

Cours

Jean-Marie Monier

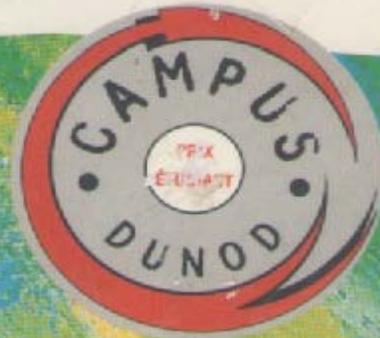
# Algèbre I

Cours et 600 exercices corrigés

1<sup>re</sup> année MPSI, PCSI, PTSI

2<sup>e</sup> édition

*L'intégrale*



DUNOD

# Table des matières

## Première partie – Cours

### Chapitre 1

#### Vocabulaire de la théorie des ensembles 3

##### 1.1 Ensembles 4

1.1.1 Éléments de logique 4

1.1.2 Ensembles 6

1.1.3 Inclusion  $\subset$  6

1.1.4 Opérations dans  $\mathfrak{P}(E)$  7

##### 1.2 Relations 11

1.2.1 Généralités 11

1.2.2 Relations d'équivalence 15

1.2.3 Relations d'ordre 18

##### 1.3 Applications 23

1.3.1 Définitions 23

1.3.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité 26

1.3.3 Restrictions et prolongements 30

1.3.4 Ordre et applications 31

1.3.5 Images directes ou réciproques de parties par une application 33

1.3.6 Familles 34

Complément aux exercices 37

### Chapitre 2

#### Structures algébriques 39

##### 2.1 Lois de composition interne 39

##### 2.2 Groupes 47

2.2.1 Généralités \* 47

2.2.2 Sous-groupes \* 49

2.2.3 Morphismes de groupes \* 53

##### 2.3 Anneaux 56

2.3.1 Définitions 56

2.3.2 Calculs dans un anneau 56

2.3.3 Sous-anneaux 59

2.3.4 Morphismes d'anneaux 60

2.3.5 Anneaux intègres 61

##### 2.4 Corps 62

Compléments aux exercices 64

**Chapitre 3****Nombres entiers, nombres rationnels**

69

<b>3.1</b>	Propriétés de $\mathbb{N}$	70
3.1.1	Structure de $\mathbb{N}$	70
3.1.2	Le principe de récurrence	70
3.1.3	Divisibilité dans $\mathbb{N}$	72
<b>3.2</b>	Ensembles finis, ensembles infinis	74
3.2.1	Equipotence	74
3.2.2	Ensembles finis	75
3.2.3	Ensembles infinis	78
<b>3.3</b>	Analyse combinatoire	80
3.3.1	Permutations	80
3.3.2	Arrangements	80
3.3.3	Combinaisons	81
<b>3.4</b>	Le groupe symétrique	86
3.4.1	Structure de $\mathcal{S}_n$	86
3.4.2	Transpositions	86
3.4.3	Cycles	90
<b>3.5</b>	Dénombrements	93
3.5.1	Dénombrements classiques	93
3.5.2	Exemples de dénombrements	93
<b>3.6</b>	Propriétés de $\mathbb{Z}$	96
<b>3.7</b>	Propriétés de $\mathbb{Q}$	98

**Chapitre 4****Arithmétique dans  $\mathbb{Z}$** 

101

<b>4.1</b>	Divisibilité	102
4.1.1	Généralités	102
4.1.2	Congruences	103
<b>4.2</b>	pgcd, ppcm	110
4.2.1	Généralités	110
4.2.2	Propriétés	110
4.2.3	Algorithme d'Euclide	113
<b>4.3</b>	Nombres premiers entre eux	116
4.3.1	Généralités	116
4.3.2	Théorème de Bezout	116
4.3.3	Propriétés	119
4.3.4	Applications	121

## Chapitre 5

<b>4.4</b>	Nombres premiers	125
4.4.1	Généralités	125
4.4.2	Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , $p$ premier	126
4.4.3	Décomposition primaire	127
	Compléments aux exercices	136

## Polynômes, fractions rationnelles 143

<b>5.1</b>	Algèbre $K[X]$	144
5.1.1	Définition	144
5.1.2	Addition	145
5.1.3	Multiplication	146
5.1.4	Loi externe	148
5.1.5	Composition	151
5.1.6	Dérivation	152
5.1.7	Fonctions polynomiales	153
5.1.8	Notion de polynôme à plusieurs indéterminées	157
<b>5.2</b>	Arithmétique dans $K[X]$	159
5.2.1	Divisibilité	159
5.2.2	Division euclidienne	160
5.2.3	Pgcd, ppcm	163
5.2.4	Polynômes premiers entre eux	168
5.2.5	Polynômes irréductibles	171
5.2.6	Division suivant les puissances croissantes	173
<b>5.3</b>	Zéros des polynômes	175
5.3.1	Généralités	175
5.3.2	Polynômes scindés	178
5.3.3	Utilisation de la dérivation	182
5.3.4	Cas de $\mathbb{C}[X]$	184
5.3.5	Cas de $\mathbb{R}[X]$	188
<b>5.4</b>	Fractions rationnelles	193
5.4.1	Corps $K(X)$	193
5.4.2	Décomposition en éléments simples	199

## Chapitre 6

<b>Espaces vectoriels</b>	<b>215</b>	
<b>6.1</b>	Structure d'espace vectoriel	216
<b>6.2</b>	Sous-espaces vectoriels	219
<b>6.3</b>	Dépendance et indépendance linéaires	224
6.3.1	Familles liées, familles libres	224
6.3.2	Sous-espace engendré par une partie	227
6.3.3	Somme de plusieurs sev	229
6.3.4	Familles génératrices, bases	233
<b>6.4</b>	Théorie de la dimension	234

## Chapitre 7

### Applications linéaires 245

<b>7.1</b>	Généralités	246
7.1.1	Définitions	246
7.1.2	Noyau, image	250
7.1.3	Applications linéaires et familles de vecteurs	251
<b>7.2</b>	Opérations sur les applications linéaires	255
7.2.1	L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$	255
7.2.2	Composition	255
7.2.3	Le groupe $\mathcal{GL}(E)$	260
<b>7.3</b>	Cas de la dimension finie	264
7.3.1	Le théorème du rang et ses conséquences	264
7.3.2	Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$	268
	Complément aux exercices	270

## Chapitre 8

### Matrices 271

<b>8.1</b>	Calcul matriciel	272
8.1.1	Notion de matrice	272
8.1.2	Matrices et applications linéaires	273
8.1.3	L'espace vectoriel $\mathbf{M}_{n,p}(K)$	274
8.1.4	Multiplication des matrices	276
8.1.5	Le groupe $\mathbf{GL}_n(K)$	282
8.1.6	Rang d'une matrice	286
8.1.7	Opérations élémentaires	289
8.1.8	Transposition	292
8.1.9	Trace d'une matrice carrée	294
<b>8.2</b>	Changement de bases	296
8.2.1	Matrices de passages	296
8.2.2	Changement de base pour un vecteur	297
8.2.3	Changement de bases pour une application linéaire	297
8.2.4	Changement de base pour un endomorphisme	301
<b>8.3</b>	Matrices remarquables	303
8.3.1	Matrices symétriques, matrices antisymétriques	303
8.3.2	Matrices triangulaires	305
8.3.3	Matrices diagonales	309
	Complément aux exercices	310

## Chapitre 9

### Déterminants, systèmes linéaires 311

<b>9.1</b>	Applications multilinéaires	312
9.1.1	Généralités	312
9.1.2	Applications multilinéaires alternées	313

<b>9.2</b>	Déterminant d'une famille de $n$ vecteurs dans une base d'un ev de dimension $n$	315
9.2.1	Espace $\Lambda_n(E)$	315
9.2.2	Propriétés	317
<b>9.3</b>	Déterminant d'un endomorphisme	318
<b>9.4</b>	Déterminant d'une matrice carrée	320
<b>9.5</b>	Développement par rapport à une rangée	323
9.5.1	Cofacteurs et mineurs	323
9.5.2	Comatrice	327
<b>9.6</b>	Calcul des déterminants	329
9.6.1	Déterminant d'une matrice triangulaire	329
9.6.2	Manipulation de lignes et de colonnes	329
9.6.3	Cas $n = 2, n = 3$	332
9.6.4	Déterminant de Vandermonde	333
<b>9.7</b>	Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie	337
<b>9.8</b>	Rang et sous-matrices	339
<b>9.9</b>	Systèmes affines	342
9.9.1	Position du problème	342
9.9.2	Résolution	343

## Chapitre 10

<b>10</b>	<b>Espaces vectoriels euclidiens (1<sup>re</sup> étude)</b>	<b>347</b>
<b>10.1</b>	Produit scalaire	348
10.1.1	Généralités	348
10.1.2	Inégalités, normes euclidiennes	350
10.1.3	Orthogonalité	353
<b>10.2</b>	Espaces vectoriels euclidiens	356
10.2.1	Procédé d'orthogonalisation de Schmidt	356
10.2.2	Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales	360
10.2.3	Hyperplans	362
<b>10.3</b>	Groupe orthogonal	364
10.3.1	Endomorphismes orthogonaux	364
10.3.2	Matrices orthogonales	366
<b>10.4</b>	Géométrie vectorielle euclidienne plane	370
<b>10.5</b>	Géométrie vectorielle euclidienne en dimension 3	375
10.5.1	Endomorphismes orthogonaux de $E_3$	375
10.5.2	Produit vectoriel	384
	Complément aux exercices	389

## Deuxième partie

### Indications et réponses des exercices

Chap. 1, 393 ; Chap. 2, 403 ; Chap. 3, 417 ; Chap. 4, 429 ; Chap. 5, 467 ;  
Chap. 6, 493 ; Chap. 7, 501 ; Chap. 8, 513 ; Chap. 9, 525 ; Chap. 10, 535.

Index des notations 547

Index alphabétique 549