

INFORMATIQUE
ET SYSTÈMES
D'INFORMATION

Information - Commande - Communication

Optimisation combinatoire 1

concepts fondamentaux

sous la direction de
Vangelis Th. Paschos

Hermès

Lavoisier

Table des matières

Avant-propos	17
Vangelis Th. PASCHOS	
PREMIERE PARTIE. SUR LA COMPLEXITÉ DES PROBLÈMES D'OPTIMISATION COMBINATOIRE	21
Chapitre 1. Concepts de base de l'algorithmique et de la théorie de la complexité	23
Vangelis Th. PASCHOS	
1.1. La complexité des algorithmes	23
1.2. La complexité des problèmes	24
1.3. Les classes P , NP et NPO	27
1.4. Les réductions de Karp et de Turing	29
1.5. La NP -complétude	31
1.6. Deux exemples de problèmes NP-complets	34
1.6.1. MIN G-TRANSVERSAL	34
1.6.2. MAX STABLE	36
1.7. Quelques mots sur la NP -complétude aux sens fort et faible	37
1.8. Quelques autres classes de complexité notoires	38
1.9. Bibliographie	40
Chapitre 2. Complexité probabiliste	43
Jérémy BARBAY	
2.1. Algorithmes déterministes et probabilistes	44
2.1.1. Complexité d'un algorithme de Las Vegas	46
2.1.2. Complexité probabiliste d'un problème	48
2.2. Technique de borne inférieure	50
2.2.1. Définitions et notations	51

2.2.2. Théorème du Minimax	52
2.2.3. Lemme de Loomis et principe de Yao	55
2.3. Problème élémentaire d'intersection	57
2.3.1. Borne supérieure	57
2.3.2. Borne inférieure	58
2.3.3. Complexité probabiliste	59
2.4. Conclusion	59
2.5. Bibliographie	59

DEUXIÈME PARTIE. QUELQUES MÉTHODES CLASSIQUES DE RÉSOLUTION

Chapitre 3. Méthodes arborescentes par séparation et évaluation (*Branch and bound*)

Irène CHARON, Olivier HUDRY

3.1. Introduction	63
3.2. Principes des méthodes arborescentes	65
3.2.1. Principe de séparation	66
3.2.2. Principes d'élagage	68
3.2.2.1. Borne	68
3.2.2.2. Fonction d'évaluation	69
3.2.2.3. Utilisation de la borne et de la fonction d'évaluation pour élaguer	72
3.2.2.4. Autres principes d'élagage	72
3.2.2.5. Ordre des élagages	73
3.2.3. Développement de l'arborescence	74
3.2.3.1. Description des stratégies de développement	74
3.2.3.2. Propriétés comparées des stratégies en profondeur et de la meilleure feuille	75
3.3. Un exemple détaillé : le problème du sac à dos binaire	77
3.3.1. Calcul de la borne initiale	78
3.3.2. Premier principe de séparation	80
3.3.3. Élagage sans évaluation	81
3.3.4. Évaluation	83
3.3.5. Déroulement complet de la méthode arborescente pour la recherche d'une seule solution optimale	84
3.3.6. Première variante : recherche de toutes les solutions optimales	86
3.3.7. Deuxième variante : stratégie de développement de type « meilleure feuille »	87
3.3.8. Troisième variante : second principe de séparation	88
3.4. Conclusion	90
3.5. Bibliographie	91

Chapitre 4. Programmation dynamique	95
Bruno ESCOFFIER, Olivier SPANJAARD	
4.1. Introduction	95
4.2. Un premier exemple : le franchissement du pont	96
4.3. Formalisation	100
4.3.1. Espace d'états, ensemble des décisions, fonction de transition	100
4.3.2. Politiques réalisables, relation de comparaison et objectif	101
4.4. Quelques autres exemples	103
4.4.1. Gestion de stocks	103
4.4.2. Plus court chemin <i>bottleneck</i> dans un graphe	105
4.4.3. Problème du sac à dos	107
4.5. Résolution	108
4.5.1. Procédure avant	108
4.5.2. Procédure arrière	110
4.5.3. Principe d'optimalité et monotonie	111
4.6. Résolution des exemples	113
4.6.1. Gestion de stocks	113
4.6.2. Plus court chemin <i>bottleneck</i>	113
4.6.3. Sac à dos	114
4.7. Quelques extensions	114
4.7.1. Ordre partiel et optimisation multicritère	115
4.7.1.1. Nouvelle formulation du problème	115
4.7.1.2. Résolution	117
4.7.1.3. Exemples	117
4.7.2. Programmation dynamique dans l'incertain	118
4.7.2.1. Processus décision-hasard	119
4.7.2.2. Résolution	119
4.7.2.3. Exemple	120
4.7.3. Programmation dynamique généralisée	120
4.8. Conclusion	123
4.9. Bibliographie	123
TROISIÈME PARTIE. ÉLÉMENTS DE LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE	125
Chapitre 5. Modélisation de problèmes d'optimisation combinatoire à l'aide de la programmation linéaire mixte entière	127
Federico DELLA CROCE (traduit en français par Dominique QUADRI)	
5.1. Introduction	127
5.1.1. Préliminaires	128
5.1.2. Le problème du sac à dos	129
5.1.3. Le problème du remplissage des boîtes (<i>bin packing</i>)	129

5.1.4. Le problème de couverture et de partition d'ensemble	130
5.1.5. Le problème de flot de coût minimum	131
5.1.6. Le problème du flot maximum	132
5.1.7. Le problème de transport	133
5.1.8. Le problème d'affectation	134
5.1.9. Le problème du plus court chemin	135
5.2. Techniques générales de modélisation	135
5.2.1. Les modèles min/max, max/min, min/abs	136
5.2.2. Prise en compte de conditions logiques	137
5.2.2.1. Les contraintes de type « d'une à plusieurs »	137
5.2.2.2. Les contraintes de « charge fixe »	137
5.2.2.3. Les contraintes de type « grand-M »	138
5.2.2.4. Les contraintes « soit-soit »	139
5.2.2.5. Linéarisation de termes quadratiques	140
5.3. Des modèles en PLME moins classiques	140
5.3.1. Modèles de localisation	141
5.3.1.1. Le problème de la p-médiane	141
5.3.1.2. Le problème du p-centre	142
5.3.2. Modèles de graphes et de réseaux	144
5.3.2.1. Le problème de la clique maximum	144
5.3.2.2. Le problème de coloration de graphe	145
5.3.2.3. Le problème de l'arbre couvrant minimum	145
5.3.2.4. Le problème de voyageur de commerce	147
5.3.2.5. Le problème de flot dans un réseau de biens multiples	149
5.3.3. Modèles d'ordonnancement	151
5.3.3.1. Le problème du <i>job shop</i>	151
5.3.3.2. Le problème à une machine : la formulation <i>time-indexed</i>	154
5.3.3.3. Le problème à une machine avec une fonction de coût de retard d'exécution	155
5.4. Conclusion	156
5.5. Bibliographie	156

Chapitre 6. Un tour d'horizon de quelques méthodes de programmation linéaire

Pierre TOLLA

6.1. Introduction	159
6.2. La méthode du simplexe de Dantzig	160
6.2.1. Programme linéaire standard et principaux résultats	160
6.2.2. Principe de la méthode du simplexe	162
6.2.3. Mise du problème sous forme canonique	162
6.2.4. Critère d'arrêt, heuristique et pivotage	162
6.3. La dualité	164

6.4. L'algorithme de Khachiyan	164
6.5. Les méthodes intérieures	167
6.5.1. L'algorithme projectif de Karmarkar	167
6.5.1.1. L'algorithme	167
6.5.1.2. Principe de la méthode	168
6.5.2. Les méthodes primales-duales et les méthodes prédictrices correctrices	171
6.5.2.1. Les outils théoriques	171
6.5.2.2. Construction d'une méthode générique de résolution	175
6.5.2.3. Principe de la méthode de Newton-Raphson	176
6.5.2.4. Résolution	177
6.5.2.5. Méthode de Newton-Raphson flexible	178
6.5.2.6. Modèle d'algorithme de point intérieur générique	179
6.5.2.7. Performances de l'algorithme générique	180
6.5.2.8. Recherche d'une solution réalisable	182
6.5.2.9. Réduction du nombre d'itérations d'une méthode primale-duale	182
6.5.3. Méthode prédictrice-correctrice de Merhota	183
6.5.3.1. Problème traité	183
6.5.3.2. Application du principe de fonction barrière logarithmique	183
6.5.3.3. Calcul des directions d'accélération de la méthode de Newton-Raphson	185
6.5.3.4. Calcul du saut de dualité	185
6.5.3.5. Détermination du poids μ de la fonction barrière logarithmique	186
6.5.3.6. Calcul des termes correcteurs	186
6.6. Conclusion	187
6.7. Bibliographie	188
Chapitre 7. Optimisation quadratique en variables 0-1	191
Alain BILLIONNET	
7.1. Introduction	191
7.2. Fonction pseudo-booléenne et fonction d'ensemble	192
7.3. Formalisation à l'aide des fonctions pseudo-booléennes	193
7.4. Les fonctions pseudo-booléennes quadratiques (fpbq)	194
7.5. Optimum entier et optimum continu des fpbq	196
7.6. Dérandomisation	197
7.7. Posiformes et posiformes quadratiques	198
7.7.1. Maximisation des posiformes et stabilité dans un graphe	198
7.7.2. Graphe d'implication associé à une posiforme quadratique	199

7.8. Optimisation d'une fpbq : cas particuliers et cas polynomiaux	200
7.8.1. La maximisation des fonctions négatives-positives	200
7.8.2. La maximisation des fonctions associées à des k-arbres	201
7.8.3. Maximisation d'une posiforme quadratique dont les termes sont associés à deux arcs consécutifs d'un multigraphe orienté	201
7.8.4. Fonctions pseudo-booléennes quadratiques égales au produit de deux fonctions linéaires	201
7.9. Réductions, relaxations, linéarisations, calculs de bornes et persistance	202
7.9.1. Complémentation	202
7.9.2. Linéarisation	203
7.9.3. Dualité lagrangienne	204
7.9.4. Une autre linéarisation	205
7.9.5. Relaxation quadratique convexe	205
7.9.6. Relaxation semi-définie positive	206
7.9.7. Persistance	208
7.10. Optimum local	208
7.11. Algorithmes exacts et méthodes heuristiques pour l'optimisation des fpbq	210
7.11.1. Les différentes approches	210
7.11.2. Un algorithme fondé sur la décomposition lagrangienne	211
7.11.3. Un algorithme fondé sur la programmation quadratique convexe	212
7.12. Algorithmes approchés	213
7.12.1. Un algorithme 2-approché pour la maximisation d'une posiforme quadratique	213
7.12.2. Approximation de MAX-SAT	215
7.13. Optimisation d'une fonction pseudo-booléenne quadratique sous des contraintes linéaires	215
7.13.1. Exemples de formulations	216
7.13.2. Quelques cas polynomiaux et pseudo-polynomiaux	219
7.13.3. Complémentation	220
7.14. Linéarisation, convexification et relaxation lagrangienne pour l'optimisation d'une fpbq sous contraintes linéaires	223
7.14.1. Linéarisation	223
7.14.2. Convexification	224
7.14.3. Dualité lagrangienne	225
7.15. Algorithmes ϵ -approchés pour l'optimisation d'une fpbq sous contraintes linéaires	225
7.16. Bibliographie	227

Chapitre 8. Génération de colonnes en programmation linéaire en nombres entiers	237
Irene LOISEAU, Alberto CESELLI, Nelson MACULAN, Matteo SALANI	
8.1. Introduction	237
8.2. Une méthode de génération de colonnes pour un problème de programmation linéaire avec des variables bornées	238
8.3. Une inégalité pour éliminer la génération d'une colonne 0-1	241
8.4. Formulations pour un programme linéaire en nombres entiers	243
8.5. La résolution d'un programme linéaire en nombres entiers par génération de colonnes	246
8.5.1. Problème auxiliaire (<i>pricing problem</i>)	246
8.5.2. Séparation (<i>branching</i>)	247
8.6. Applications	251
8.6.1. Le problème des p -médianes	251
8.6.2. Routage de véhicules	256
8.7. Bibliographie	259
Chapitre 9. Approches polyédrales	263
Ali Ridha MAHMOUD	
9.1. Introduction	263
9.2. Polyèdres, faces et facettes	267
9.2.1. Polyèdres, polytopes et dimension	268
9.2.2. Faces et facettes	271
9.3. Optimisation combinatoire et programmation linéaire	279
9.3.1. Polytope des solutions	279
9.3.2. Points et rayons extrêmes	282
9.4. Techniques de preuves	286
9.4.1. Preuves de facettes	286
9.4.1.1. Preuve de nécessité	286
9.4.1.2. Preuve directe	288
9.4.1.3. Preuve par maximalité	289
9.4.2. Preuves d'intégrité	290
9.4.2.1. Preuve d'intégrité des points extrêmes	290
9.4.2.2. Preuve directe	294
9.5. Polyèdres entiers et relations min-max	296
9.5.1. Dualité et optimisation combinatoire	296
9.5.2. Matrices totalement unimodulaires	297
9.5.3. Systèmes totalement duaux entiers	299
9.5.4. Polyèdres bloquants et antibloquants	300
9.5.4.1. Polyèdres bloquants	300
9.5.4.2. Polyèdres antibloquants	303

9.6. Méthode de coupes	305
9.6.1. Méthode de Chvátal-Gomory	306
9.6.2. Algorithmes de coupes	308
9.6.3. Algorithmes de coupes et branchements	309
9.6.4. Séparation et optimisation	310
9.7. Le problème de coupe maximum	312
9.7.1. Modèles de verres de spins et le problème de coupe maximum	313
9.7.2. Le polytope des coupes	314
9.8. Le problème de conception d'un réseau fiable	318
9.8.1. Formulation et polyèdre associé	318
9.8.2. Inégalités valides et séparation	320
9.8.2.1. Inégalités de multicoupe	320
9.8.2.2. Inégalités de partition	321
9.8.2.3. Inégalités de l -partition	322
9.8.3. Un algorithme de coupes et branchements	322
9.9. Conclusion	324
9.10. Bibliographie	325

Chapitre 10. Programmation par contraintes

Claude LE PAPE

10.1. Introduction	331
10.2. Définition du problème	333
10.3. Opérateurs de décision	334
10.4. Propagation	336
10.5. Heuristiques	340
10.5.1. Branchement	340
10.5.2. Stratégies d'exploration	341
10.6. Conclusion	343
10.7. Bibliographie	343

Index

347

Le traité Information, Commande, Communication répond au besoin de disposer d'un ensemble complet des connaissances et méthodes nécessaires à la maîtrise des systèmes technologiques.

Conçu volontairement dans un esprit d'échange disciplinaire, le traité IC2 est l'état de l'art dans les domaines suivants retenus par le comité scientifique :

- Réseaux et télécoms
- Traitement du signal et de l'image
- Informatique et systèmes d'information
- Systèmes automatisés et productique
- Management et gestion des STICS
- Cognition et traitement de l'information.

Chaque ouvrage présente aussi bien les aspects fondamentaux qu'expérimentaux. Une classification des différents articles contenus dans chacun, une bibliographie et un index détaillé orientent le lecteur vers ses points d'intérêt immédiats : celui-ci dispose ainsi d'un guide pour ses réflexions ou pour ses choix.

Les savoirs, théories et méthodes rassemblés dans chaque ouvrage ont été choisis pour leur pertinence dans l'avancée des connaissances ou pour la qualité des résultats obtenus dans le cas d'expérimentations réelles.