
Approximation polynomiale des problèmes NP-difficiles

optima locaux et rapport différentiel

Jérôme Monnot
Vangelis T. Paschos
Sophie Toulouse

Hermès

Lavoisier

Table des matières

Avant-propos	9
Chapitre 1. Introduction	17
Chapitre 2. L'approximation polynomiale	21
2.1. Les problèmes	21
2.1.1. Qu'est-ce qu'un problème de NPO ?	21
2.1.2. Définitions indispensables	23
2.2. Leur résolution	23
2.2.1. La mission de l'approximation polynomiale	26
2.2.2. Son arme	27
2.3. L'évaluation de leurs algorithmes	27
2.3.1. Fer de lance de l'approximation polynomiale : le rapport classique	27
2.3.2. Une alternative : le rapport différentiel	28
2.3.3. L'erreur	29
2.4. Degrés d'approximation	30
2.4.1. Approximation à rapport constant r_0	30
2.4.2. Approximation à r , r aussi proche de 1 que l'on veut	32
2.5. Définition logique	35
2.5.1. Les classes MaxNP et MaxSNP	36
2.5.2. Logique et approximation	38
2.6. Effets de classe	41
2.6.1. Le principe de réduction	41
2.6.1.1. Réduction polynomiale	41
2.6.1.2. Réduction préservant l'optimalité	42
2.6.1.3. Réduction préservant l'approximation	43
2.6.2. La notion de complétude	46
2.6.3. La fermeture	47

2.7. Affinité entre problèmes	47
2.7.1. Réductions continues	47
2.7.2. Réductions affines	50
2.8. Voyageur de commerce et affinité	54
2.8.1. Le cas métrique	55
2.8.2. Ses cousins	55
2.8.3. Le cas bivalué	56
2.8.4. Le cas général	57
2.9. Conclusion	58
Chapitre 3. Optimum local garanti	61
3.1. Quelques concepts	61
3.1.1. Qu'est-ce qu'un algorithme de recherche locale?	61
3.1.1.1. LSA – algorithme de recherche locale	62
3.1.1.2. Complexité d'un LSA	63
3.1.1.3. Conditions nécessaires et conditions suffisantes de polynomialité	63
3.1.2. Voisinages h -bornés	65
3.2. Les classes GLO[R]	68
3.3. Exemples simples pour voisinages 1-bornés	69
3.4. Limite des voisinages h -bornés	72
3.5. Réductions préservant l'approximation locale	73
3.5.1. Préserver le voisinage	74
3.5.1.1. La LOC-réduction	74
3.5.1.2. La LOC'-réduction	77
3.5.2. La réduction dans GLO[R]	79
3.5.3. Exemples	80
3.6. GLO et associés première partie	82
3.6.1. Voisinages miroirs et classe CGLO[R]	82
3.6.2. Optima altérés et GGLO[R]	84
3.6.3. Mixage ou GCGLO[R]	84
Chapitre 4. Problèmes dans GLO et GLO[δ]	85
4.1. Des voisinages 1- et 2-bornés	85
4.1.1. Couverture d'ensembles	88
4.1.2. Ensemble minimum d'arêtes retour	92
4.1.3. Couplage maximum dans un hypergraphe	93
4.1.4. Les problèmes d'ordonnancement	94
4.1.5. Le problème de sous-graphe partiel maximum libre de H_0	95
4.1.6. Ensemble minimum de sommets retour	98
4.2. Exemples pour les voisinages 3-bornés et plus	99
4.2.1. Retour sur le problème de sous-graphe partiel maximum libre de H_0	99

4.2.2. Le voyageur de commerce et le voisinage 2-opt	104
4.3. Résultats négatifs	107
4.3.1. Satisfaisabilité maximum	107
4.3.2. Le sac-à-dos	108
4.4. Où les classes GLO[R] se situent-elles ?	110
4.4.1. GLO[R] et les classes d'approximation	110
4.4.2. GLO[R] et les classes logiques	115
4.4.3. Quelle unité dans tout ça ?	117
4.5. Conclusion	117
Chapitre 5. Les problèmes de satisfaisabilité	121
5.1. Les problèmes de satisfaisabilité entre eux	121
5.1.1. Présentation	121
5.1.2. Tous pour un	124
5.2. GLO et associés deuxième partie	126
5.3. Déclinaison des problèmes de satisfaisabilité maximum en GLO	128
5.3.1. Une opposition de plus entre rapports classique et différentiel	128
5.3.2. MaxSat et CGLO	129
5.3.3. Max k -Sat et GLO	129
5.3.4. Max k -Sat et CGLO	131
5.3.5. MaxNAE k -Sat et GLO	132
5.3.6. Max k -Sat et GCGLO	133
5.4. Les problèmes de satisfaction de contraintes conjonctives	134
5.4.1. Un problème difficile	134
5.4.2. Vers le 1/4 différentiel	138
5.4.3. Approximation à 1/3	141
5.5. Limites de l'approche GLO	142
5.5.1. 1/3, le meilleur de CGLO pour Max2-CCSP	142
5.5.2. 1/5, le meilleur espoir de CGLO[δ] pour Max2-CCSP	145
5.5.3. 1/2, le meilleur de GLO pour MaxNAE2-Sat	146
5.5.4. 1/3, le meilleur espoir de GLO[δ] pour MaxNAE2-Sat	147
5.6. Conclusion	148
Chapitre 6. Réductions	149
6.1. Dans les graphes et les hypergraphes (systèmes d'ensembles)	149
6.1.1. Régularisation pour la couverture d'ensembles	150
6.1.2. Dépondération pour la couverture d'ensembles	151
6.1.3. Dépondération pour la couverture de sommets	154
6.1.4. Autres problèmes simples dans les graphes	156
6.2. Les problèmes de logique	157
6.2.1. Autour de MinEQ	157
6.2.2. Autour de MaxNAESat	161
6.2.3. Dense ou pas dense ?	164

6.3. Conclusion	170
6.3.1. Un certain goût d'inachevé	170
6.3.2. Synthèse	170
Chapitre 7. En-deçà de GLO	173
7.1. La classe PLS des problèmes de recherche locale	173
7.1.1. De la difficulté de détermination des optima locaux	174
7.1.1.1. Quelques notions indispensables	174
7.1.1.2. Le graphe de transition	175
7.1.2. Approximation des optima locaux	177
7.2. Les problèmes radiaux	178
7.2.1. Qu'est-ce que radial ?	179
7.2.2. Les problèmes τ -radiaux	182
7.2.2.1. Définition et exemples	183
7.2.2.2. Problèmes τ -radiaux et optima locaux	185
7.2.3. Une sous-famille remarquable	186
7.2.3.1. Les problèmes réguliers	186
7.2.3.2. Les problèmes héréditaires et anti-héréditaires	188
7.2.3.3. Les problèmes de partitionnement héréditaire	190
7.3. Conclusion	190
Annexes	191
A. Problèmes rencontrés	191
A.1. Problèmes dans les graphes	192
A.2. Problèmes de programmation linéaire	197
A.3. Problèmes de logique	198
A.4. Autres problèmes	201
B. Définitions	203
B.1. Les fondements	203
B.2. Les classes	205
B.2.1. Classes d'approximation	205
B.2.2. Classes définies par la logique	205
B.2.3. Classes d'approximation locale	206
B.3. Réductions	207
B.3.1. Propriétés remarquables	207
B.3.2. Réductions remarquables	208
B.4. Localité	210
B.5. Problèmes particuliers	210
Bibliographie	213
Index	219

Cet ouvrage traite les problèmes courants de recherche opérationnelle et d'informatique fondamentale tels le problème du voyageur de commerce, l'ordonnancement, la stabilité, la satisfaisabilité optimale, etc., sous le double angle de l'approximation polynomiale et de l'optimalité locale.

Les optima locaux constituent un outil souvent utilisé pour aborder ces problèmes : s'il n'est pas raisonnable d'envisager qu'une solution soit la meilleure parmi toutes les solutions possibles, il est en revanche souvent intéressant d'assurer qu'elle le soit dans un espace de solutions voisines. Cette approche est notamment exploitée par les métaheuristiques ou même par les méthodes basées sur la séparation et l'évaluation ; l'objet de ce livre est de l'exploiter pour l'approximation polynomiale.

Ainsi, notre approche se pose en termes de classification des problèmes vis-à-vis du bon comportement de leurs optima locaux plutôt qu'en termes de conception d'algorithmes dédiés ou de détermination d'optima locaux particuliers : on cherche à déterminer quels sont les problèmes qui ont de bonnes solutions pour l'optimalité locale, pour une structure particulière de voisinage.

Approximation polynomiale des problèmes NP-difficiles s'adresse aux chercheurs en optimisation combinatoire, ainsi qu'aux chercheurs en recherche opérationnelle en général ; il intéressera également toute personne confrontée aux applications de l'optimisation.

Les auteurs

Jérôme Monnot est chercheur CNRS au LAMSADE (Université Paris-Dauphine). Vangelis T. Paschos est professeur d'informatique et directeur du LAMSADE. Sophie Toulouse est docteur en informatique de l'université Paris-Dauphine et chercheur associé au LAMSADE.

hermes
Science
PARIS DAUPHINE

www.hermes-science.com

ISBN 2-7462-0597-1

