

l'intégrale

Jean-Marie Monier

Algèbre PC-PSI-PT

Cours
et 300 exercices
corrigés

**NOUVEAU
PROGRAMME**

4^e édition

DUNOD

Table des matières

Première partie – Cours

Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire 3

1.1 Bases, sommes directes 4

1.2 Applications linéaires 8

1.3 Dualité 11

1.3.1 Généralités 11

1.3.2 Hyperplans 12

1.3.3 Bases duales 14

1.4 Calcul matriciel 19

1.4.1 Trace 19

1.4.2 Blocs 22

Chapitre 2

Déterminants 31

2.1 Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n 32

2.1.1 Structure de 32

2.1.2 Transpositions 32

2.1.3 Cycles 36

2.2 Applications multilinéaires 38

2.2.1 Généralités 38

2.2.2 Applications multilinéaires alternées 39

2.3 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans
une base d'un ev de dimension n 40

2.3.1 Espace $\Lambda_n(E)$ 40

2.3.2 Propriétés 42

2.4 Déterminant d'un endomorphisme 43

2.5 Déterminant d'une matrice carrée 45

2.6 Développement par rapport à une rangée 48

Chapitre 3

| | | |
|-------------|--|-----------|
| 2.6.1 | Cofacteurs et mineurs | 48 |
| 2.6.2 | Comatrice | 52 |
| 2.7 | Calcul des déterminants | 55 |
| 2.7.1 | Déterminant d'une matrice triangulaire | 55 |
| 2.7.2 | Manipulation de lignes et de colonnes | 55 |
| 2.7.3 | Cas $n = 2, n = 3$ | 58 |
| 2.7.4 | Supplément : Déterminant de Vandermonde | 59 |
| 2.7.5 | Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs | 61 |
| 2.8 | Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie | 64 |
| 2.9 | Supplément : Rang et sous-matrices | 66 |
| 2.10 | Systèmes affines | 69 |
| 2.10.1 | Position du problème | 69 |
| 2.10.2 | Résolution dans le cas d'un système de Cramer | 70 |

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées **73**

| | | |
|------------|--|------------|
| 3.1 | Éléments propres | 74 |
| 3.2 | Polynôme caractéristique | 79 |
| 3.3 | Diagonalisabilité | 84 |
| 3.4 | Trigonalisation | 93 |
| 3.5 | Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices | 102 |
| 3.6 | Applications de la réduction | 113 |
| 3.6.1 | Calcul des puissances d'une matrice carrée | 113 |
| 3.6.2 | Suites récurrentes linéaires simultanées du 1er ordre à coefficients constants | 117 |
| 3.6.3 | Suites récurrentes linéaires à coefficients constants | 118 |
| | Compléments aux exercices | 121 |

Chapitre 4

| | | |
|------------|---|------------|
| 4.1 | Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques | 126 |
| 4.1.1 | Généralités | 126 |
| 4.1.2 | Interprétation matricielle | 128 |
| 4.2 | Rappels sur les espaces préhilbertiens réels et les espaces euclidiens | 132 |
| 4.2.1 | Produit scalaire | 132 |
| 4.2.2 | Orthogonalité | 136 |
| 4.3 | Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien | 139 |

Chapitre 5

| | | |
|------------|---|------------|
| 4.3.1 | Endomorphismes symétriques | 139 |
| 4.3.2 | Endomorphismes orthogonaux | 143 |
| 4.4 | Réduction des matrices symétriques réelles | 148 |
| 4.4.1 | Théorème fondamental | 148 |
| 4.4.2 | Réduction simultanée | 151 |
| 4.4.3 | Formes quadratiques positives, définies-positives | 152 |
| 4.5 | Adjoint | 158 |
| 4.5.1 | Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien | 158 |
| 4.5.2 | Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien | 161 |
| | Complément aux exercices | 167 |
| | Espaces préhilbertiens complexes | 169 |
| 5.1 | Formes sesquilineaires | 170 |
| 5.2 | Espaces préhilbertiens complexes et espaces hermitiens | 173 |
| 5.2.1 | Produit scalaire hermitien | 173 |
| 5.2.2 | Orthogonalité | 177 |

Seconde partie

Indications et réponses des exercices

Chap. 1, 185 ; Chap. 2, 195 ; Chap. 3, 207 ; Chap. 4, 241 ; Chap. 5, 271.

Index des notations 277

Index alphabétique 279