1.6.	Une forme générale de la dérivée booléenne	56
1.6.1.	Définitions	56
1.6.2.	La dérivée divisée $\partial^{A_1} f / \partial x_1$	59
1.6.3.	Les enveloppes inférieures	61
1.6.4.	Les enveloppes supérieures	63
1.6.5.	Enveloppes et développements de Taylor	65
1.7.	Notes historiques et bibliographiques	66
2	Applications du calcul différentiel booléen	69
2.1.	Introduction	69
2.2.	Synthèse de circuits	70
2.2.1.	Circuits à deux niveaux <i>et ou</i>	70
2.2.2.	Circuits à deux niveaux <i>ni-et</i> et à deux niveaux <i>ni-ou</i>	73
2.2.3.	Circuits à trois niveaux	76
2.3.	Synthèse de programmes	77
2.3.1.	Arbres et diagrammes de décision binaire	77
2.3.2.	Opérateurs différentiels et diagrammes de décision binaire	80
2.3.3.	Réalisation des diagrammes de décision binaire	82
2.3.4.	Preuve de théorème et dérivées disjonctives et conjonctives	83
2.4.	Détection de fautes dans les circuits et les programmes	84
2.4.1.	Introduction	84
2.4.2.	Modélisation de fautes	85
2.4.3.	Détection de fautes d'entrée	85
2.4.4.	Détection de fautes internes	87
2.4.5.	Détection de fautes dans les programmes	89
2.4.6.	Conclusions	90
2.5.	Détection d'aléas, ou erreurs transitoires	91
2.5.1.	Les aléas dans les circuits combinatoires	91
2.5.2.	Aléas et délais	91
2.5.3.	Détection des aléas fonctionnels	94
2.5.4.	Détection des aléas logiques	97
2.5.5.	Exemples de fonctions et de circuits	100
2.5.6.	Les aléas dans les circuits séquentiels	104
2.5.7.	Détection des aléas dans les circuits séquentiels	105
2.5.8.	Exemple	109
2.6.	Détection de propriétés fonctionnelles	113
2.6.1.	La décomposabilité	113
2.6.2.	Détection de la symétrie	116
2.6.3.	Détection de la A -dégénérescence	116
2.7.	Notes historiques et bibliographiques	117

3	Calcul différentiel pour la logique multivaluée	119
3.1.	Introduction	119
3.2.	Fonctions discrètes et expressions latticielles	120
3.2.1.	Définition et représentation tabulaire	120
3.2.2.	Expressions latticielles	121
3.2.3.	Dérivées conjonctives et disjonctives	126
3.2.4.	Algorithme pour la détection d'impliquants et d'impliqués premiers	130
3.2.5.	Applications	134
3.3.	Fonctions discrètes et expressions dans l'anneau	140
3.3.1.	Expressions dans l'anneau	140
3.3.2.	Bases binomiales et différences dans l'anneau	141
3.3.3.	Développements de Newton	143
3.4.	Fonctions discrètes et expressions dans les champs de Galois	145
3.4.1.	Expressions dans les champs de Galois	145
3.4.2.	Dérivées galoisiennes et développements de Taylor	147
3.5.	Calcul des différences et calcul différentiel	151
3.5.1.	Introduction	151
3.5.2.	Différences totales et accroissements	151
3.5.3.	Dérivées et différentielles	154
3.5.4.	Différences latticielles et variations de fonctions de fonctions	157
3.6.	Notes historiques et bibliographiques	159
4	Calcul intégral booléen	161
4.1.	Introduction	161
4.2.	Généralités sur l'intégration de fonctions de variables réelles	162
4.2.1.	Intégrale indéfinie	162
4.2.2.	Intégrale définie	163
4.2.3.	Relation entre intégrales indéfinie et définie	163
4.2.4.	Intégrales multiples	164
4.3.	Intégration au sens de Tucker de fonctions booléennes	165
4.3.1.	Généralités	165
4.3.2.	Dérivées orientées simples	166
4.3.3.	Intégrales au sens de Tucker	168
4.3.4.	Expressions algébriques des intégrales d'ordres 0 et 1	169
4.3.5.	Expressions algébriques des intégrales d'ordre quelconque	172
4.3.6.	Généralisation de la différentielle de Tucker au cas où un nombre arbitraire de variables peuvent se modifier	174
4.4.	L'intégration booléenne : une autre approche	177
4.4.1.	Définition	177
4.4.2.	Propriétés	178
4.5.	Conclusion	180

5	Éléments d'analyse différentielle pour la logique des prédicats	181
5.1.	Introduction	181
5.2.	La logique des prédicats	182
5.2.1.	Vocabulaire	182
5.2.2.	Syntaxe du calcul des prédicats	183
5.2.3.	Sémantique du calcul des prédicats	183
5.2.4.	Quantificateurs et dérivées disjonctives et conjonctives	185
5.2.5.	Conclusion	186
5.3.	Logique temporelle linéaire	187
5.3.1.	Introduction	187
5.3.2.	Syntaxe de la logique temporelle modale linéaire	187
5.3.3.	Logique temporelle prédictive linéaire	190
5.4.	Application : la traduction d'une langue naturelle	193
5.4.1.	Traduction compositionnelle vers une langue de la logique	193
5.4.2.	Un langage temporel typé comme langue cible	194
5.4.3.	Formalisme grammatical : les fondements	197
5.4.4.	Formalisme grammatical : constitution de lexique	198
5.4.5.	Formalisme grammatical : constitution de la grammaire	199
5.4.6.	Foncteurs de traduction pour expressions temporalisées	200
5.4.7.	Introduction de modalités dans la grammaire	203
5.5.	Conclusion et notes bibliographiques	206
	bibliographie	207

L'objectif de cet ouvrage est de développer un calcul différentiel et intégral pour des langages de la logique, calcul fort semblable au calcul différentiel et intégral de l'analyse infinitésimale classique.

Les applications de ce calcul différentiel et intégral logique se situent en théorie des circuits logiques (ou circuits de commutation) et en informatique. Ces applications sont, par exemple, la synthèse de circuits et de programmes, la détection de fautes de fixation dans les circuits, l'analyse de fautes de transition dans les circuits combinatoires et séquentiels.

L'auteur

André Thayse est professeur de logique et d'intelligence artificielle à l'université de Louvain. Sa recherche concerne essentiellement les applications de la logique et plus particulièrement la théorie des circuits logiques et le traitement de la langue naturelle au moyen des langages de la logique.

Il a travaillé en tant que chercheur au *Philips Research Laboratory Brussels* pendant 25 ans dans les domaines de la recherche spatiale, de la synthèse des systèmes logiques, de la reconnaissance automatique de la parole et de la programmation logique.



www.her-mes-science.com

ISBN 2-7462-0905-5

