

LES GRANDS CLASSIQUES GAUTHIER-VILLARS

Camille JORDAN

TRAITÉ
DES SUBSTITUTIONS
ET
DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES



ÉDITIONS
JACQUES GABAY

TABLE DES MATIÈRES.

PRÉFACE.....	Pages v
--------------	------------

LIVRE PREMIER. DES CONGRUENCES.

§ I. — *Première étude des congruences.*

1-2. Définition des congruences. — Résolution des congruences du premier degré....	3
3-9. Congruences de degrés supérieurs. — Nombre de leurs racines.....	4
§ II. — <i>Des congruences binômes. — Des résidus de puissances.</i>	
10. Théorèmes de Fermat et de Gauss.....	7
11-12. Racines primitives. — Leur nombre.....	8
13-14. Cas où le module est une puissance d'un nombre premier.....	11
15-16. Solution des congruences binômes. — Résidus quadratiques.....	13
§ III. — <i>Théorie de Galois.</i>	
17-22. Congruences irréductibles de degré v ; leur existence; leurs propriétés.....	14

LIVRE II. DES SUBSTITUTIONS.

CHAPITRE PREMIER. — DES SUBSTITUTIONS EN GÉNÉRAL.

§ I. — *Premiers principes de la théorie.*

23-36. Définitions et propositions élémentaires.....	21
39. Théorème de Lagrange.....	25
40-42. Théorème de Cauchy.....	26
§ II. — <i>De la transitivité.</i>	
43-44. Groupes transitifs. — Théorème sur l'ordre de ces groupes.....	29
45. Méthode pour la recherche des groupes plusieurs fois transitifs.....	30
46-47. Applications. — Groupe de M. Mathieu.....	33
§ III. — <i>Groupes non primitifs. — Facteurs de non primitivité.</i>	
48. Définition des groupes primitifs ou non primitifs.....	34
49-52. Facteurs de non primitivité. — Leur constance.....	34
53. Un groupe permutable à un groupe non primitif n'est pas transitif.....	41

§ IV. — <i>Groupes composés. — Facteurs de composition.</i>		Pages.
54.	Définition des groupes simples ou composés.....	41
55-58.	Constance des facteurs de composition.....	42
59.	Théorème sur les groupes intercalaires.....	48
§ V. — <i>Symétrie des fonctions rationnelles.</i>		
60-61.	Correspondance des groupes et des fonctions. — Théorème de Lagrange.....	50
62-65.	Problème de M. Kirkman.....	52
66.	Symétrie des assemblages de droites.....	55
67-74.	Isomorphisme. — Construction des groupes isomorphes à un groupe donné.....	56
75.	Théorème sur les groupes transitifs dont l'ordre égale le degré.....	60
§ VI. — <i>Du groupe alterné.</i>		
76-81.	Formation du groupe alterné. — Ses facteurs de composition.....	61
82-87.	Théorèmes divers.....	64
§ VII. — <i>Théorèmes de MM. Bertrand et Serret.</i>		
88-94.	Énoncé et généralisation de ces théorèmes. — Leur démonstration pour de grands nombres.....	67
95-98.	Fixation de la limite au delà de laquelle ils sont vrais.....	72
§ VIII. — <i>Limite de transitivité des groupes non alternés.</i>		
99-113.	Fixation de cette limite.....	76
CHAPITRE II. — DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.		
§ I. — <i>Représentation analytique des substitutions.</i>		
114-117.	Recherches de M. Hermite.....	88
§ II. — <i>Généralités sur les substitutions linéaires.</i>		
118-119.	Génération du groupe linéaire.....	91
120-124.	Son ordre.....	92
125-126.	Transformation des indices. — Caractéristique; sa constance.....	97
§ III. — <i>Facteurs de composition du groupe linéaire.</i>		
127-140.	Détermination de ces facteurs.....	99
§ IV. — <i>Groupes primaires.</i>		
141-146.	Leur caractère distinctif.....	110
§ V. — <i>Forme canonique des substitutions linéaires.</i>		
147-157.	Réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique.....	114
§ VI. — <i>Questions diverses.</i>		
158-161.	Ordre des substitutions linéaires.....	126

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
162-171. Forme et nombre des substitutions linéaires échangeables à une substitution donnée.	128
172. Nombre des substitutions réductibles à une forme canonique donnée	136
173. Faisceaux de substitutions linéaires échangeables entre elles; leur décomposition en deux faisceaux partiels F et E.	137
174-178. Forme du faisceau F.	138
179-185. Forme du faisceau E.	144
186. Théorème limitant l'ordre de F.	149
187-195. Substitutions permutables aux faisceaux précédents. — Conditions pour qu'elles forment un groupe primaire.	150
§ VII. — <i>Groupe orthogonal.</i>	
196. Généralités	155
197-200. Solution des congruences du second degré à plusieurs inconnues	156
201-214. Ordre du groupe orthogonal	161
215-216. Groupe orthogonal généralisé.	170
§ VIII. — <i>Groupe abélien.</i>	
217-219. Sa définition, et ses propriétés principales	171
220-223. Son ordre.	174
224-229. Ses facteurs de composition.	176
230-239. Nouvelle définition. — Exposants d'échange.	179
240-244. Faisceaux de substitutions abéliennes et échangeables entre elles. — Leur partage en trois catégories	186
245-253. Simplification des exposants d'échange par un changement d'indices.	189
§ IX. — <i>Groupes hypoabéliens.</i>	
254-261. Leur définition. — Leur réduction à deux groupes distincts.	195
262-267. Premier groupe hypoabélien. — Son ordre	199
268-276. Ses facteurs de composition.	202
277-282. Second groupe hypoabélien. — Son ordre	206
283-291. Ses facteurs de composition.	208
292-300. Faisceaux de substitutions hypoabéliennes et échangeables entre elles.	213
§ X. — <i>Méthodes générales pour former des groupes partiels contenus dans le groupe linéaire.</i>	
301-304. Première méthode.	219
305-306. Seconde méthode.	220
307-314. Troisième méthode. — Ordre et facteurs de composition des groupes obtenus. — Condition de primarité.	222
§ XI. <i>Groupes isomorphes au groupe linéaire.</i>	
315-317. Substitutions linéaires fractionnaires	227
318. Groupes de Steiner. — Leur définition	229
319-325. Propriétés des substitutions du groupe G	229
326-331. Son ordre	236
332-335. Il est isomorphe sans méridricité au groupe abélien.	240
336-345. Propriétés des substitutions du groupe G_1 . — Son ordre.	242
346. Il est isomorphe au premier groupe hypoabélien.	248
347. De deux nouveaux groupes analogues aux précédents.	249

LIVRE III.
DES IRRATIONNELLES.

CHAPITRE PREMIER. — GÉNÉRALITÉS.

§ I. — *Théorie générale des irrationnelles.*

	Pages.
348-352. Définitions et lemmes préliminaires	253
353-356. Théorème fondamental	257
357-360. Toute équation irréductible à son groupe transitif, et réciproquement. — Caractère des équations dont le groupe est non primitif.	259
361-372. Adjonction d'une ou de plusieurs fonctions des racines, son influence sur le groupe de l'équation. — Réduction de la résolution d'une équation composée à celle d'une suite d'équations simples.	261
373-380. Adjonction de fonctions des racines d'une autre équation.	267
381-383. Équations équivalentes à la proposée. — Leur classification	270
384. Relation la plus générale entre les racines de deux équations irréductibles	272
385-386. Impossibilité d'abaisser une équation irréductible de degré premier, ou l'équation générale d'un degré ≥ 4	275
387. Abaissement de l'équation du quatrième degré	275
388. Détermination du groupe d'une équation.	276

§ II. — *Groupes de monodromie.*

389-391. Sa définition. — Ses propriétés.	277
--	-----

§ III. — *Théorèmes divers.*

392-399. Théorèmes relatifs aux facteurs de composition des équations.	279
---	-----

CHAPITRE II. — APPLICATIONS ALGÈBRIQUES.

§ I. — *Des équations abéliennes.*

400-401. Des équations dont deux racines s'expriment rationnellement l'une par l'autre. ...	286
402-408. Équations abéliennes générales. — Leur résolution par des équations abéliennes de degré premier.	287
409-411. Équations binômes. — Racines primitives	291
412-414. Leurs facteurs irréductibles.	293
415. Leur groupe.	295

§ II. — *Équations de Galois.*

416-417. Leur groupe. — Leur résolution par des équations abéliennes	297
418. De l'équation $x^e = A$	298

CHAPITRE III. — APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

419. Observations générales.	301
-----------------------------------	-----

TABLE DES MATIÈRES.

xiii

	Pages.
§ I. — <i>Équation de M. Herse.</i>	
423-425. Groupe de cette équation. — Sa résolution	302
426. Équation de M. Mathieu.....	305
§ II. — <i>Équations de M. Clebsch.</i>	
427-430. Groupes de ces équations. — Leurs facteurs de composition	305
§ III. — <i>Droites situées sur les surfaces du quatrième degré à conique double.</i>	
434. Propriété caractéristique de l'équation.....	309
432-434. Son groupe. — Son abaissement au cinquième degré.....	310
435. Généralisation.....	312
§ IV. — <i>Points singuliers de la surface de M. Kammer.</i>	
436-440. Groupe de l'équation. — Son abaissement au sixième degré.....	313
§ V. — <i>Droites situées sur les surfaces du troisième degré.</i>	
441-444. Groupe, ordre et facteurs de composition de l'équation	316
445-453. Impossibilité de l'abaisser.....	319
§ VI. — <i>Problèmes de contacts.</i>	
454-456. Cas des courbes générales.....	329
457-461. Cas des courbes à points singuliers.....	331

CHAPITRE IV. — APPLICATIONS A LA THÉORIE DES TRANSCENDANTES.

§ I. — <i>Fonctions circulaires.</i>	
462-466. Division de l'arc de cercle.....	334
467. Division de la circonférence	336
§ II. — <i>Fonctions elliptiques.</i>	
468-473. Division d'un arc quelconque.....	337
476-477. Division des périodes.....	342
478-480. Équations modulaires. — Leur groupe	344
481-483. Impossibilité de les abaisser.....	347
484-485. Exceptions pour $n = 5, 7$ ou 11 . — Forme de la réduite	351
§ III. — <i>Fonctions hyperelliptiques.</i>	
486-488. Réduction du problème de la division au cas d'un diviseur premier.....	354
489-497. Groupe et propriétés de l'équation de la division.....	357
498. Théorème relatif à la bissection des périodes.....	364
499-504. Équation de la trisection des périodes. — Son abaissement.....	365
§ IV. — <i>Résolution des équations par les transcendentes.</i>	
505. Troisième degré.....	370

	Pages.
506. Quatrième degré.....	370
507-508. Cinquième degré. — Méthode de M. Hermite.....	372
509-512. Méthode de M. Kronecker.....	374
513-514. Impossibilité de résoudre les équations générales d'un degré supérieur à 5 à l'aide des équations de la division des fonctions circulaires et elliptiques, ou de la division des fonctions hyperelliptiques par un nombre impair.....	378
515. Leur résolution par les équations de la bissection des fonctions hyperelliptiques..	380
516. Sur une réduite de l'équation du huitième degré.....	380

LIVRE IV.

DE LA RÉOLUTION PAR RADICAUX.

CHAPITRE PREMIER. — CONDITIONS DE RÉSOLUBILITÉ.

517-518. Résolution des équations abéliennes de degré premier	385
519-521. Critérium de résolubilité.....	386
522. Impossibilité de résoudre l'équation générale d'un degré > 4	388
523. Résolution de l'équation du troisième degré.....	388
524-527. Nouvel énoncé du critérium. — Théorèmes divers.....	389
528-532. Énoncé définitif du critérium. — Problèmes A, B, C.....	392

CHAPITRE II. — RÉDUCTION DU PROBLÈME A.

§ I. — Groupes primitifs.

533. Réduction du problème au problème B.....	398
---	-----

§ II. — Groupes non primitifs.

534-543. Réduction du problème au cas précédent.....	399
--	-----

CHAPITRE III. — RÉDUCTION DU PROBLÈME B.

§ I. — Groupes décomposables.

544-554. Réduction du problème au cas des groupes indécomposables.....	410
--	-----

§ II. — Groupes indécomposables.

555. Forme de leur premier faisceau.....	420
556. Cas où chaque série ne contient qu'un indice.....	421
557-558. Cas général. — Existence de substitutions qui ne déplacent pas les séries.....	421
559-566. Second faisceau. — Double suite. — Forme type de ses substitutions.....	422
567-576. Forme type réelle des mêmes substitutions.....	428
577-594. Réduction du problème au problème C.....	438

TABLE DES MATIÈRES.

xv

CHAPITRE IV. — RÉDUCTION DU PROBLÈME C.

§ I. — Groupes décomposables.

	Pages.
592-599. Groupes décomposables de première espèce.....	454
600-613. Groupes décomposables de seconde espèce.....	455

§ II. — Groupes indécomposables de première catégorie.

614-619. Leur premier faisceau. — Forme de leurs substitutions.....	462
620. Cas particulier où chaque série ne contient qu'un indice.....	465
621-630. Cas général. — Existence de substitutions qui ne déplacent pas les séries.....	465
631. Second faisceau.....	472
632-637. Abaissement du degré du problème.....	473
638. Remarque sur la solution.....	478

§ III. — Groupes indécomposables de seconde catégorie.

639-640. Leur premier faisceau. — Forme de leurs substitutions.....	479
641. Cas particulier où chaque série ne contient qu'un indice.....	481
642. Cas général. — Existence de substitutions qui ne déplacent pas les séries.....	481
643. Second faisceau.....	482
644-647. Forme des exposants d'échange.....	484
648-657. Abaissement du degré du problème.....	488
658. Remarque sur la solution.....	496

§ IV. — Groupes indécomposables de troisième catégorie.

659-660. Leur premier faisceau. — Forme de leurs substitutions.....	497
661. Existence de substitutions qui ne déplacent pas les séries.....	498
662. Second faisceau.....	499
663. Forme des exposants d'échange.....	500
664-669. Abaissement du degré du problème.....	502
670. Remarques sur la solution.....	505
671-685. Exposant des groupes obtenus.....	506

CHAPITRE V. — RÉSUMÉ.

686-687. Réduction du problème A.....	523
688-693. Réduction du problème B.....	524
694-699. Réduction du problème C.....	528
700. Observations.....	536

CHAPITRE VI. — GROUPES A EXCLURE.

701-714. Indication de ces exclusions. — Leur nécessité.....	539
715. Énoncé des théorèmes A, B, C.....	552

CHAPITRE VII. — INDÉPENDANCE DES GROUPES RESTANTS.

§ I. — Réduction du théorème A au théorème B.

	Pages.
716-717. Cas où \mathcal{L} n'est pas primitif.....	554
718. Cas où \mathcal{L} est primitif, et L non primitif.....	555
719-729. Cas où \mathcal{L} et L sont primitifs.....	557

§ II. — Démonstration du théorème B.

730-733. Les groupes formés d'après la méthode des n ^{os} 689-693 sont primaires et indécomposables.....	564
734-740. Solution d'un problème auxiliaire.....	569
741. Démonstration du théorème B si \mathcal{L} est décomposable.....	574
742-750. Cas où \mathcal{L} est indécomposable. — Son premier faisceau est contenu dans celui de L.....	575
751-759. Démonstration du théorème B (\mathcal{L} indécomposable).....	580

§ III. — Démonstration du théorème C.

760-767. Si le groupe L est construit par la méthode des n ^{os} 697-699, le groupe J qui s'en déduit sera primaire et indécomposable.....	588
768-773. Solution d'un problème auxiliaire.....	597
774-777. Théorème C (\mathcal{L} décomposable).....	602
778-791. Cas où \mathcal{L} est indécomposable. — Son premier faisceau est contenu dans celui de L.....	605
792-794. Théorème C (\mathcal{L} indécomposable de première catégorie).....	616
795-813. Théorème C (\mathcal{L} indécomposable de seconde catégorie).....	619
814-850. Théorème C (\mathcal{L} indécomposable de troisième catégorie).....	634
NOTES.....	663

