



PROBLÈMES
d'ANALYSE
FONCTIONNELLE
— & —
d'ANALYSE
HARMONIQUE

M. SAMUELIDES - L. TOUZILLIER

CÉPADUÈS-ÉDITIONS

Table des matières

Avant propos 1

(le premier nombre est la page de l'énoncé, le deuxième est celle du corrigé)

Analyse fonctionnelle

I Espaces de Hilbert fonctionnels 7

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz (rappels de premier cycle) 7 - 15
2. Identité de la polarisation (rappels de premier cycle) 7 - 15
3. La convergence en norme entraîne la convergence faible 7 - 15
4. L'espace des fonctions continues n'est pas complet
pour la norme $\|\cdot\|_2$ 8 - 16
5. L'espace de Hilbert ℓ^2 des suites de carré sommable 8 - 17
6. Convergence simple et uniforme de suite de fonction 9 - 21
7. Complétude pour la norme de la convergence uniforme 9 - 23
8. Densité de C_0 dans C_k 9 - 24
9. Composition des projections 10 - 25
10. Projection orthogonale de polynômes 10 - 25
11. Opérateur de translation sur un espace fonctionnel 10 - 26
12. Définition de l'adjoint d'un opérateur linéaire
d'un espace de Hilbert 10 - 27
13. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt 11 - 29
14. Démonstration du théorème de Weierstrass avec
les polynômes de Bernstein 11 - 31
15. Complétion du système de polynômes de Laguerre 12 - 34
16. Exercice d'application immédiate et
de manipulation algébrique 13 - 37
17. Dualité et hypothèse de complétion 13 - 38
18. Densité de $C[-1, 1]$ dans $L^2([-1, 1], dx)$ 14 - 40
19. Systèmes de Haar et de Walsh 14 - 41

II	Mesure des ensembles	45
1.	Tribu-trace	45 - 49
2.	Sigma-additivité	45 - 50
3.	Continuité monotone décroissante	45 - 51
4.	Complétée d'une mesure	45 - 51
5.	Construction d'un ensemble non mesurable	46 - 55
6.	Discontinuités de la primitive	46 - 56
7.	Mesure discrète et mesure de Radon	47 - 57
8.	Mesure invariante	47 - 57
9.	Construction d'un ensemble non dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle : l'ensemble de Cantor	47 - 58
10.	Théorie ergodique — Cadre abstrait	47 - 59
11.	Théorie ergodique — Dilatation et repliement	48 - 61
12.	Théorie ergodique — Rotation irrationnelle	49 - 64
III	Intégration	67
1.	Application du théorème de convergence majorée (1)	67 - 79
2.	Application du théorème de convergence majorée (2)	67 - 79
3.	Application du théorème de convergence majorée (3)	67 - 80
4.	Application des théorèmes de Fubini et de convergence majorée	68 - 81
5.	Contre-exemples du théorème de convergence majorée (de Lebesgue)	68 - 81
6.	Convergence presque partout et théorème de Lebesgue	69 - 83
7.	Intégration d'une série de fonctions	69 - 83
8.	Application du théorème de Lebesgue	69 - 84
9.	Dérivée d'une transformée de Laplace	69 - 85
10.	Contre-exemple au théorème de Fubini	70 - 85
11.	Autre contre-exemple au théorème de Fubini	70 - 85
12.	Mesure image	70 - 86
13.	Langage probabiliste	70 - 86
14.	Mesure invariante	71 - 87
15.	Calcul de mesure image	71 - 88

16. Dérivée sous le signe somme	71 - 88
17. Intégrale du sinus cardinal	71 - 90
18. Dérivation sous le signe somme	72 - 91
19. Fonction eulérienne de deuxième espèce (1)	72 - 92
20. Fonction eulérienne de deuxième espèce (2)	73 - 94
21. Transformée de Laplace	74 - 98
22. Théorème de la valeur finale	75 - 99
23. Convolution et transformée de Laplace	76 - 100
24. Intégrale généralisée et intégrale de Lebesgue	76 - 102
25. Intégration par parties dans L^1	77 - 103
26. Théorème de Lebesgue et intégrale semi-convergente	77 - 104
27. Intégrale de Stieltjes	77 - 105
28. Équicontinuité de l'intégrale	78 - 107
29. Théorème d'Egoroff	78 - 108
30. Inégalité de la moyenne d'une fonction vectorielle	78 - 109
IV Dualité et approximation faible	111
1. ℓ^1 est le dual de c_0	111 - 117
2. Isomorphisme de l'espace L^2 et de son dual	111 - 119
3. Compacité normique de la boule	111 - 120
4. Utilisation de techniques banachiques proches de la projection orthogonale. Application au théorème de locale compacité de Riesz	112 - 120
5. Espace de Banach quotient	113 - 122
6. Faible compacité de la boule unité du dual	114 - 124
7. Convexité et théorème de Hahn-Banach	115 - 128
8. Un convexe est faiblement fermé	116 - 130
9. Intégration vectorielle en dimension finie	116 - 132
10. Théorème de convergence majorée	117 - 134
V Dualité fonctions continues - mesures bornées	137
1. Définition de l'image essentielle d'une classe de fonctions	137 - 143
2. L^∞ est le dual de L^1	137 - 144

16. Dérivée sous le signe somme	71 - 88
17. Intégrale du sinus cardinal	71 - 90
18. Dérivation sous le signe somme	72 - 91
19. Fonction eulérienne de deuxième espèce (1)	72 - 92
20. Fonction eulérienne de deuxième espèce (2)	73 - 94
21. Transformée de Laplace	74 - 98
22. Théorème de la valeur finale	75 - 99
23. Convolution et transformée de Laplace	76 - 100
24. Intégrale généralisée et intégrale de Lebesgue	76 - 102
25. Intégration par parties dans L^1	77 - 103
26. Théorème de Lebesgue et intégrale semi-convergente	77 - 104
27. Intégrale de Stieltjes	77 - 105
28. Équicontinuité de l'intégrale	78 - 107
29. Théorème d'Egoroff	78 - 108
30. Inégalité de la moyenne d'une fonction vectorielle	78 - 109
IV Dualité et approximation faible	111
1. ℓ^1 est le dual de c_0	111 - 117
2. Isomorphisme de l'espace L^2 et de son dual	111 - 119
3. Compacité normique de la boule	111 - 120
4. Utilisation de techniques banachiques proches de la projection orthogonale. Application au théorème de locale compacité de Riesz ...	112 - 120
5. Espace de Banach quotient	113 - 122
6. Faible compacité de la boule unité du dual	114 - 124
7. Convexité et théorème de Hahn-Banach	115 - 128
8. Un convexe est faiblement fermé	116 - 130
9. Intégration vectorielle en dimension finie	116 - 132
10. Théorème de convergence majorée	117 - 134
V Dualité fonctions continues – mesures bornées	137
1. Définition de l'image essentielle d'une classe de fonctions	137 - 143
2. L^∞ est le dual de L^1	137 - 144

3. Théorème de Riesz dans le cas d'une mesure bornée sur \mathbb{R}	139 - 146
4. Formes linéaires multiplicatives sur l'algèbre $C_0(\mathbb{R})$	140 - 151
5. Mesure de Radon sur \mathbb{R} (préparation aux distributions)	141 - 153
6. Exemples de topologies faibles non équivalentes	141 - 155
7. Continuité faible d'un opérateur à noyau	142 - 158
8. Approximation de la masse de Dirac	142 - 159
9. Échantillonnage d'une mesure bornée	142 - 160
10. Convergence faible des mesures positives	143 - 161
VI Dualité fonctions différentiables - distributions	163
1. Primitive d'une fonction intégrable	163 - 168
2. Dérivées au sens des distributions	164 - 168
3. Primitive d'une distribution	164 - 169
4. Domaine d'un opérateur de dérivation	164 - 171
5. Distributions valeur principale et partie finie	165 - 173
6. Solution de $x \cdot T = K$	165 - 176
7. Convergence vers δ d'une fonction oscillante	166 - 177
8. Solution élémentaire d'une équation différentielle	166 - 178
9. Support singulier et produit des distributions	166 - 179
10. Valeur principale de Dirichlet	167 - 180
VII Théorie spectrale des opérateurs	185
1. Opérateurs de rang fini	185 - 194
2. Représentation matricielle infinie	185 - 194
3. Opérateurs de multiplication	186 - 196
4. Opérateurs à noyau	186 - 198
5. Décalage bilatéral	187 - 200
6. Décalage unilatéral	187 - 201
7. Calcul de projecteur propre par l'intégrale de Cauchy	187 - 203
8. Théorème spectral pour les opérateurs linéaires bornés autoadjoints	188 - 205
9. Opérateur à noyau de Hilbert- Schmidt	189 - 209

10. Opérateurs de Hilbert-Schmidt autoadjoints et théorème de Mercer	190 - 212
11. Laplacien à une dimension et conditions aux limites	190 - 214
12. Problème de Sturm-Liouville	191 - 217
VIII Exercices supplémentaires	221
1. Intégration de Gauss et polynômes orthogonaux	221 - 233
2. Théorème de Lax-Milgram	225 - 238
3. Théorème ergodique de von Neumann	226 - 239
4. Approximation interne d'une équation intégrale	227 - 242
5. Modes propres de vibration d'un tambour et fonctions de Bessel	229 - 244
6. Noyau de Volterra et opérateur quasi nilpotent	230 - 248
7. Oscillateur harmonique et polynômes d'Hermite	231 - 250

Analyse harmonique

I Série et intégrales de Fourier	259
1. Théorème de Dirichlet (séries de Fourier)	259 - 268
2. Phénomène de Gibbs	260 - 270
3. Théorème de Féjer	262 - 274
4. Calculs d'intégrales de Fourier par la méthode des résidus	262 - 275
5. Transformée de Fourier de e^{-ax^2}	263 - 277
6. Unité approchée de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$	263 - 277
7. Fonctions régulières à décroissance rapide	264 - 280
8. Théorème de Dirichlet (intégrale de Fourier)	265 - 280
9. Forme particulière du théorème d'inversion	265 - 282
10. Équation de la chaleur sur un conducteur illimité	266 - 283
II Transformée de Laplace	287
1. Théorème de la valeur finale	287 - 291
2. Transformée de Laplace de fonctions périodiques	287 - 292
3. Résolution d'équations dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$	288 - 293

4. Calcul d'originaux par inversion complexe ; utilisation du contour de Bromwich	288 - 295
5. Application de la transformée de Laplace aux circuits électriques	289 - 298
6. Application du critère de Nyquist	290 - 301
III Analyse harmonique	303
1. Transformée de Walsh finie	303 - 312
2. Groupe quotient	304 - 314
3. Étude d'un solide cristallin	304 - 316
4. Systèmes linéaires stationnaires (espace L^2)	308 - 320
5. Systèmes linéaires stationnaires (espace L^1)	311 - 321
IV Synthèse harmonique	325
1. Théorème de Lévi	325 - 337
2. Relation d'incertitude en théorie du signal	326 - 340
3. Fonction de type positif	327 - 341
4. Théorème de Bochner	327 - 342
5. Formule de Shannon	328 - 344
6. Théorème tauberien simplifié	329 - 345
7. Inversion de Fourier de fonctions paires et convexes sur \mathbb{R}^+	330 - 348
8. Fonction d'autocorrélation	331 - 349
9. Transformée de Gabor	334 - 352
10. Fonction d'échelle dans les bases orthonormales d'ondelettes	335 - 354
V Distributions tempérées	361
1. Transformation de Hilbert	361 - 372
2. Convolution d'une fonction de \mathcal{S} par une distribution	362 - 374
3. Théorème de Shannon	363 - 375
4. Temps de montée d'un signal à spectre borné (théorème de Bernstein)	364 - 377
5. Théorème de Paley-Wiener	365 - 380
6. Transformation de Fourier d'une primitive	367 - 383
7. Transformée de Laplace d'un signal échantillonné	368 - 385
8. Comparaison des transformées de Laplace et de Fourier	370 - 387

CET ouvrage de problèmes corrigés est le complément indispensable des livres *Analyse fonctionnelle*

et *Analyse harmonique* destinés aux étudiants en mathématiques appliquées, physique et sciences de l'ingénieur. La collection de problèmes énoncés dans ces livres, enrichie d'énoncés de synthèse originaux, est présentée avec leurs corrigés. Ces problèmes permettront à l'étudiant de s'exercer, de vérifier son assimilation et sa compréhension du cours, sur des énoncés de difficulté graduelle dont il consultera ensuite le corrigé détaillé. Beaucoup d'énoncés de synthèse permettent, par ailleurs, de retrouver des résultats difficiles à prouver en toute généralité, mais dont les applications sont constamment utilisées dans la littérature technique de l'ingénieur. Celui-ci pourra ainsi accéder à la validation de ses outils d'analyse tandis que le mathématicien s'exercera à prouver des résultats dont le contenu physique redouble l'intérêt mathématique.

Réf. 246

I.S.B.N. 2-85428-257-4



9 782854 282573