



# NOMBRES FINIS & NOMBRES TRANSFINIS

CORINA REISCHER  
RÉAL GÉLINAS  
ANDRÉ PARADIS



Presses  
de l'Université  
du Québec

# Table des matières

Introduction	v
Liste de notations	ix
Alphabet Grec	xiii
<b>I Nombres finis</b>	<b>1</b>
<b>1 Définition axiomatique des nombres naturels</b>	<b>3</b>
1.1 L'axiomatique de Peano	3
1.2 La structure algébrique de $\mathbb{N}$	6
1.3 La structure d'ordre de $\mathbb{N}$	15
1.4 L'unicité de $\mathbb{N}$	19
1.5 L'indépendance des axiomes de Peano	23
1.6 Exercices	24
<b>2 Construction des nombres entiers</b>	<b>27</b>
2.1 Définition de l'ensemble $\mathbb{Z}$	27
2.2 La structure algébrique de $\mathbb{Z}$	31
2.3 La structure d'ordre de $\mathbb{Z}$	35
2.4 Exercices	36
<b>3 Construction des nombres rationnels</b>	<b>39</b>
3.1 Définition de l'ensemble $\mathbb{Q}$	39
3.2 La structure algébrique de $\mathbb{Q}$	44
3.3 La structure d'ordre de $\mathbb{Q}$	47
3.4 Exercices	52

<b>4</b>	<b>Construction des nombres réels</b>	<b>55</b>
4.1	Suites de nombres rationnels	55
4.2	Suites fondamentales de nombres rationnels	59
4.3	Suites convergentes de nombres rationnels	63
4.4	Définition de l'ensemble $\mathbb{R}$	69
4.5	La structure algébrique de $\mathbb{R}$	74
4.6	La structure d'ordre de $\mathbb{R}$	78
4.7	Suites de nombres réels	83
4.8	Exercices	84
<b>5</b>	<b>Construction des nombres complexes</b>	<b>89</b>
5.1	Définition de l'ensemble $\mathbb{C}$	89
5.2	La structure algébrique de $\mathbb{C}$	90
5.3	Exercices	95
<b>II</b>	<b>Nombres transfinis</b>	<b>97</b>
<b>6</b>	<b>Construction des nombres cardinaux</b>	<b>99</b>
6.1	Définition de la classe $CARD$	99
6.2	La structure algébrique de $CARD$	105
6.3	La structure d'ordre de $CARD$	113
6.4	Étude de quelques cardinaux transfinis	119
6.5	Exercices	129
<b>7</b>	<b>Construction des nombres ordinaux</b>	<b>131</b>
7.1	Définition de la classe $TYPEORD$	131
7.2	La structure algébrique de $TYPEORD$	138
7.3	Définition de la classe $ORD$	148
7.4	La structure algébrique de $ORD$	152
7.5	La structure d'ordre de $ORD$	156
7.6	Théorème de bon ordre	172
7.7	$CARD$ et le théorème de bon ordre	182
7.8	Exercices	187
<b>A</b>	<b>Structures algébriques</b>	<b>191</b>
A.1	Opérations	191
A.2	Structures algébriques avec une seule opération	193

**Table des matières**

iii

A.3 Structures algébriques avec deux opérations	193
A.4 Correspondances des structures algébriques	194
<b>B Relations binaires</b>	<b>195</b>
B.1 Définitions et propriétés	195
B.2 Relation d'équivalence	196
B.3 Équivalences compatibles avec une opération	197
B.4 Relation d'ordre	199
<b>Solutions des exercices</b>	<b>201</b>
1. Solutions – Chapitre 1	201
2. Solutions – Chapitre 2	212
3. Solutions – Chapitre 3	216
4. Solutions – Chapitre 4	222
5. Solutions – Chapitre 5	242
6. Solutions – Chapitre 6	245
7. Solutions – Chapitre 7	250
<b>Bibliographie</b>	<b>259</b>
<b>Index</b>	<b>263</b>

**De** tout temps les nombres ont fasciné l'Homme, que ce soit pour dénombrer des objets du quotidien, pour témoigner du comportement de phénomènes physiques ou pour servir d'assise à des théories mathématiques. À travers les siècles, les différents systèmes de nombres ont fait l'objet de nombreuses recherches, qui ont permis de les définir, de les construire et d'en étudier toutes les propriétés. Aujourd'hui, leur étude fait partie intégrante du curriculum de tout programme de baccalauréat en mathématiques ou en enseignement des mathématiques.

Ce volume est unique en ce qu'il est exclusivement consacré à la définition et à la construction formelle des différents systèmes de nombres, selon une approche uniforme. En utilisant l'axiomatique de Peano, les nombres naturels sont d'abord définis. Ensuite, les nombres entiers, rationnels, réels et complexes sont systématiquement construits. Finalement, en utilisant la méthode classique de Cantor, les nombres cardinaux et ordinaux sont présentés.

Ce volume s'adresse principalement aux étudiantes et aux étudiants en mathématiques et en enseignement des mathématiques. Pour leur permettre de vérifier leur compréhension des notions, souvent abstraites, qui sont abordées, nous proposons à la fin de chaque chapitre de nombreux exercices. Nous présentons des solutions pour tous les exercices à la fin du volume. Nous estimons que l'apprentissage et la maîtrise des concepts, des structures et des propriétés qui sont nécessaires à la construction des systèmes de nombres passent obligatoirement par la résolution de problèmes et la rédaction détaillée et rigoureuse de solutions.

**CORINA REISCHER**, Ph. D. en mathématiques, est professeure au Département de mathématiques et d'informatique de l'Université du Québec à Trois-Rivières.

**RÉAL GÉLINAS**, Ph. D. en mathématiques, est professeur au Département de mathématiques et d'informatique de l'Université du Québec à Trois-Rivières.

**ANDRÉ PARADIS**, Ph. D. en mathématiques et M. Sc. en informatique, est vice-recteur associé aux services académiques et aux technologies de l'Université du Québec à Trois-Rivières.

