

SCIENCES SUP

$$bx + c$$



*Cours et exercices corrigés*

# TOUTE L'ALGÈBRE DU 1<sup>ER</sup> CYCLE



*Jean-Pierre Escofier*

DUNOD

1.1	Sommes et produits de fonctions	1
1.2	Équations différentielles linéaires sans second membre	4
1.3	Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants	4
1.4	Combinaisons linéaires et espace engendré	7
1.5	Solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre	7
1.6	Résultats pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre	8
	Exercices	10
	Solutions	11

## Table des matières

### AVANT-PROPOS

### CHAPITRE 1 • ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

1.1	Sommes et produits de fonctions	1
1.2	Équations différentielles linéaires sans second membre	4
1.3	Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants	4
1.4	Combinaisons linéaires et espace engendré	7
1.5	Solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre	7
1.6	Résultats pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre	8
	Exercices	10
	Solutions	11

### CHAPITRE 2 • SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES

2.1	Sommes et produits de suites	15
2.2	Suites satisfaisant une relation de récurrence linéaire	16
2.3	Suites satisfaisant $u_n + au_{n-1} + bu_{n-2} = 0$	17
2.4	Un peu d'histoire	19
2.5	Étude de la suite de Fibonacci	20
	Exercices	21
	Solutions	22

### CHAPITRE 3 • L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$

3.1	Introduction de la géométrie à $n$ dimensions	25
3.2	Famille d'éléments, suites finies, $n$ -uplets	29
3.3	Définition de $\mathbb{R}^n$	29
3.4	Combinaisons linéaires et espace engendré	30

3.5	Base canonique de $\mathbb{R}^n$	33
3.6	Familles triangulaires et échelonnées	34
3.7	La droite vectorielle $\mathbb{R}$	35
3.8	Espaces engendrés dans $\mathbb{R}^2$	36
3.9	Espaces engendrés dans $\mathbb{R}^3$	38
3.10	Algorithme du pivot de Gauss dans $\mathbb{R}^n$	40
	Exercices	44
	Solutions	46
<b>CHAPITRE 4 • SYSTÈMES LINÉAIRES</b>		
4.1	Histoire ancienne	53
4.2	Leibniz, Cramer, Gauss	55
4.3	Systèmes linéaires	56
4.4	Exemples de résolution	56
4.5	Systèmes équivalents	58
4.6	Systèmes triangulaires et échelonnés	59
4.7	Méthode du pivot de Gauss	60
4.8	Exemples	64
4.9	Systèmes avec paramètres	66
4.10	Problèmes actuels	67
	Exercices	69
	Solutions	71
<b>CHAPITRE 5 • GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES VECTORIELS</b>		
5.1	Introduction	73
5.2	Un peu d'histoire	74
5.3	Structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel	75
5.4	Exemples fondamentaux	77
5.5	Précisions sur les corps	78
5.6	Sous-espaces vectoriels	79
5.7	Exemples de sous-espaces vectoriels	80
5.8	Combinaisons linéaires et espace engendré	81
5.9	Somme de sous-espaces	83
	Exercices	84
	Solutions	86
<b>CHAPITRE 6 • BASES ET DIMENSION</b>		
6.1	Introduction	89
6.2	Famille génératrice	89
6.3	Famille libre	90
6.4	Base d'un espace vectoriel	92
6.5	Dimension	94

6.6	Exemples de bases	96
6.7	Retour au rang	98
	Exercices	99
	Solutions	104
<b>CHAPITRE 7 • APPLICATIONS LINÉAIRES</b>		
7.1	Naissance du concept	111
7.2	Applications linéaires	112
7.3	Exemples	113
7.4	Propriété universelle	116
7.5	Noyau d'une application linéaire	117
7.6	Image d'une application linéaire	118
7.7	Le théorème du rang ou des dimensions	120
7.8	Résolution d'une équation linéaire	120
7.9	Résolution d'un système linéaire	121
7.10	Isomorphismes	123
	Exercices	125
	Solutions	129
<b>CHAPITRE 8 • MATRICES</b>		
8.1	Matrice d'une application linéaire	133
8.2	Matrices et applications linéaires	136
8.3	Un peu d'histoire	137
8.4	Matrices particulières	139
8.5	Exemples	141
8.6	Matrice de la composée	142
8.7	Propriétés du produit	145
8.8	Calcul de l'inverse d'une matrice	146
8.9	Changement de base	149
8.10	Rang et trace	154
8.11	Calculs avec Maple	155
	Exercices	156
	Solutions	159
<b>CHAPITRE 9 • SOMMES DIRECTES, PRODUITS, QUOTIENTS</b>		
9.1	Exemples	165
9.2	Décomposition en somme directe	166
9.3	Sommes directes finies	167
9.4	Produit de deux espaces vectoriels	168
9.5	Projecteurs	171
9.6	Espaces vectoriels quotients	172
	Exercices	174
	Solutions	176

## CHAPITRE 10 • DUALITÉ

10.1	Introduction	179
10.2	Formes linéaires et hyperplans	180
10.3	Base duale	182
10.4	Orthogonal d'un sous-espace	183
10.5	Transposée d'une application linéaire	185
	Exercices	187
	Solutions	189

## CHAPITRE 11 • GROUPES

11.1	Introduction	193
11.2	Généralités	194
11.3	Exemples	196
11.4	Sous-groupes	197
11.5	Homomorphismes de groupes	199
11.6	Étude des groupes de permutation	201
11.7	Signature d'une permutation	204
11.8	Groupe linéaire	206
11.9	Centre du groupe linéaire	207
11.10	Générateurs du groupe linéaire	208
	Exercices	209
	Solutions	211

## CHAPITRE 12 • ARITHMÉTIQUE, ANNEAUX

12.1	Introduction	215
12.2	Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$	215
12.3	Congruence modulo $n$ , définition de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$	216
12.4	Addition et multiplication dans $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$	218
12.5	Structures d'anneau commutatif unitaire et de corps	219
12.6	Homomorphismes d'anneaux	221
12.7	Utilisations des congruences	221
12.8	Éléments inversibles	222
12.9	Idéal	223
12.10	Sous-groupes, idéaux de $\mathbb{Z}$	223
12.11	Divisibilité, nombres premiers	224
12.12	Pgcd, ppcm, nombres premiers entre eux	225
12.13	Les corps $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$	230
12.14	Cryptographie	231
	Exercices	232
	Solutions	235

## CHAPITRE 13 • POLYNÔMES

13.1	Introduction	241
13.2	Polynômes sur un corps $K$	242
13.3	Degré, division euclidienne	244
13.4	Pgcd de polynômes	246
13.5	Racines d'un polynôme	248
13.6	Dérivation	250
13.7	Éléments irréductibles	253
13.8	La structure de $K$ -algèbre de $K[X]$	254
	Exercices	256
	Solutions	259

## CHAPITRE 14 • DÉTERMINANTS

14.1	Introduction historique	265
14.2	Calcul des déterminants : méthode de Bézout	270
14.3	Le caractère alterné	272
14.4	Multilinéarité	274
14.5	Formules et calculs	277
14.6	Déterminant d'un endomorphisme	280
14.7	Déterminant d'une matrice carrée	282
14.8	Retour sur le rang	284
14.9	Déterminant et volume	285
14.10	Déterminant et orientation	287
	Exercices	288
	Solutions	292

## CHAPITRE 15 • AUTOUR DE LA DIAGONALISATION

15.1	Introduction	297
15.2	Étude du problème	298
15.3	Définitions	299
15.4	Exemple	300
15.5	Condition suffisante de diagonalisabilité	301
15.6	Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité	302
15.7	Changement de corps de base	306
15.8	Seconde condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité	307
15.9	Triangularisation	309
15.10	Théorème de Hamilton-Cayley	311
15.11	Quelques applications	312
	Exercices	317
	Solutions	319

