

Georges Lion

algèbre

Cours complet pour la licence
avec 320 exercices résolus

LES SCIENCES
EN FAC
VUIBERT

LICENCE DE
MATHÉMATIQUES

Sommaire

Chapitre 0	Rappels d'arithmétique	5
Chapitre 1	Généralités sur les groupes	15
Chapitre 2	Groupes finis	31
Chapitre 3	Groupes opérant sur un ensemble	47
Chapitre 4	Formes quadratiques	59
Chapitre 5	Formes quadratiques à valeurs réelles	81
Chapitre 6	Anneaux	103
Chapitre 7	Anneaux de polynômes	117
Chapitre 8	Extensions de corps	127
Chapitre 9	Théorie de Galois	141
	Solution résumée des exercices	159
	Problèmes de révision	202
	Index	211

Table des matières

Avant propos	3
Chapitre 0 : Rappels d'arithmétique	5
§ I : Division euclidienne dans \mathbb{Z} ; p.g.c.d. ; p.p.c.m.	5
§ II : Entiers premiers entre eux ; théorèmes de Gauss et de Bézout.	7
§ III : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; nombres premiers ; corps \mathbb{F}_p	8
Exercices d'arithmétique	11
Chapitre 1 : Généralités sur les groupes	15
§ I : La structure de groupe	15
§ II : Sous-groupes – Classes modulo un sous-groupe	16
§ III : Générateurs d'un groupe	18
§ IV : Morphismes de groupes	19
§ V : Sous-groupes normaux	21
§ VI : Groupes quotients	23
Exercices du chapitre 1	25
Chapitre 2 : Groupes finis	31
§ I : Théorème de Lagrange	31
§ II : Ordre d'un élément d'un groupe	32
§ III : Groupes cycliques	33
§ IV : Structure des groupes abéliens finis	36
§ V : Groupes symétriques	37
Exercices du chapitre 2	42
Chapitre 3 : Groupes opérant sur un ensemble	47
§ I : Définition – Relation des classes	47
§ II : Applications aux groupes dont l'ordre est multiple de p	49
Exercices du chapitre 3	52
Chapitre 4 : Formes quadratiques	59
§ I : Définitions – Réduction de Gauss.	59
§ II : Formes bilinéaires symétriques – Orthogonalité	63
§ III : Groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée	67
§ IV : Équivalence des formes. Similitudes.	72
Exercices du chapitre 4	75
Chapitre 5 : Formes quadratiques à valeurs réelles	81
§ I : Généralités	81
§ II : Espaces euclidiens	83

§ III : Groupe orthogonal d'un espace euclidien	89
Exercices du chapitre 5	93
Chapitre 6 : Anneaux	103
§ I : Généralités sur la structure d'anneau	103
§ II : Anneaux intègres	104
§ III : Idéaux	105
§ IV : Notions arithmétiques dans un anneau intègre	107
§ V : Anneaux factoriels, principaux, euclidiens	109
Exercices du chapitre 6	112
Chapitre 7 : Anneaux de polynômes	117
§ I : Polynômes à coefficients dans un anneau intègre	117
§ II : Polynômes à coefficients dans un anneau factoriel	120
Exercices du chapitre 7	123
Chapitre 8 : Extensions de corps	127
§ I : Éléments algébriques sur un corps	127
§ II : Corps de décomposition d'un polynôme	129
§ III : Constructions à la règle et au compas	130
§ IV : Cyclotomie	132
Exercices du chapitre 8	134
Chapitre 9 : Théorie de Galois	141
§ I : Notations, objectifs, exemples	141
§ II : Indices et degrés	144
§ III : Propriétés des extensions galoisiennes	146
§ IV : Résolution par radicaux des équations algébriques	148
§ V : Illustration par l'étude de l'équation du 3 ^e degré	154
Exercices du chapitre 9	156
Solution résumée des exercices	159
Problème de révision n° 1	202
Problème de révision n° 2	203
Problème de révision n° 3	204
Problème de révision n° 4	205
Problème de révision n° 5	206
Problème de révision n° 6	207
Problème de révision n° 7	208
Problème de révision n° 8	209
Problème de révision n° 9	210
Index des notations	211
Index terminologique	212