



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE SAAD DAHLEB DE BLIDA

DEPARTEMENT DU MECANIQUE

Mémoire pour l'obtention du diplôme Master en Génie Mécanique

Option : Systèmes Thermiques et Énergétiques Avancés

## Thème : ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA CONVECTION MIXTE DANS UNE CAVITÉ

---

**PRESENTE PAR :**

FERSAOUI ADEL

Soutenu le 16/11/2014

**ENCADRE PAR :**

Le promoteur      Mr : K. GRINE

**Devant les jurys :**

Mr Ali benyahya	Président des jurys	Professeur à USDB – (Blida)
Mr roudane Med	Examineur	Professeur à USDB – (Blida)
Mr guergadj Med	Examineur	Professeur à USDB – (Blida)



## **Résumé:**

On étudie numériquement la convection mixte dans une enceinte carrée avec la paroi inférieure et supérieure considéré comme adiabatique.

La paroi latérale gauche est chauffée entièrement et ce chauffage sera introduit sous forme d'un flux uniforme. tandis que les parois latérales seront supposées mobiles à une vitesse constante. Les formes permanentes des équations de Navier-Stokes en deux dimensions et les équations de conservation de la masse et de l'énergie, seront résolus par la méthode des volumes finis. L'algorithme SIMPLE sera utilisé pour le couplage pression-vitesse. Les fonctions de courant et les isothermes seront présentées pour diverses combinaisons de  $Ri$ . Les résultats seront aussi présentés sous forme de Nombre de Nusselt local sur la paroi froide, les profils de vitesse au niveau d'une section droite de la cavité seront aussi présentés. Les corrélations seront mises au point pour prévoir les taux de transfert de chaleur à partir de l'enceinte en fonction de  $Ri$ .

**Mots clés:** *Convection mixte, Enceinte carrée; Algorithme SIMPLE.*

## **Introduction générale :**

Dans l'étude de la convection forcée, on ignore les effets de la gravité. En convection naturelle, on ne s'intéresse qu'à eux. Il existe cependant un grand nombre de situations intermédiaires où les mécanismes de la convection forcée et de la convection libre coexistent avec des ordres de grandeur comparables : on est là dans le véritable cas général de la convection, que l'on a appelée "convection mixte". Parmi les exemples de cette mixité, on peut citer : les écoulements lents en canalisations (comme dans les radiateurs à eau) ou le long d'une paroi, les jets anisothermes (chauffage ou climatisation des locaux, panaches de fumée,...), les écoulements atmosphériques et les courants marins (qui sont importants pour les questions de climatologie et de pollution), et plus généralement beaucoup d'écoulements fortement anisothermes. Mais un aspect nouveau fait ici son apparition : les deux mécanismes vont s'aider ou se contrarier selon le sens relatif du mouvement forcé par rapport au mouvement gravitaire, qui jouera donc un rôle essentiel. Si les effets de la pesanteur s'opposent au mouvement forcé, l'écoulement est freiné, le transfert thermique a tendance à diminuer et on parle de convection mixte "contrariée". Si l'écoulement forcé est de même sens que l'écoulement libre (cas de la plaque verticale chauffée, dans un fluide lui-même en mouvement ascendant) il se produit une amplification des transferts par rapport à la convection forcée seule et on parle alors de convection mixte "aidée". Enfin, l'écoulement forcé peut être perpendiculaire à la direction des forces de pesanteur (c'est à dire horizontal). En général on observe là aussi une amélioration des échanges thermiques.

# *Sommaire*

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

## **CHAPITRE I** ***INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE***

I.1 GÉNÉRALITÉ : .....	2
I.2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE : .....	3
I.3 CONTENUE DU MEMOIRE: .....	8

## **CHAPITRE II** ***MODÈLE MATHÉMATIQUE***

Introduction : .....	9
II.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME : .....	9
II.2 équations GÉNÉRALES : .....	10
II.2.1 Continuité : .....	10
II.2.2 Equation du mouvement : .....	11
II.2.3 Equation de l'énergie : .....	11
II.3 HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES : .....	11
II.4. FORMULATION DU PROBLÈME : .....	12
II.4.1. Equation de continuité .....	12
II.4.2. Equation de la quantité de mouvement.....	12
II.4.3. Equation de l'énergie .....	12
II.4.4. Les conditions aux limites : .....	12
II.5. Approximation de BOUSSINESQ : .....	13
II.5 FORMULATION ADIMENSIONNELLE : .....	14
II.6. Calcul du nombre de Nusselt moyen : .....	15
Conclusion : .....	16

## **CHAPITRE III**

### ***MODÉLISATION NUMÉRIQUE***

<b>III.1. Introduction :</b> .....	17
<b>III.2. Procédure numérique :</b> .....	17
<b>III.3. Maillage :</b> .....	19
<b>III.4. La discrétisation :</b> .....	20
<b>III.5. Formulation générale du problème :</b> .....	23
<b>III.6. Procédure de Résolution :</b> .....	23
<b>III.6.1. Equation algébrique de pression :</b> .....	24
<b>III.6.2. Algorithme SIMPLE</b> .....	26
<b>III.6.3. Critère de convergence :</b> .....	26
<b>Conclusion</b> .....	27

## **CHAPITRE VI**

### ***RÉSULTATS ET DISCUSSION***

<b>IV.1. Introduction :</b> .....	28
<b>IV.2. Résultats:</b> .....	28
<b>IV.2.1 Premier cas (convection mixte contrariée):</b> .....	29
<b>IV.2.2 Deuxième cas (convection mixte aidée):</b> .....	33
<b>IV.2.3 troisième cas (convection mixte contrariée au niveau de la paroi froide et aidée au niveau de la paroi chaude):</b> .....	36

## **CONCLUSION GENERALE**

<b>V. Conclusion :</b> .....	40
------------------------------	----

## Listes Des Figures :

Figure III-1 : Volume de contrôle bidimensionnel .....	18
<i>Figure III-1 : Schéma du maillage (a) maillage décalé pour <math>u_e</math> (b) et maillage décalé Pour <math>v_n</math> (c).....</i>	<i>19</i>
Figure III-3 : Maillage de l'enceinte.....	20
Figure (IV-4) : (a) ligne de courant (b) vecteur vitesse (c)isothermes pour l'enceint du premier cas.....	31
Figure (IV-5) : les profils de vitesse au niveau d'une section droite médiaire( $x=0.025$ ) donnée pour le premier cas .....	32
Figure (IV-6) : le nombre de Nusselt locale le long de la paroi froide pour le premier cas .....	32
Figure (IV-7) : (a) ligne de courant (b) vecteur vitesse (c)isothermes pour l'enceint du deuxième cas .....	34
Figure (IV-8) : les profils de vitesse au niveau d'une section droite médiaire( $x=0.025$ ) donnée pour le deuxième cas .....	35
Figure (IV-9) : le nombre de Nusselt locale le long de la paroi froide pour le deuxième cas.....	35
Figure (IV-10) : (a) ligne de courant (b) vecteur vitesse (c)isothermes pour l'enceint du troisième cas.....	38
Figure (IV-11) : les profils de vitesse au niveau d'une section droite médiaire( $x=0.025$ ) donnée pour le troisième cas .....	38
Figure (IV-12) : le nombre de Nusselt locale le long de la paroi froide pour le troisième cas.....	39

## I.1 GÉNÉRALITÉ :

Le transfert thermique est un processus complexe qui est réalisé par la superposition des trois modes fondamentaux : *conduction*, *convection* et *rayonnement*. Dans le cas où l'un de ces trois modes est déterminant, les effets des autres sont peu importants ; aussi ils peuvent être négligés, simplifiant considérablement l'analyse du cas concerné.

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre, convection forcée et convection mixte.

### ➤ *Convection forcée :*

Le mouvement de fluide est causé par l'action des forces extérieures du processus (par exemple pompe, ventilateur, etc.) qui lui imprime des vitesses de déplacement assez importantes. En conséquence, l'intensité du transfert thermique par convection forcée sera en liaison directe avec le régime de mouvement de fluide.

### ➤ *Convection naturelle :*

Elle a comme origine le mouvement produit par les différences de densité entre les particules chaudes et celles qui sont froides existant dans un fluide situé dans un champ de forces massiques, l'intensité de la convection naturelle est en relation avec la nature du fluide. Le traitement de la convection libre sera fait en présence du champ de la gravité et en l'absence des autres forces massiques.

### ➤ *Convection mixte:*

La convection mixte correspond au couplage des deux phénomènes précédents quand les vitesses d'écoulement, dues aux deux types de convection sont considérées séparément, du même ordre de grandeur.

L'étude des écoulements convectifs dans des cavités fermées possède de nombreuses applications dans le domaine industriel considérant les diverses combinaisons des différences de la température imposé et des configurations géométriques de la cavité.

L'interaction de l'écoulement cisailé dû au mouvement des parois et de l'écoulement de la convection naturelle dû à l'effet de flottabilité constitue jusqu'à présent un domaine de recherche fondamental et nécessite une analyse complète pour comprendre la physique de l'écoulement résultant et du transfert de chaleur.



## I.2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE :

La revue de la littérature concernant la convection mixte dans des cavités ventilées montre que le sujet reste encore à explorer.

Actuellement la convection mixte dans des cavités fermées a fait l'objet de plusieurs études théoriques, expérimentales et surtout numériques, parmi lesquelles nous présentons quelques-unes que nous avons jugées proches de notre cas.

Parmi celles qui ont considéré des enceintes cubiques, nous pouvons citer celles de:

**R. Frederick et F. Quiroz [2]** qui ont analysé numériquement la convection naturelle laminaire à l'état stationnaire dans une enceinte cubique avec une paroi verticale froide opposée à l'autre contenant une zone carrée chaude. Les résultats indiquent que la transition du régime conductif au régime convectif prend fin pour un nombre de Rayleigh  $Ra=105$ , caractérisée par la suppression de la conduction et un développement lent de la Convection aussi, dans la gamme du nombre de Rayleigh variant de  $105$  à  $107$ , les vitesses Latérales deviennent très grandes, produisant un écoulement tridimensionnel thermiquement stratifié, l'effet du nombre de Reynolds est très minime sur le nombre De Nusselt.

**N. Quertatani et al [3]** ont étudié numériquement la convection mixte tridimensionnelle de l'air dans une enceinte cubique. Les parois inférieure et supérieure sont en mouvement et maintenues à des températures différentes (refroidis par le bas et chauffé par le haut), Tandis que les autres parois sont adiabatiques. Les paramètres de contrôle sont les Nombre de Richardson  $0.001 \leq Ri \leq 10$ , Reynolds  $100 \leq Re \leq 1000$  et de Prandtl  $Pr=0.71$ . Les résultats indiquent qu'une amélioration remarquable du transfert de chaleur Jusqu'à 76% peut être atteinte pour la combinaison particulière de  $Re=400$  et  $Ri=1$

**A. Bairi [4]** a présenté une étude numérique et expérimentale de la convection naturelle transitoire dans une cavité cubique fermée remplie d'air. La paroi gauche contient trois sources de chaleur parallèles discrètes soumises à un flux de chaleur constant et séparées entre elles par des bandes adiabatiques ; en face de la paroi gauche une plaque froide est maintenue à une température constante  $T_c$ . Les quatre autres murs de la cavité sont considérés comme adiabatiques. Les échanges de chaleur sont étudiés pour plusieurs configurations bidimensionnelles avec différents angles d'inclinaison de la paroi active en

respectant la gravité. Les résultats numériques sont en bon accord avec les mesures thermiques réalisées sur un banc d'essai expérimental.

Tandis que parmi quelques autres qui ont rapporté leur étude sur les enceintes rectangulaires ou carrées, il y en a :

**Torrance et al [5]** Ont présenté une étude numérique concernant l'écoulement d'un fluide dans une cavité rectangulaire, dont la paroi supérieure est supposée mobile et chauffée, tandis que les autres sont froides. Les trois cas traités montrent que la convection naturelle prédomine aux grands nombres de Grashof.

**M.K. Moallemi et K.S Jang [6]** ont considéré l'écoulement et le transfert de chaleur dans une enceinte carrée pour laquelle le mouvement du fluide est induit par le frottement résultant du mouvement de translation du couvercle et par la force de flottabilité due au chauffage du plancher. Les simulations numériques sont faites pour un écoulement laminaire bidimensionnel ( $100 \leq Re \leq 2200$ ) et pour différentes valeurs Du nombre de Richardson.ils ont étudié les effets du nombre de Prandtl pour les valeurs Faibles ( $0.01 < Pr < 50$ ) sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans l'enceinte. La température et le champ d'écoulement sont calculés et présentés pour illustrer L'influence du nombre de Prandtl. Les nombres du Nusselt locaux et globaux sont Rapportés pour différentes valeur de  $Re$ ,  $Ri$  et  $Pr$ .

**T.Basak et S.Roy [7]**

Se sont intéressés au sujet de la convection mixte dans une cavité carrée ou la Paroi inférieure est soumise à haute température non uniforme par contre les deux autres latérales sont froides et celle qui est supérieure est supposée en mouvement avec une Vitesse constante. Leur étude a porté sur l'effet de divers paramètres de contrôle Tels que :  $Pr$ ,  $Re$  et  $Gr$  avec  $Ri = Gr / Re^2$ .ils ont observé que la convection naturelle est Dominante pour  $Re$  et  $Gr = 10^5$ , mais si  $Gr$  est supérieure à cette valeur ; celle qui est Forcée sera la dominante.

**K. Khamafer, K. Vafain et M. Lightston [8]** ont étudié le transfert de chaleur par convection mixte dans les clôtures flexibles pour trois différents angles d'attaques de l'écoulement avec une augmentation du nombre de Grashof et du nombre de Reynolds pour voir l'effet de l'inclinaison sur le transfert thermique. Les résultats montrent que le nombre du Nusselt moyen augmente linéairement avec l'augmentation du nombre de Reynolds et le nombre de Grashof. Aussi, pour un écoulement avec un angle d'attaque égale à  $90^\circ$ , l'augmentation du nombre de Reynolds minimise l'échange de chaleur.

**M. Nejam et M. Hasnaoui [9]** ont rapporté une étude numérique de la convection mixte dans une enceinte en forme de «T» chauffée à l'aide d'un flux de chaleur constant et soumise à un jet d'air frais par le bas. Les blocs chauffants sont identiques et le système présente une symétrie par rapport à un axe vertical passant par les milieux des ouvertures. Les équations régissant sont résolues à l'aide d'une méthode aux différences finies. Les paramètres de contrôle sont les nombres de Rayleigh ( $0 \leq Ri \leq 106$ ), de Reynolds ( $1 \leq Re \leq 1000$ ) et de Prandtl ( $Pr = 0.72$ ), la hauteur relative Des blocs chauffants ( $B = h/H = 0.5$ ), la dimension C des ouvertures d'admission et D'évacuation de l'air ( $C = 1/L = 0.15$ ), et la distance relative D entre les blocs ( $D = d/L = 0.50$ ), les résultats obtenus, pour  $H/L = 1$ , montre l'existence de solutions multiples et le transfert de chaleur en dépend de manière sensible.

**T.H. Hsu et S.G. Wang [10]** ont présenté une étude numérique de la convection mixte des fluides micro-polaires dans une enceinte carrée avec une source de chaleur discrète. Les études ont été effectuées pour une large gamme des nombres de Reynolds et Grashof, ainsi que les paramètres liés au fluide. Les résultats montrent que les champs thermiques dépendent de la viscosité.

**I. Dagtekin et Hakan.F. Oztop [11]** ont considéré leur étude numérique sur la convection mixte stationnaire dans une cavité rectangulaire. Le gradient de température selon les deux faces : supérieure et inférieure est négligé, tandis que les autres ont une vitesse de déplacement avec des températures différentes. L'étude tient compte l'influence des trois cas d'aspect selon le sens de mobilité des parois en faisant illustrer une large gamme de Richardson ( $0.01 \leq Ri \leq 100$ ). Un résultat remarquable qui découle ce modèle est que le transfert thermique est maximum au mouvement ascendant des parois.

**S.K. Mahapatra et al [12]** ont étudié la convection mixte dans une enceinte où les parois supérieures et inférieures ont maintenues adiabatiquement et dotées de clôture sur leurs faces intérieures, tandis que la paroi gauche et la paroi droite froide sont soumises à des vitesses opposées. Ils ont examiné l'effet du nombre de Richardson ( $Ri = 1$ ) pour la convection mixte et la taille des clôtures sur le transfert de chaleur pour la convection forcée ( $Ri = 0.1$ ). Les résultats montrent que le transfert de chaleur par la convection mixte est plus grand que celui dans le cas de la convection naturelle.

**Aydin et Yang [13]** ont traité la convection mixte laminaire dans une cavité 2D soit caractérisée par une source chaude placée au centre de la paroi inférieure et la partie restante est considérée adiabatique comme la face supérieure, alors que les autres sont supposées froides se déplaçant à une vitesse déterminée vers le bas. L'investigation porte sur l'influence du nombre de Richardson ainsi que la longueur de la partie chauffante. Les effets de chacune des convections : naturelle et forcée sont compatibles, plus qu'on a eu rien à visualiser concernant le phénomène de l'antisymétrie.

**K.M. Khanafer et al [14]** ont rapporté une étude numérique sur le transfert de chaleur par convection mixte laminaire instable dans une cavité carrée. La paroi supérieure est maintenue à une température froide  $T_c$  soumise à une vitesse horizontale sinusoïdale, tandis que la paroi inférieure est maintenue à une température chaude  $T_h$  ; les autres parois sont adiabatiques. La discrétisation des équations gouvernant le problème est obtenu à l'aide des éléments finis basée sur la méthode de Galerkin.

Les caractéristiques de l'écoulement du fluide et de transfert de chaleur sont examinés pour une gamme de Reynolds ( $102 \leq Re \leq 103$ ), de Grashof ( $102 \leq Gr \leq 105$ ), d'une fréquence sans dimensions d'oscillation du couvercle  $0.1 \leq \omega \leq 5$  et un nombre de Prandtl de 0.71. Ils ont montré que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof, tandis qu'il diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds et de la fréquence de vitesse du couvercle.

**M.A.R. Sharif [15]** a étudié numériquement la convection mixte dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle à l'aide de l'algorithme SIMPLER. La surface supérieure de la cavité rectangulaire est maintenue à plus haute température et la surface inférieure à basse température, tandis que les deux surfaces gauche et droite sont considérées adiabatiques. Les résultats montrent que le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation de l'angle de l'inclinaison pour la convection forcée dominante. Aussi, le nombre de Nusselt local et moyen augmentent avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison dans le cas ( $Ri = 0.1$ ), tandis qu'il augmente plus rapidement pour ( $Ri = 10$ ).

**T.S. Cheng et W.H. Liu [16]** ont repris numériquement la convection mixte dans une cavité carrée, dont la paroi supérieure est mobile. Quatre cas sont distingués selon la direction du gradient de la température imposée. L'échauffement différentiel des parois supérieures et inférieures se traduit par l'attraction gravitationnelle stable et les gradients de température instable, alors que l'échauffement différentiel des parois latérales gauche et droite favorise et contrecarre les effets de flottabilité. En utilisant les paramètres de contrôle  $Pr=6.2$  et  $Ri=0.1, 1$  et  $10$ , ils ont constaté que le nombre de Richardson et la direction du gradient de température affectent les types d'écoulement et l'évolution du transport de chaleur dans la cavité. De plus, ils ont montré que le taux de transfert de chaleur augmente avec la diminution du nombre de Richardson indépendamment de l'orientation du gradient de température imposée.

**G. Guo et Muhammad.A. Sharif [17]** ont rapporté une étude numérique sur le mécanisme de transport par convection mixte dans une enceinte carrée remplie avec un nano-fluide, ses deux parois latérales sont isolées tandis que les autres sont maintenues à des températures

Constantes. La paroi supérieure se déplace avec une vitesse constante. Ils ont montré que l'introduction des nanoparticules dans le fluide mène à une augmentation du coefficient de transfert de chaleur, ils sont capables de changer la structure de l'écoulement. Le rapport d'aspect (longueur par rapport à la hauteur) et la fraction volumique du solide affectent l'écoulement du fluide et le transfert thermique dans la cavité.

**P. Kandaswamy, J.Lee et M. Muthamilselvan [18]** ont rapporté des conditions aux limites que celles sont de la configuration géométrique étudiée par Aydin et Yang qui ont considéré une température fixe alors que Guo et Sharif ont imposé un flux de chaleur constant. La partie restante de cette paroi est supposée adiabatique. Les effets de la longueur de la source de chaleur ainsi que du nombre de Richardson ont été examinés. Ici, les effets de la convection forcée et de la convection naturelle étant coopérant, aucune bifurcation vers une solution non symétrique n'a été observée.

**I.3 CONTENUE DU MEMOIRE:**

Cette investigation est structurée en 4 chapitres.

- Dans le but de situer notre étude, on présente dans le premier chapitre le phénomène de la convection ainsi que quelques rappels bibliographiques en rapport avec le problème posé.
- Un second chapitre consacrera à la configuration géométrique étudiée, à la formulation mathématique du modèle, aux hypothèses simplificatrices et à l'établissement des équations et des conditions aux limites qui leur seront associées. Enfin on va définir les principales grandeurs adimensionnelles caractérisant le problème.
- Dans le troisième chapitre nous présentons la formulation numérique du problème. Nous avons opté pour la méthode du volume fini pour discrétiser les différentes équations du problème.
- Le quatrième chapitre est consacré aux résultats et à leurs interprétations.
- Enfin on terminera par une conclusion générale obtenue au cours de cette étude en signalant les extensions possibles.

## Introduction :

Dans ce chapitre on va formuler notre modèle mathématique, les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions initiales et aux limites appropriées à notre configuration.

## II.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME :

Le modèle physique considéré est schématisé sur la figure (II-1). Il s'agit d'une cavité carrée, que nous proposons de refroidir en créant des courants fluides qui s'écoulent le long des parois latérales avec une vitesse fixée  $V_0$ . la paroi gauche est maintenue à une température chaude ( $T_c = 278.4$  K) et la paroi droite a une température froide ( $T_f = 273$  K),

La partie supérieure et inférieure de la cavité sont adiabatiques. La force de flottabilité induite par le gradient de température au sein de la cavité crée un mouvement de convection naturelle qui perturbe l'écoulement forcé causé par la force de cisaillement due à la mobilité des parois. Le résultat de cette compétition dans cette étude donne naissance à une convection mixte.

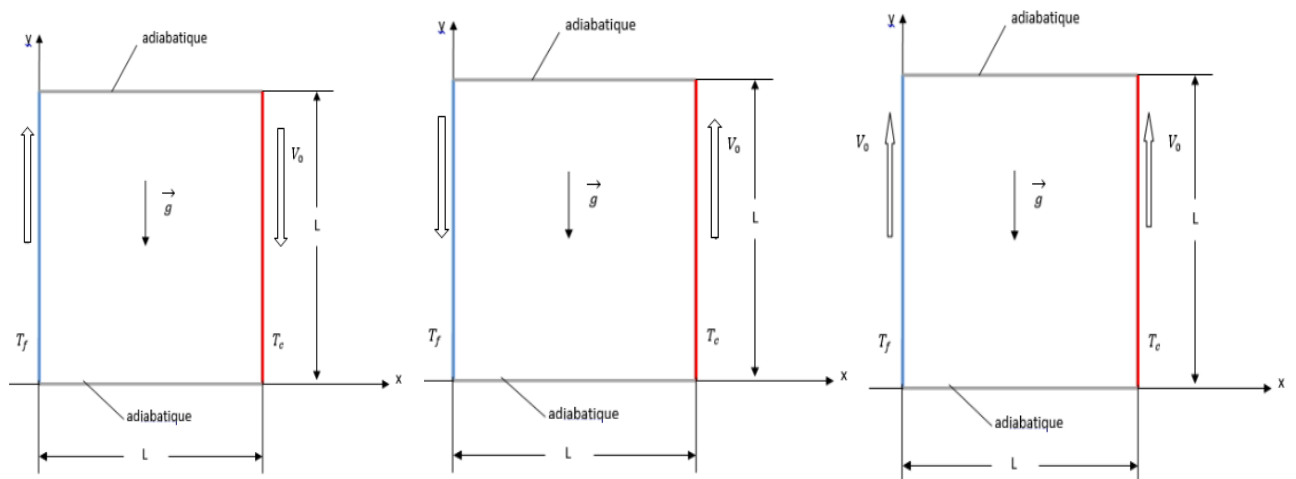


Figure (II-1) : schéma des cavités du problème étudié

## II.2 équations GÉNÉRALES :

En mécanique des fluides, en supposant que le fluide est un milieu continu, on peut utiliser les lois classiques de conservation qui sont :

- Loi de conservation de la masse ou l'équation de continuité.
- Deuxième loi de Newton (principe de conservation de quantité de mouvement) ou les équations de quantité de mouvement.
- Loi de conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique) ou l'équation de l'énergie.

Pour résoudre complètement un problème de convection mixte revient à déterminer en tout point du domaine d'étude et à tout instant les grandeurs caractéristiques du fluide étudié : pression, température et champ de vitesse.

Nous présentons les équations qui régissent le phénomène de la convection en régime laminaire à l'intérieur d'une cavité fermée. Dans le cas de régime laminaire, les problèmes d'écoulement de fluide peuvent être traités par la résolution de l'équation de quantité de mouvement, l'équation de continuité et l'équation d'énergie. Quand un écoulement est laminaire, les lignes de courants représentent les trajectoires du fluide et sont des courbes fixes dans l'espace qui ne se mélangent pas au cours du mouvement. Les couches fluides glissent les unes sur les autres, sans qu'il y ait passage de particules d'une couche à l'autre. Donc on va aboutir vers la fin à un système d'équations. Pour résoudre toutes les équations considérées dans cette étude, il est nécessaire de spécifier les conditions aux limites aux frontières du domaine d'écoulement.

### II.2.1 Continuité :

C'est l'équation qui exprime la loi de conservation de la masse pour un volume de contrôle matériel. Elle s'exprime mathématiquement sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.1})$$



### II.2.2 Equation du mouvement :

Le principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'établir les relations entre les caractéristiques du fluide lors de son mouvement et les causes qui le produisent. Il indique que le taux de variation de quantité de mouvement contenu dans le volume de contrôle est égal à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées. Il s'écrit sous la forme suivante (pour un fluide à propriétés physique constantes) :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \gamma \Delta \vec{V} - \vec{g} \quad (\text{II.2})$$

### II.2.3 Equation de l'énergie :

L'équation de conservation d'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique. Ce principe met en relation les différentes formes d'énergie, soit :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} T \right) = \beta T \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} P \right) + P_s + \varphi + \text{div} \left( K \overrightarrow{\text{grad}} T \right) \quad (\text{II.3})$$

## II.3 HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES :

Il est maintenant nécessaire d'effectuer un certain nombre d'hypothèses afin d'établir un modèle mathématique simple qui décrit la physique de ce problème, donc

On adopte les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est stationnaire et bidimensionnel.
- Le fluide est incompressible.
- L'écoulement engendré est laminaire.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- Les propriétés physiques du fluide sont constantes hormis la masse volumique qui obéit à l'approximation de Boussinesq dans le terme de la poussée d'Archimède.
- La puissance volumique dissipée est négligeable.
- La température (ou le flux) est constante dans le temps.

## II.4. FORMULATION DU PROBLÈME :

Le système d'équations qui gouverne l'écoulement laminaire en convection mixte et le transfert de chaleur en coordonnées cartésiennes après simplification s'écrit comme suit :

### II.4.1. Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{II.4})$$

### II.4.2. Equation de la quantité de mouvement

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (\text{II.5})$$

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \rho g + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

### II.4.3. Equation de l'énergie

$$\rho c p \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = k \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

### II.4.4. Les conditions aux limites :

$$x=0 ; 0 < y < 1 ; u=0 ; v=1 \text{ Ou } (v=-1) ; T=T_f$$

$$x=1 ; 0 < y < 1 ; u=0 ; v=1 \text{ Ou } (v=-1) ; T=T_c$$

$$y=0, 0 < x < 1, u=v=0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$y=1, 0 < x < 1, u=v=0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

## II.5. Approximation de BOUSSINESQ :

Pour des configurations d'écoulement dans une enceinte, la résultante des forces externes est limitée aux forces gravitationnelles de sorte que l'influence de la convection provoquée par des gradients de la température soit évidente. Quand les forces de flottabilité se produisent dans l'écoulement, la conception des propriétés physiques fixes n'assortit plus le comportement de l'écoulement du fluide. L'effet de la convection est pris en considération dans l'équation de quantité de mouvement par la variation de la masse volumique.

Si en prenant un état thermodynamique de référence (masse volumique  $\rho_o$  et température  $T_o$ ) l'équation d'état pour la masse volumique  $\rho$  devient en utilisant le Développement de Taylor :

$$\rho = \rho_o \left( 1 - \frac{T - T_o}{T_o} + \dots \right) \quad (\text{II.8})$$

En se limitant à un développement du premier ordre :

$$\rho = \rho_o (1 - \beta(T - T_o)) \quad (\text{II.9})$$

Le terme  $\beta$  de l'équation est le coefficient de dilatation isobare du fluide, soit :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P=cte} \quad (\text{II.10})$$

En effet, la convection est l'échange d'énergie sous forme de chaleur entre un fluide en mouvement et la surface d'un corps solide ayant une température différente ou entre des parties différentes d'un fluide en mouvement qui n'ont pas la même température, créant une force motrice volumique (dite Archimède) à laquelle s'oppose notamment une force de frottement visqueux. L'approximation de **Boussinesq** consiste à négliger les variations de la masse volumique dans les équations de conservation, sauf son implication comme force motrice dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement

La pression dans le fluide en mouvement s'écrit :

$$\bar{p} = \bar{p}_m + \bar{p}_{hy} \quad (\text{II.11})$$

Avec :  $\bar{p}_m$  la pression générée par le mouvement

$\overline{p_{hy}}$  La pression hydrostatique

$$\text{Tel que : } \vec{\nabla} \overline{p_{hy}} = \rho \vec{g} \quad (\text{II.12})$$

Et l'équation transversale s'écrit donc :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = \gamma \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \beta g (\bar{T} - T_f) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{II.13})$$

## II.5 FORMULATION ADIMENSIONNELLE :

L'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesure, pour rendre la solution plus générale d'un côté et d'un autre pour réduire le nombre de paramètres d'un problème.

Il est nécessaire d'introduire les grandeurs de référence comme ceci :

$$X = \frac{\bar{x}}{L} \quad , \quad Y = \frac{\bar{y}}{L} \quad , \quad U = \frac{\bar{u}}{V} \quad , \quad V = \frac{\bar{v}}{V} \quad , \quad P = \frac{\bar{p}}{\rho_2 V^2} \quad , \quad T = \frac{T - T_f}{T_C - T_f}$$

Les équations précédentes deviennent respectivement :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.14})$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.15})$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{Re^2} T \quad (\text{II.16})$$

$$U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{Re Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.17})$$

Les principales paramètres de contrôle du problème étudié tels que  $Pr$ ,  $Re$  et  $Gr$  dénotent, respectivement, les nombres de Prandtl, de Reynolds, et de Grashof qui sont définis par les relations suivantes :

$$Pr = \frac{\gamma}{\alpha} \quad , \quad Re = \frac{VL}{\gamma} \quad , \quad Gr = \frac{g\beta L^3 (T_C - T_f)}{\gamma^2}$$

Les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
 Y = 0; \quad U = V; \quad V = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = 0 \quad ; \quad 0 \leq X \leq l \\
 Y = l; \quad U = V; \quad V = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = 0 \quad ; \quad 0 \leq X \leq l \\
 X = 0; \quad U = V = 0; \quad \bar{T} = T_f \quad ; \quad 0 \leq Y \leq l \\
 X = l; \quad U = V = 0; \quad \bar{T} = T_c \quad ; \quad 0 \leq Y \leq l
 \end{aligned}$$

En termes de flux les équations du mouvement s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

$$\operatorname{div} u \vec{V} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} u})$$

$$\operatorname{div} v \vec{V} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} v}) + \frac{Gr}{Re^2} T$$

$$\operatorname{div} T \vec{V} = \frac{1}{Re} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} T})$$

## II.6. Calcul du nombre de Nusselt moyen :

Le nombre de Nusselt caractérise les échanges thermiques au niveau d'une section droite donnée. la valeur local du nombre de Nusselt est donnée par :

$$Nu_y = -\frac{1}{A} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w / (T_f - T_c) \quad (\text{II.18})$$

Le nombre de Nusselt moyenne ce calcule par l'intégration du nombre de Nusselt locale :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int_0^1 Nu_y dy \quad (\text{II.19})$$

La fonction de courant caractérise l'intensité de la circulation des profils de vitesse dans la cavité, La fonction du courant est calculée à partir du système différentiel :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} ; \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Avec  $\Psi = 0$  a la frontière du domaine choisie de façon arbitraire.

**Conclusion :**

Dans le présent chapitre, nous avons établi pour le problème traité le modèle Mathématique. Ce dernier est constitué d'un système d'équations, complétées par des conditions aux limites. Il s'agit d'un système complexe formé par des équations qui sont issues de la thermodynamique et de la mécanique des fluides. Les équations de bilan sont donc connues mais :

- La résolution analytique de ces équations de bilan n'est pratiquement jamais réalisable;
- Les non-linéarités visibles dans les équations sont principalement à l'origine des Difficultés pour obtenir une solution analytique.

Donc, l'utilisation des méthodes numériques s'avère indispensable pour la résolution des Équations du modèle mathématique. Dans notre étude, on a utilisé le logiciel FLUENT (version 6.3.26) basé sur la méthode numérique des volumes finis.

### III.1. Introduction :

La résolution des équations d'un phénomène physique de convection thermique se fait par l'utilisation d'une méthode numérique. Cette dernière consiste à développer les moyens de la résolution de ces équations. A cette étape, intervient le concept de la discrétisation. Le résultat de la discrétisation des équations différentielles de transport est un système d'équations algébriques non linéaires, ces équations décrivent les propriétés discrètes du fluide aux nœuds dans le domaine de solution.

Il existe plusieurs méthodes numériques de discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles, à savoir :

- La méthode des éléments finis,
- La méthode des différences finies,
- La méthode des volumes finis.

Dans la présente étude, on utilisera la méthode des volumes finis. Le schéma de discrétisation employé est de type polynomial et le couplage vitesse-pression est calculé selon l'algorithme SIMPLE développée par Spalding et Patankar. Sa grande simplicité de mise en œuvre a fait qu'elle a connu un essor depuis les années 1970-1980. Elle est à l'origine de la majorité des logiciels de calculs (Phoenics, Fluent, CFD,...). La méthode des volumes finis qui se distingue par sa fiabilité quant aux résultats, son adaptation au problème physique, sa garantie pour la conservation de masse et de quantité de mouvement et de tout scalaire transportable sur chaque volume de contrôle et dans tout le domaine de calcul, ce qui n'est pas le cas pour les autres méthodes numériques.

### III.2. Procédure numérique :

Afin de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles établies dans le chapitre précédent, nous allons procéder à leurs discrétisations dans le but d'obtenir un système d'équations algébriques dont la résolution nous permet de déterminer les champs de toutes les variables du problème considéré. La méthode de volumes finis a été adoptée pour accomplir cette discrétisation, et l'utilisation de l'algorithme SIMPLE pour la correction de pression sur un maillage non uniforme.

La méthode des volumes finis a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar, le principe de méthode des volumes finis baser sur une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. Le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés volume de contrôle,

Chacun de ces derniers englobe un nœud dit nœud principal, comme indiqué dans la Figure (III-1).

La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle.

Les différentes étapes de la méthode des volumes finis sont :

- La discrétisation du domaine considéré en volume de contrôle;
- La formulation intégrale des équations différentielles aux dérivées partielles;
- Écriture des équations algébriques aux nœuds du maillage ;
- Résolution du système algébrique linéaire obtenu.

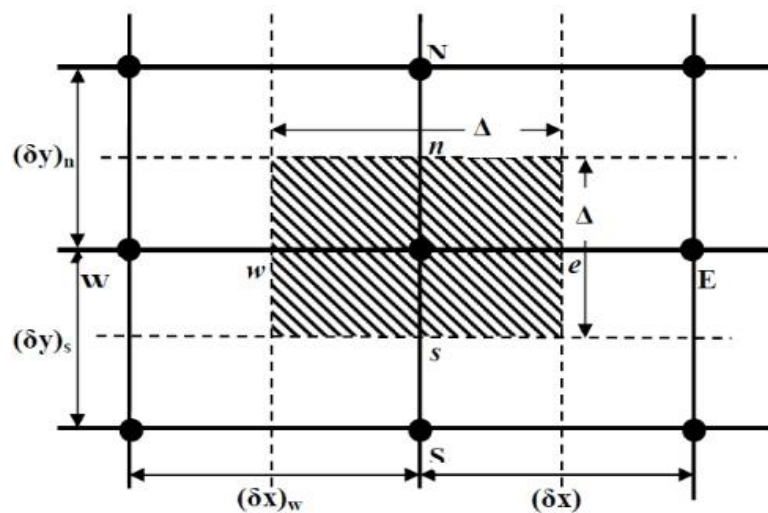


Figure III-1 : Volume de contrôle bidimensionnel

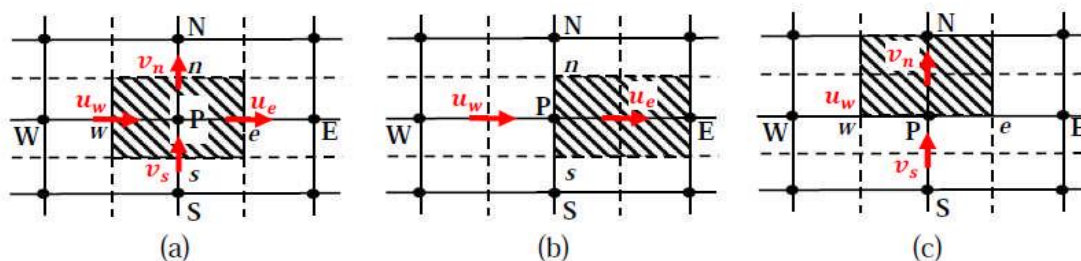


Le volume de contrôle est montré par la Figure III-1, Pour un nœud principal P, les points E et W (Est et Ouest) sont des voisins dans la direction x, tandis que N et S (Nord et Sud) sont ceux dans la direction y. Le volume de contrôle entourant P est montré par les lignes discontinues. Les faces du volume de contrôle sont localisées aux points  $e$  et  $w$  dans la direction x,  $n$  et  $s$  dans la direction y.

Dans cette mémoire la résolution de problème est effectuée par le logiciel FLUENT, basé sur la méthode des volumes finis, utilisant le schéma Upwind second ordre pour la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement et la discrétisation de l'équation d'énergie.

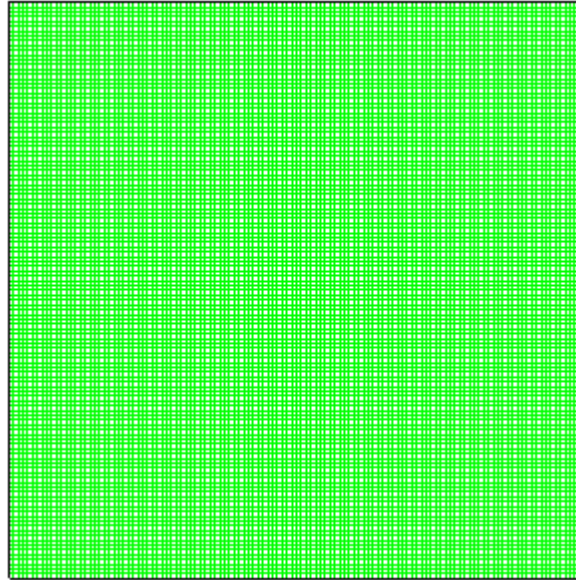
### III.3. Maillage :

C'est la subdivision du domaine d'étude en grilles longitudinales et transversales dont l'intersection représente un nœud, où on trouve la variable P et les composantes u et v du vecteur de vitesse qui se trouve au milieu des segments reliant deux nœuds adjacents. La discrétisation du domaine est obtenue par un maillage constitué d'un réseau de points. Ainsi, un élément de volume de contrôle est défini autour de chaque nœud. Les grandeurs scalaires pression et température sont stockées dans le nœud P du maillage (Figure III-2 (a)), tandis que les grandeurs vectorielles u et v sont stockés aux milieux des segments reliant les nœuds. L'équation générale du transport est intégrée sur le volume de contrôle associé aux variables scalaires et les équations de quantité de mouvement sont intégrées sur le volume de contrôle associé aux composantes de vitesse.



*Figure III-2 : Schéma du maillage (a) maillage décalé pour  $u_e$  (b) et maillage décalé Pour  $v_n$  (c).*

Dans ce mémoire nous avons opté pour un maillage uniforme dans les deux directions, horizontal et vertical comme le montre la Figure III-3. On a construit plusieurs maillage de différent nombre nœuds, à chaque fois on compare les résultats entre eux, à partir de la grille 81×81.



*Figure III-3 : Maillage de l'enceinte.*

#### III.4. La discrétisation :

En termes de flux les équations du mouvement s'écrivent sous forme adimensionnelle :

$$\text{div}\vec{V} = 0$$

$$\text{div}u\vec{V} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}u})$$

$$\text{div}v\vec{V} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}v}) + \frac{Gr}{\text{Re}^2}$$

$$\text{div}T\vec{V} = \frac{1}{\text{RePr}} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}T})$$

Où les grandeurs adimensionnelles sont définies par :

$$\text{Re} = \frac{V_p L}{\gamma} \quad ; \quad \text{Pr} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad ; \quad Gr = \frac{g\beta L^3 (T_c - T_f)}{\gamma^2}$$

L'intégration dans un volume de contrôle donne :

$$\int_{vc} \text{div} \vec{V} dv = 0$$

$$\int_{vc} \text{div} u \vec{V} dv = - \int_{vc} \frac{\partial p}{\partial x} dv + \frac{1}{\text{Re}} \int_{vc} \text{div}(\overline{\text{grad} u}) dv$$

$$\int_{vc} \text{div} v \vec{V} dv = - \int_{vc} \frac{\partial p}{\partial x} dv + \frac{1}{\text{Re}} \int_{vc} \text{div}(\overline{\text{grad} v}) dv + \frac{\text{Gr}^2}{\text{Re}} \int_{vc} T dv$$

$$\int_{vc} \text{div} T \vec{V} dv = \frac{1}{\text{Re Pr}} \int_{vc} \text{div}(\overline{\text{grad} T}) dv$$

En utilisant le théorème de divergence et de Green donne :

$$\int_{sc} \vec{V} \vec{n} ds = 0$$

$$\int_{sc} u(\vec{V} \vec{n}) ds = - \int_{sc} p \vec{n}_x ds + \frac{1}{\text{Re}} \int_{sc} (\overline{\text{grad} u}) \vec{n} ds$$

$$\int_{sc} v(\vec{V} \vec{n}) ds = - \int_{sc} p \vec{n}_y ds + \frac{1}{\text{Re}} \int_{sc} (\overline{\text{grad} v}) \vec{n} ds + \frac{\text{Gr}^2}{\text{Re}} \int_{sc} T v ds$$

$$\int_{sc} T(\vec{V} \vec{n}) ds = \frac{1}{\text{Re Pr}} \int_{sc} (\overline{\text{grad} T}) \vec{n} ds$$

En supposant la SC composée d'entrées et sorties 1-D :

$$\begin{aligned}
& (u_{I+1,J} - u_{I,J}) dy + (v_{I,J+1} - v_{I,J}) dx = 0 \\
& (u_{I,J} dy) u_{I,J} - (u_{I-1,J} dy) u_{I-1,J} + (v_{I,J+1} dx) u_{I,J+1} + (v_{I,J} dx) u_{I,J} = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{I,J} dy - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{I-1,J} dy + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{I,J+1} dx - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{I,J} dx \right] + (p_{I-1,J} - p_{I,J}) dy \\
& (u_{I+1,J} dy) v_{I+1,J} - (u_{I,J} dy) v_{I,J} + (v_{I,J} dx) v_{I,J} + (v_{I,J-1} dx) v_{I,J-1} = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{I+1,J} dy - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{I,J} dy + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{I,J} dx - \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{I,J-1} dx \right] + \frac{Gr}{\text{Re}^2} T_{I,J} dx dy + (p_{I,J-1} - p_{I,J}) dy \\
& (u_{I+1,J} dy) T_{I+1,J} - (u_{I,J} dy) T_{I,J} + (v_{I,J+1} dx) T_{I,J+1} - (v_{I,J} dx) T_{I,J} = \\
& \frac{1}{\text{Re Pr}} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{I+1,J} dy - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{I,J} dy + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{I,J+1} dx - \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{I,J} dx \right]
\end{aligned}$$

Avec :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{I,J} dy = \frac{dy}{dx} (u_{I+1,J} - u_{I,J}) ; \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{I-1,J} dy = \frac{dy}{dx} (u_{I,J} - u_{I-1,J})$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{I,J} dx = \frac{dx}{dy} (u_{I,J} - u_{I,J-1}) ; \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{I,J+1} dx = \frac{dx}{dy} (u_{I,J+1} - u_{I,J})$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{I+1,J} dy = \frac{dy}{dx} (v_{I+1,J} - v_{I,J}) ; \quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{I,J} dy = \frac{dy}{dx} (v_{I,J} - v_{I-1,J})$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{I,J-1} dx = \frac{dx}{dy} (v_{I,J} - v_{I,J-1}) ; \quad \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{I,J} dx = \frac{dx}{dy} (v_{I,J+1} - v_{I,J})$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{I+1,J} dy = \frac{dy}{dx} (T_{I+1,J} - T_{I,J}) ; \quad \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{I,J} dy = \frac{dy}{dx} (T_{I,J} - T_{I-1,J})$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{I,J+1} dx = \frac{dx}{dy} (T_{I,J+1} - T_{I,J}) ; \quad \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{I,J} dx = \frac{dx}{dy} (T_{I,J} - T_{I,J-1})$$

### III.5. Formulation générale du problème :

Les équations peuvent être réarrangées sous la forme générale suivante :

- **Equation du Continuité :**

$$F_{i+1,j}^u - F_{i,j}^u + F_{i,j+1}^v - F_{i,j}^v = 0 \quad (\text{III.20})$$

- **Equation du mouvement :**

$$a^u u_{i,j} = b^u u_{i+1,j} + c^u u_{i-1,j} + d^u u_{i,j+1} + e^u u_{i,j-1} + (P_{i-1,j} + P_{i,j}) dy \quad (\text{III.21})$$

$$a^v u_{i,j} = b^v v_{i+1,j} + c^v v_{i-1,j} + d^v v_{i,j+1} + e^v v_{i,j-1} + \frac{Gr}{Re^2} (T_{i,j} + T_{i-1,j}) dx dy + (-P_{i-1,j} + P_{i,j}) dy \quad (\text{III.22})$$

- **Equation de l'énergie :**

$$a^T T_{i,j} = b^T T_{i+1,j} + c^T T_{i-1,j} + d^T T_{i,j+1} + e^T T_{i,j-1} \quad (\text{III.23})$$

On note que : les valeurs de (a, b, c, d, e) sont données suivant le schéma de calcul utilisé.

### III.6. Procédure de Résolution :

Le résultat de la discrétisation des équations différentielles de transport est un ensemble d'équations algébriques non linéaires. Si on divise le domaine de calcul en N mailles selon x et en M mailles selon y, on aura un système de N×M équations algébriques non linéaire pour chaque variable considérée. Rappelons que les variables, dans notre problème, sont la Température T, les deux composantes de la vitesse u et v. et la variation de p

la discrétisation de l'équation de continuité et du gradient de pression avec l'utilisation d'une interpolation linéaire peut induire des erreurs importantes du fait qu'une répartition de pression ou de vitesse est vue comme un champ uniforme. Pour contourner ces difficultés on préfère utiliser des grilles décalées "staggered grid". Une grille principale est construite sur laquelle on calcule la pression, la température. Deux grilles décalées vers la droite et vers le haut respectivement sont utilisées pour le calcul des vitesses horizontale et verticale.

L'algorithme SIMPLE, acronyme pour « Semi-Implicit Method for Pressure Linked-Equations » permet de résoudre le système d'équations discrétisées. Cet algorithme stipule l'existence d'une relation entre les vitesses corrigées et les pressions corrigées, en vue de vérifier l'équation de conservation de la masse.

### III.6.1. Equation algébrique de pression :

Lorsque le champ de pression est connu, le champ de vitesse est obtenu directement par la résolution des équations de quantité de mouvement. Dans le cas où ce champ est inconnu, L'établissement d'une équation de pression est nécessaire.

Dans l'équation de quantité de mouvement, les termes  $u$  et  $v$  représente les composantes de la vitesse, qui doivent satisfaire l'équation de continuité. Le but est de chercher des champs corrects de pression dans le volume de contrôle. L'intégration de l'équation générale de transport pour  $u$  et  $v$  sur les deux volumes de contrôle spécifiques aux composantes de vitesse donne les équations suivantes :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b_e + A_e (P_P - P_E) \quad (\text{III.24})$$

$$a_e v_e = \sum a_{nb} v_{nb} + b_e + A_e (P_P - P_E) \quad (\text{III.25})$$

Avec  $b_e$  contient tous les termes source de l'équation, sauf ceux de la pression, Le terme  $A_e = (P_P - P_E)$  représente les forces de pression et  $A_i$  sont les surfaces  $i = (e, w, n, s)$ .

L'étape de prédiction consiste à donner un champ de pression  $p^*$  pour obtenir des valeurs estimées de la vitesse  $u^*$  et  $v^*$  à partir des équations suivantes :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b_e + A_e (P_P^* - P_E^*) \quad (\text{III.26})$$

$$a_e v_e = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b_e + A_e (P_P^* - P_E^*) \quad (\text{III.27})$$

Les vitesses  $u$  obtenues à partir d'équation (III.24) en utilisant la distribution correcte de la pression  $p$  (mais généralement inconnue) satisfait la condition de continuité, alors que les vitesses  $u^*$  de l'équation (III.25) en général violent cette

condition. La correction de la pression estimée par  $p' = p - p^*$  est donc nécessaire pour corriger le champ  $u^*$  par  $u' = u - u^*$ . La relation entre  $p'$  et  $u'$  est obtenue par soustraction d'équation (III.25) d'équation (III.24) :

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u_{nb} A_e (P'_P - P'_E) \quad (\text{III.28})$$

$$a_e v'_e = \sum a_{nb} v_{nb} A_e (P'_P - P'_E) \quad (\text{III.29})$$

La pression  $p$  et les vitesses  $u$  qui satisfont les équations de la masse et de quantité de mouvement sont :

$$u = u^* + u' \quad (\text{III.30})$$

$$v = v^* + v' \quad (\text{III.31})$$

$$p = p^* + p' \quad (\text{III.32})$$

L'attention est maintenant tournée sur la méthode employée pour trouver  $p'$ .

L'équation exacte pour  $p'$ , dérivée d'équations (III.28) et (III.30) et de la condition de continuité, est compliquée et peu convenable pour des calculs économiques. Le procédé **SIMPLE** donne une équation plus appropriée, en négligeant le terme souligné dans l'équation (III.28). La Combinaison entre l'équation simplifiée (III.28) et l'équation (III.30) donne :

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_P - p'_E) \quad (\text{III.33})$$

$$v_e = v_e^* + d_e (P'_P - P'_E) \quad (\text{III.34})$$

Ou  $d_e = \frac{A_e}{a_e}$

L'équation de continuité pour le volume de control montré dans la figure [III.2. (a)] est :

$$(\rho u A)_w - (\rho u A)_e + (\rho v A)_s - (\rho v A)_n = 0 \quad (\text{III.35})$$

### III.6.2. Algorithme SIMPLE

L'algorithme SIMPLE est une procédure de prédiction correction, avec laquelle il nous sera possible de tirer un champ de pression et de vitesse vérifiant à la fois les équations de quantité de mouvement et celle de continuité.

Cet algorithme résume la résolution du problème posé dans les séquences suivantes :

- Estimer le champ de pression  $p^*$ ,
- Calculer les coefficients pour les équations de quantité de mouvement et déterminer les vitesses  $u^*$  et  $v^*$ ,
- Calculer les coefficients pour l'équation de pression et obtenir le champ de pression,
- Corriger le champ de vitesse, en utilisant des équations comme équation (III.33). Corriger le champ de pression en utilisant équation (III.32), avec la modification discutée dans le paragraphe suivant (le paragraphe ci-dessous).
- employant le  $p$  trouvé dans l'étape 4 comme nouveau  $p^*$ , revenir à l'étape 2. Faire un cycle par cette boucle jusqu'à ce que la convergence soit réalisée. Pour obtenir l'équation (III.33) de l'équation (III.29), le terme  $\sum a_{nb} u'_{nb}$  doit être négligé, cette approximation résulte des valeurs de  $p'$  trop grandes, et ceci cause une convergence lente ou divergence du cycle décrit ci-dessus. Pour remédier cela, Patankar a supposé une valeur de  $\alpha_p$  dans la gamme de (0.3-0.8), et une sous-relaxation de la correction de pression en remplaçant l'équation (III.32) par :

$$P = P^* + \alpha_p P'$$

### III.6.3. Critère de convergence :

La convergence est quantifiée par l'intermédiaire de résidus normalisés (définis pour chaque grandeur  $\Phi$  comme la somme, sur tous les volumes de contrôles, des erreurs sur le bilan de  $\Phi$  rapportée à la somme des termes de l'équation discrétisée qui concernent le centre des volumes). Ils permettent de suivre la convergence des calculs au fur et à mesure des itérations. Ce résidu est défini par :

$$|\Phi^k - \Phi^{k-1}| < 10^{-4} \quad (\text{III.36})$$



Le procédé itératif est lancé par la solution de l'équation d'énergie suivie par les équations de quantité de mouvement et est continué jusqu'à ce que la convergence soit réalisée. Les résidus normalisés doivent être inférieurs à  $10^{-4}$  et des itérations supplémentaires ne doivent pas modifier les résultats une fois la convergence atteinte.

## **Conclusion**

A travers ce chapitre, nous avons présenté brièvement la méthode de volume fini, les étapes de transformations et de résolution des équations algébriques issues de système physique.

Une résolution numérique bidimensionnelle des équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de la chaleur a été mise en œuvre pour simuler la circulation de l'air et le champ de température, La résolution est effectuée par le logiciel FLUENT basé sur la méthode des volumes finis.

Le logiciel FLUENT propose un nombre assez important d'options qui déterminent la forme des équations de bilan et des équations de transport des scalaires supplémentaires.

### IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à l'étude numérique de la convection Mixte dans la géométrie considérée.

Le paramètre qui gouverne ce problème c'est le nombre de Richardson,  $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$

Qui caractérise le rapport des forces convectives aux forces de poussée. Le nombre de Grashof est fixé à  $Gr = 1.37 \cdot 10^4$ , valeur imposée par les données physiques du problème. La variation du nombre de Richardson se faisant alors à travers la variation du nombre de Reynolds.

L'étude s'est faite avec des nombre de Richardson variant entre 0.1 et 10.

### IV.2. Résultats:

La configuration étudiée est une enceinte carrée contenant de l'air comme fluide. Les Parois supérieur et inférieur de l'enceinte sont adiabatiques. Les parois latérales sont mobiles se meuvent à une vitesse constante, et sont maintenues aux températures  $T_f = 273K$  et  $T_f = 278.4 K$

Le modèle mathématique utilisé ainsi que la procédure de simulation numérique ayant été décrits en détail dans les chapitres précédents, ils sont rappelés brièvement ci-après:

Les équations gouvernantes de cet écoulement sont l'équation de continuité, Les équations de Navier stokes et l'équation de l'énergie. Toutes ces équations ont été discrétisées par la méthode des volumes finis en utilisant le schéma "upwind second ordre" et par la suite résolues avec l'algorithme SIMPLE. Pour ce travail, un maillage de 81x81 mailles a été utilisé.

### IV.2.1 Premier cas (convection mixte contrariée):

La paroi latérale gauche maintenue à la température  $T_f$  se déplace vers le haut avec une vitesse  $V_p$  constante et celle de gauche vers le bas et avec la même vitesse. Ce cas correspond à une convection mixte contrariée (convection forcée et poussée agissent dans des sens opposés).

- **Champs dynamiques :**

Pour  $Ri=0.1$  on remarque que les force convective domine l'écoulement dans la cavité et que la circulation du fluide est générée par le déplacement des parois latérales, Le mouvement de recirculation du fluide se faisant dans le sens des aiguille d'une montre et des petites perturbations se voient en haut de la paroi droite et en bas de la paroi gauche au coin de l'enceinte due à l'impact du fluide au voisinage des parois horizontales.

Pour des  $Ri$  supérieur à 1 on remarque la formation de deux nouvelles cellules secondaires, au voisinage des parois latérales, en plus de la cellule centrale principale. La recirculation du fluide, dans toutes ces cellules, est dans le sens des aiguilles d'une montre. Ceci s'explique par le fait qu'au voisinage des parois l'effet d'entraînement des parois se fait toujours sentir, et que relativement loin des parois la poussée domine.

- **Champs thermique :**

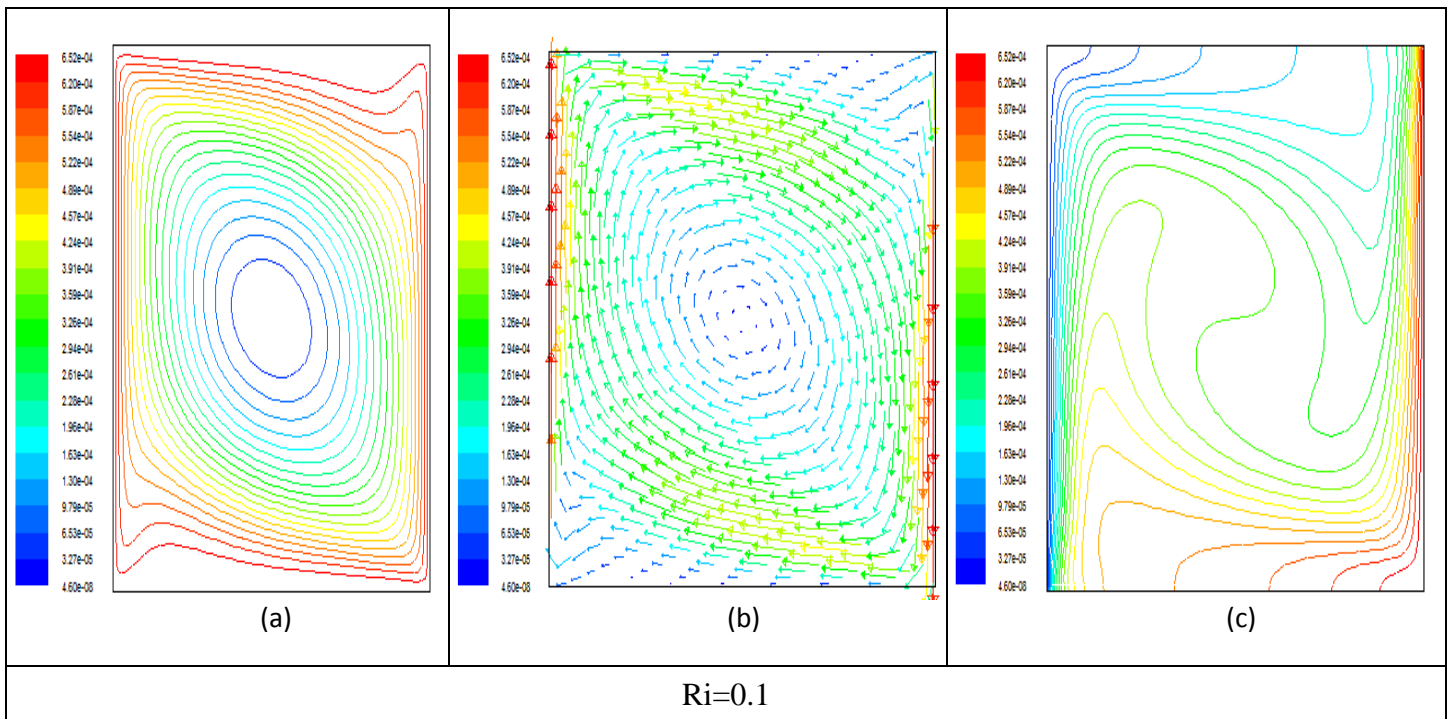
On constate que quand le nombre de Richardson augmente, les gradients horizontaux de température au centre de la cavité diminuent (isothermes pratiquement horizontales) et comme conséquence une diminution du transfert thermique.

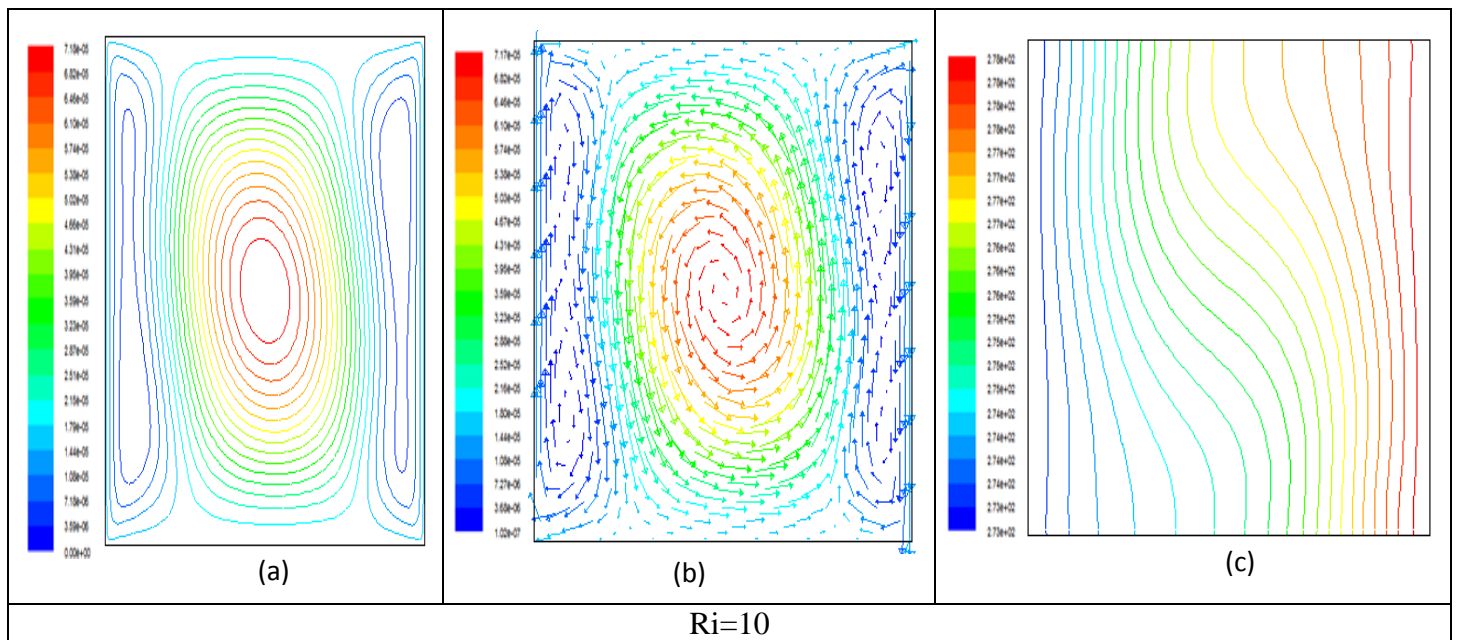
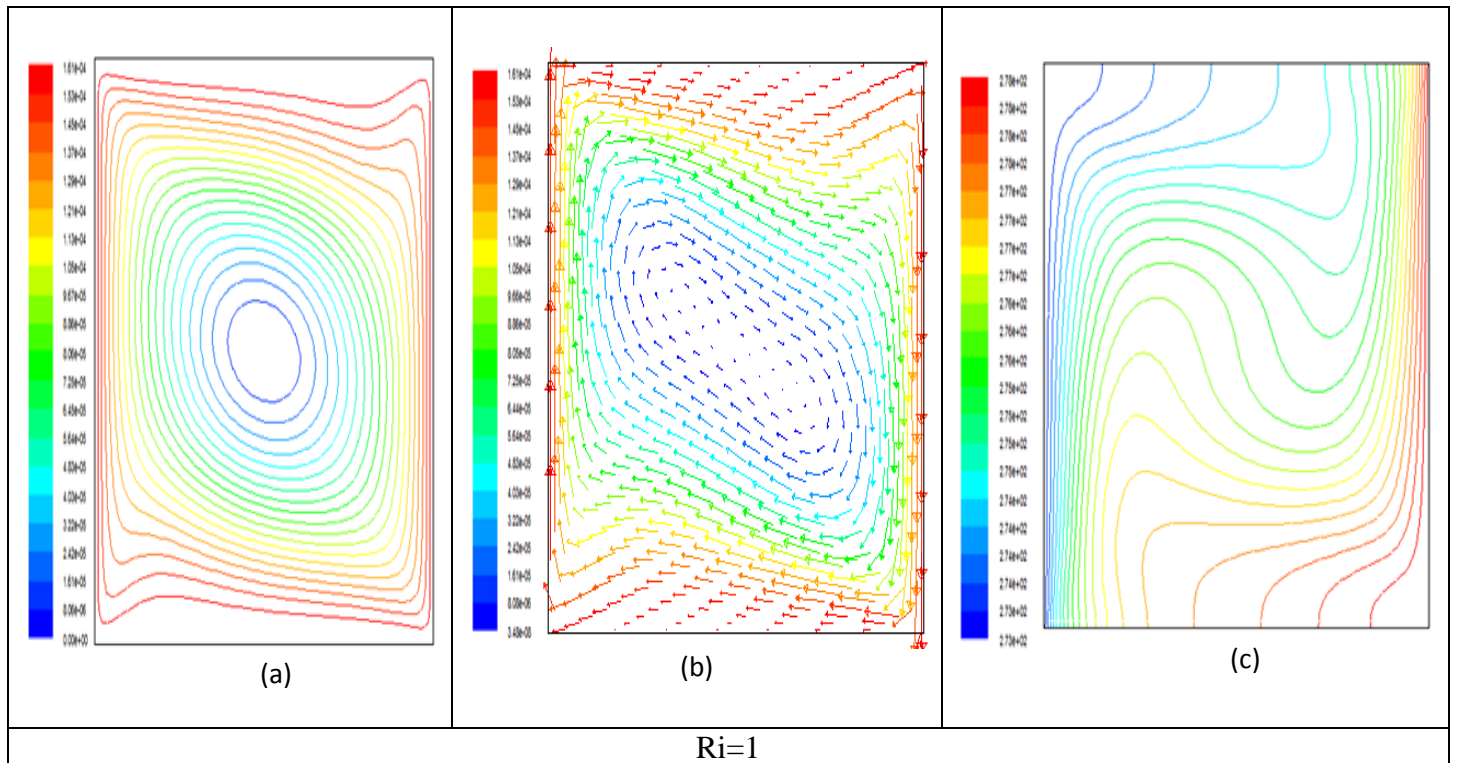
- **Les profils de vitesse à l'axe de symétrie :**

La figure montre que, quand le nombre de Richardson augmente, les profils de vitesses s'aplatissent pour ensuite changer de sens (pour  $Ri$  très grand le sens de recirculation est de la paroi chaude vers la paroi froide).

- **Nombre de Nusselt :**

On remarque que pour nombre de Richardson faible le nombre de Nusselt locale augmente le long de la paroi froide, et donc l'extraction de la chaleur est renforcée. Quand  $Ri$  augmente le nombre Nusselt décroît (la convection naturelle devient dominante et donc un échange thermique faible).





**Figure (IV-4) : (a) ligne de courant (b) vecteur vitesse (c) isothermes pour l'enceint du premier cas**

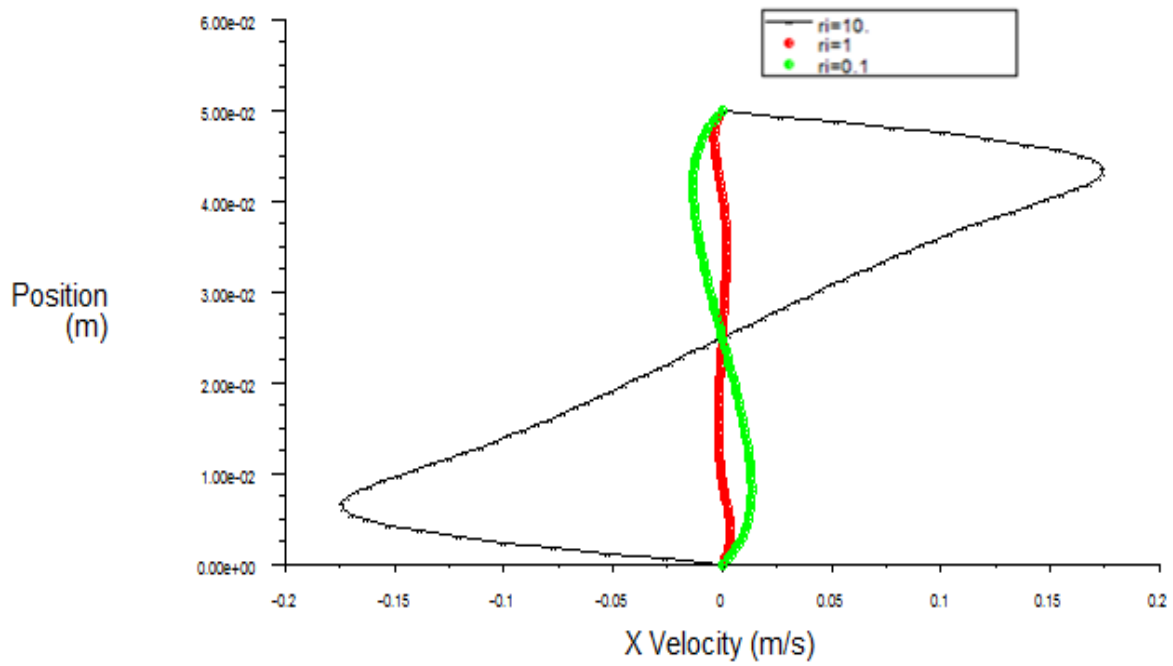


Figure (IV-5) : les profils de vitesse au niveau de la section droite médiane( $x=0.025$ ) donnée pour le premier cas

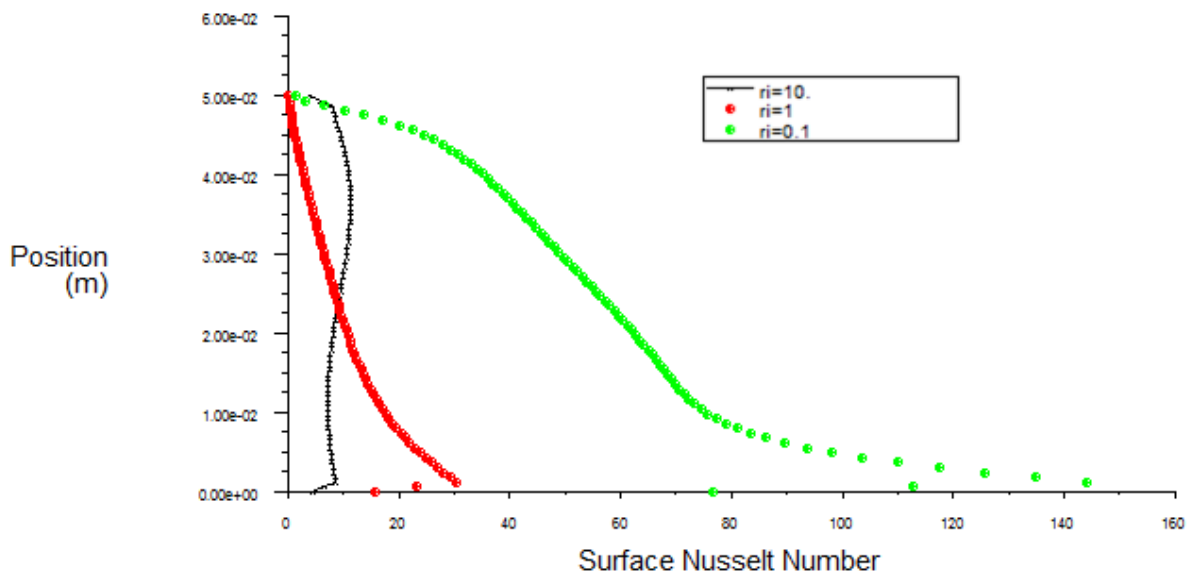


Figure (IV-6) : le nombre de Nusselt locale le long de la paroi froide pour le premier cas

### IV.2.2 Deuxième cas (convection mixte aidée):

Dans ce cas la paroi latéral gauche se déplace vers le bas et la paroi droite se déplace dans le sens contraire (ver le haut) avec des vitesses constant.

- **Champ dynamique :**

Pour  $Ri$  inférieur ou égale à 1, le champ dynamique est une image miroir du cas précédent. Pour  $Ri > 1$  le champ dynamique est pratiquement similaire à celui d'une convection libre.

- **Champ thermique :**

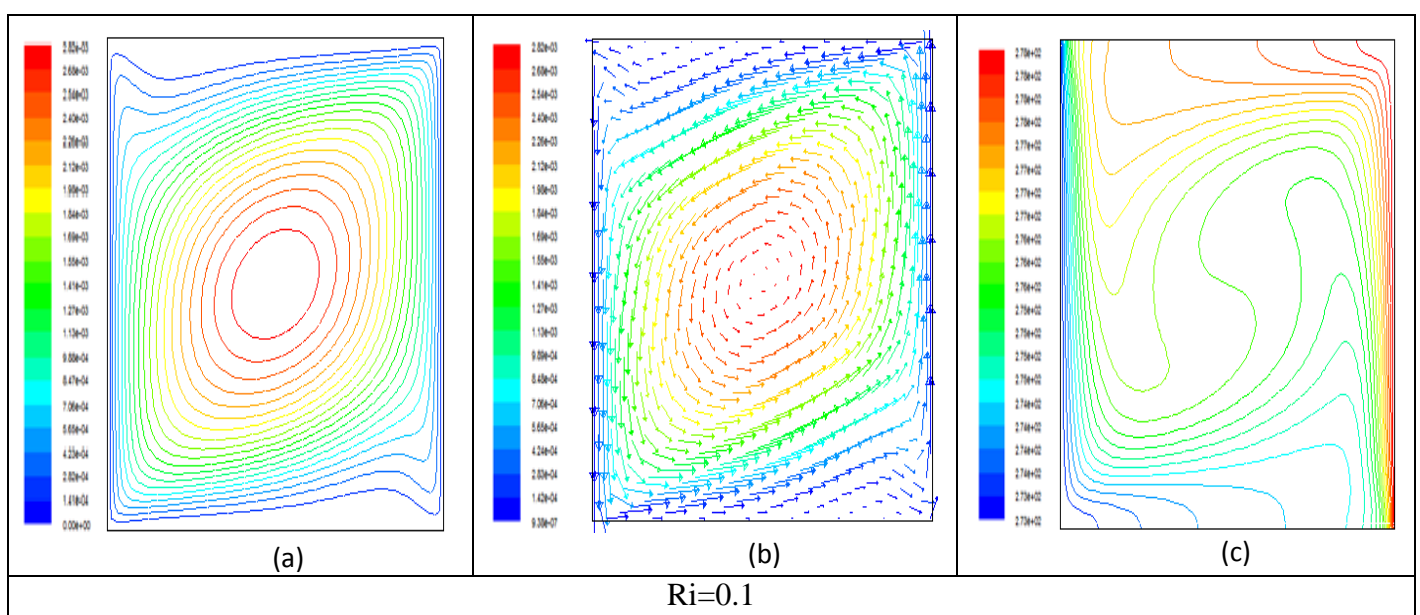
Pour  $Ri$  inférieur ou égale à 1, le champ thermique est une image miroir du cas précédent. Pour  $Ri > 1$  le champ thermique est pratiquement similaire à celui d'une convection libre.

- **Les profils de vitesse à l'axe de symétrie :**

Quand  $Ri$  augmente les profils de vitesse s'aplatissent. Pour de faibles nombre de  $Ri$ , les profils présentent des piques au niveau du bas de la paroi chaude et du haut de la paroi froide.

- **Nombre de Nusselt :**

Le nombre de Nusselt décroît quand  $Ri$  croit car la poussée devient de plus dominante et par conséquent l'échange thermique s'affaiblit.



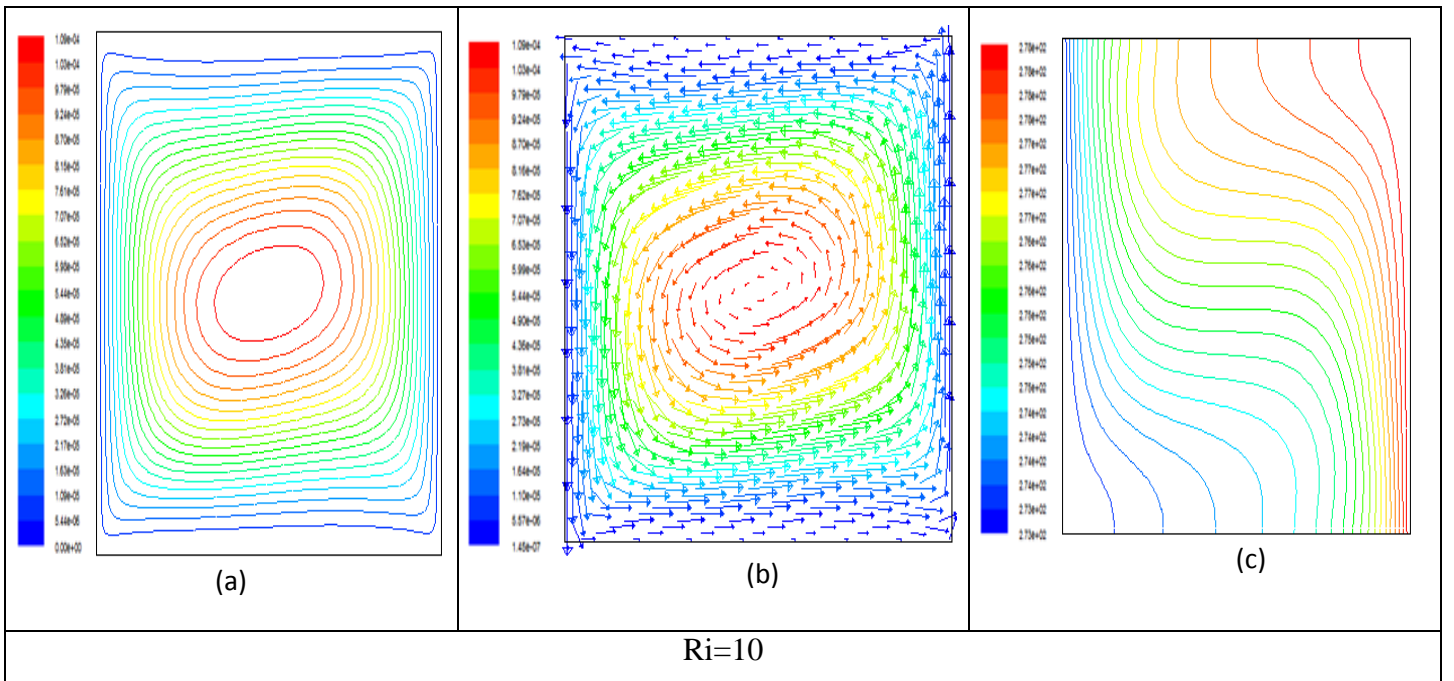
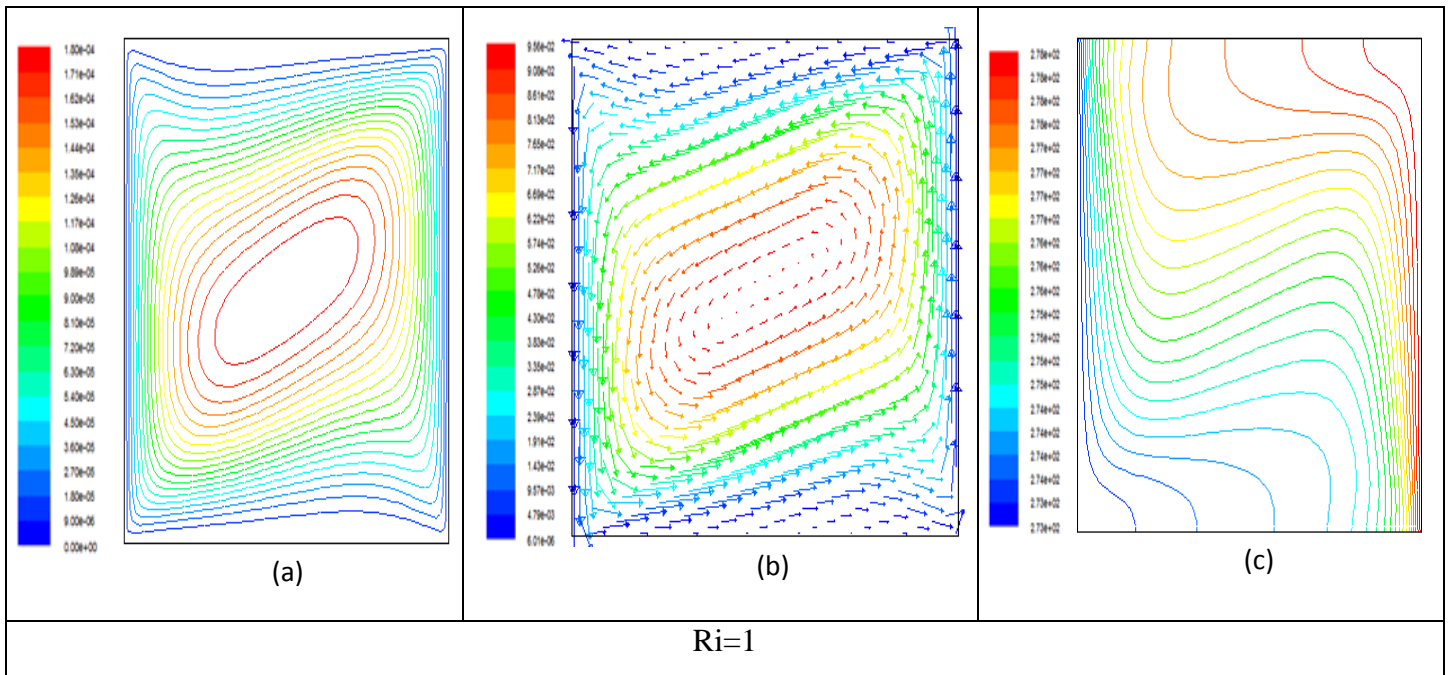


Figure (IV-7) : (a) ligne de courant (b) vecteur vitesse (c) isothermes pour l'encinct du deuxième cas



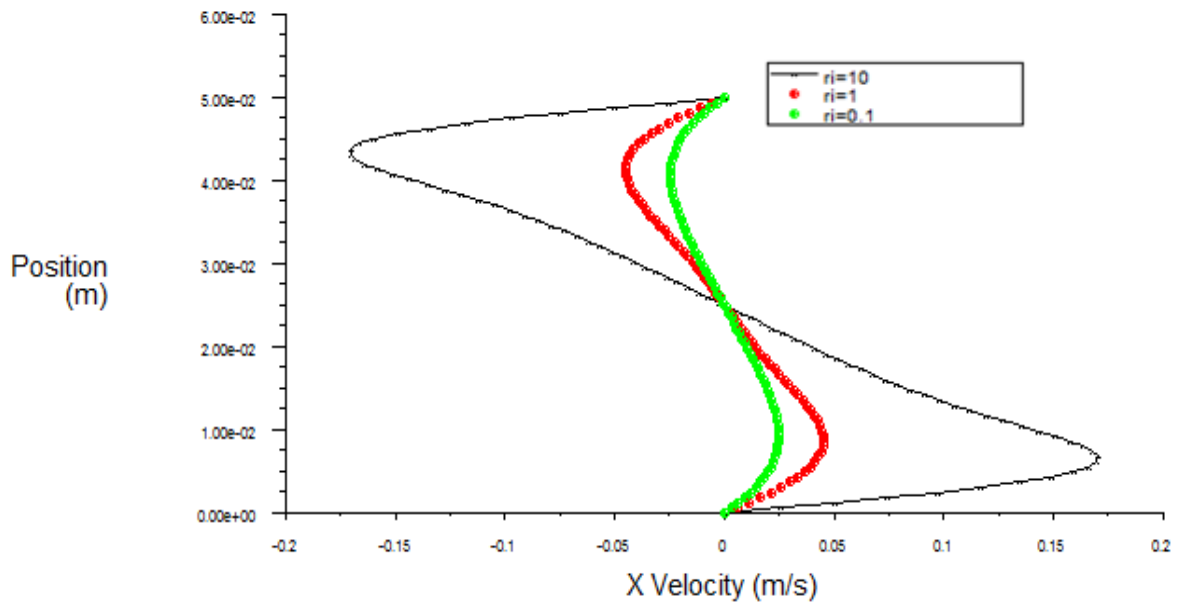


Figure (IV-8) : les profils de vitesse au niveau de la section droite médiane( $x=0.025$ ) donnée pour le deuxième cas

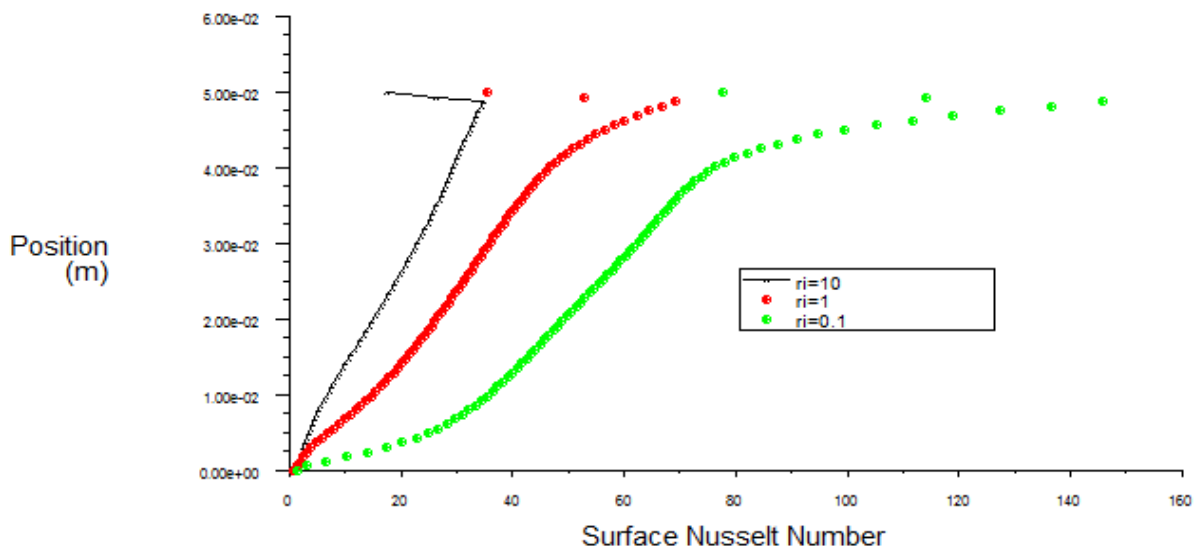


Figure (IV-9) : le nombre de Nusselt locale le long de la paroi froide pour le deuxième cas

### IV.2.3 troisième cas (convection mixte contrariée au niveau de la paroi froide et aidée au niveau de la paroi chaude):

Dans ce cas les parois latérales se déplacent dans le même sens (vers le haut)

- **Champ dynamique :**

On remarque la formation de deux cellules contrarotatives avec la cellule de droite circulant dans le sens contraire des aiguilles de la montre et la cellule à gauche circule dans le sens des aiguilles de la montre, pour  $Ri=0.1$  quand la convection forcée est dominante et l'écoulement est symétrique par rapport à l'axe ( $x=0.025$ ). Ces résultats sont prévisibles car les forces de poussée sont très faibles, Pour  $Ri=1$ , les forces de poussée sont comparables à celles convectives, et affectent donc l'écoulement. Par conséquent la cellule de droite est dominante (plus grand champ d'action). Quand  $Ri$  devient de plus en plus grand, la cellule de gauche se rétrécit jusqu'à disparaître (cas de la convection libre pure).

- **Champ thermique :**

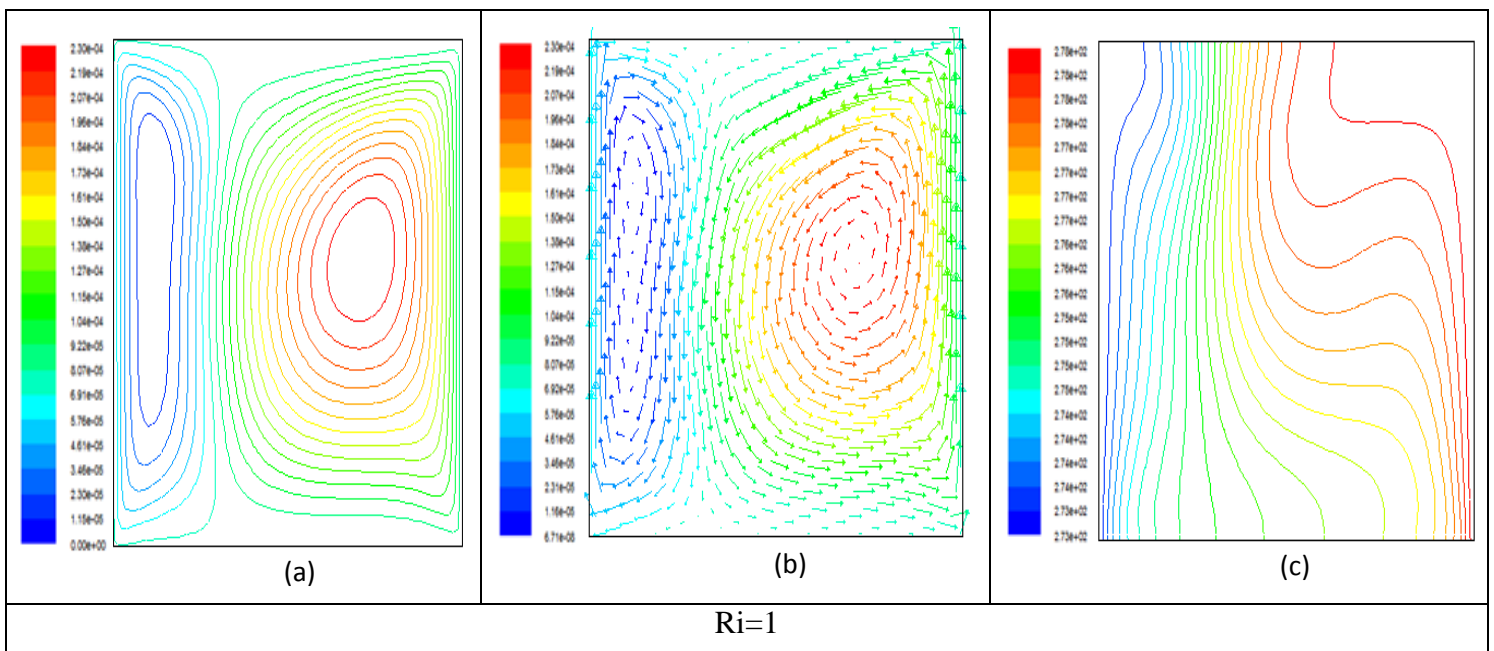
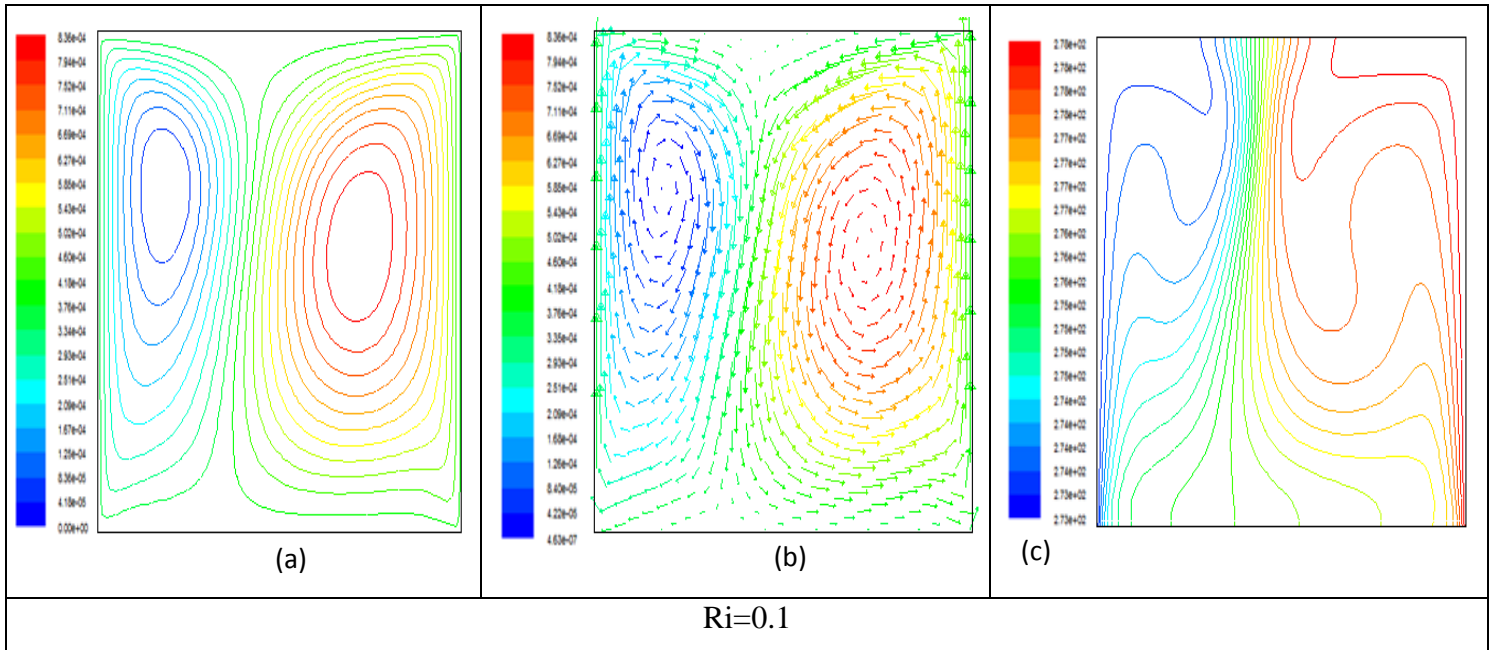
Pour  $Ri = 0.1$  les isothermes sont quasi symétriques avec des gradients de température très prononcés dans la zone de séparation des deux cellules de recirculation. Quand  $Ri$  croît les isothermes deviennent semblables à ceux en convection libre avec de forts gradients thermique près de la partie inférieure de la paroi chauffée.

- **Les profils de vitesse à l'axe de symétrie :**

La magnitude de la composante de la vitesse est plus faible que les deux cas précédents. L'intervalle de variation est de  $-0.06$  à  $0.06$  pour différentes valeurs de  $Ri$ . Ceci est dû au fait que les vitesses des parois sont toutes deux positives. Les profils de vitesse présentent une symétrie par rapport à  $y$  ( $x = 0.5$ ) comme dans les deux cas précédents.

- **Nombre Nusselt :**

Le nombre de Nusselt présente la même tendance que dans les deux cas précédents. Cette décroissance de  $Nu$  en termes de  $Ri$  croissant s'explique par l'effet négatif de la convection au niveau de la paroi froide.



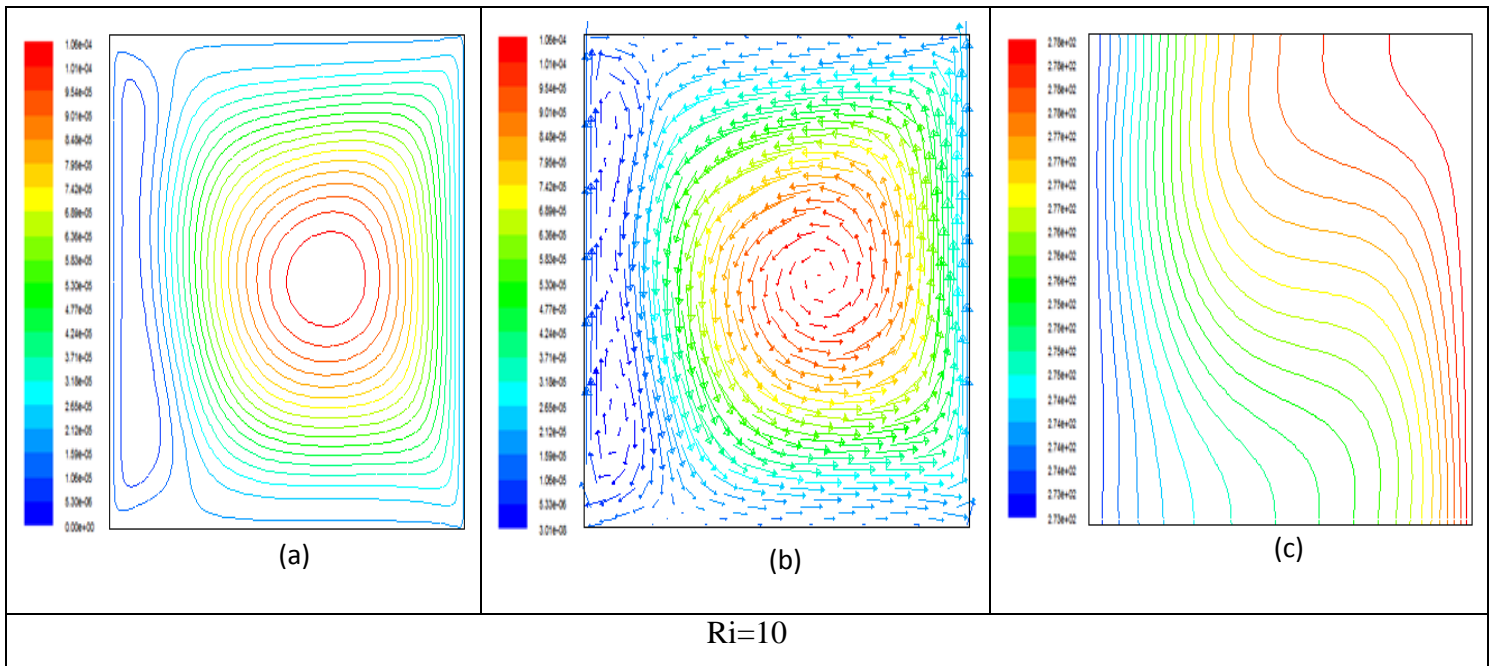


Figure (IV-10) : (a) ligne de courant (b) vecteur vitesse (c)isothermes pour l'enceint du troisième cas

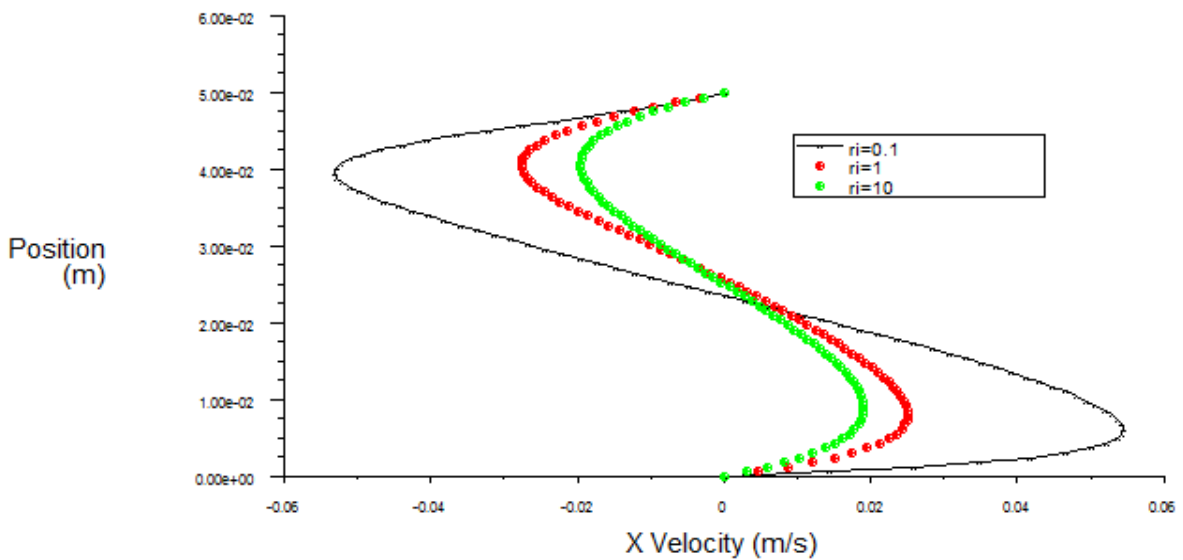
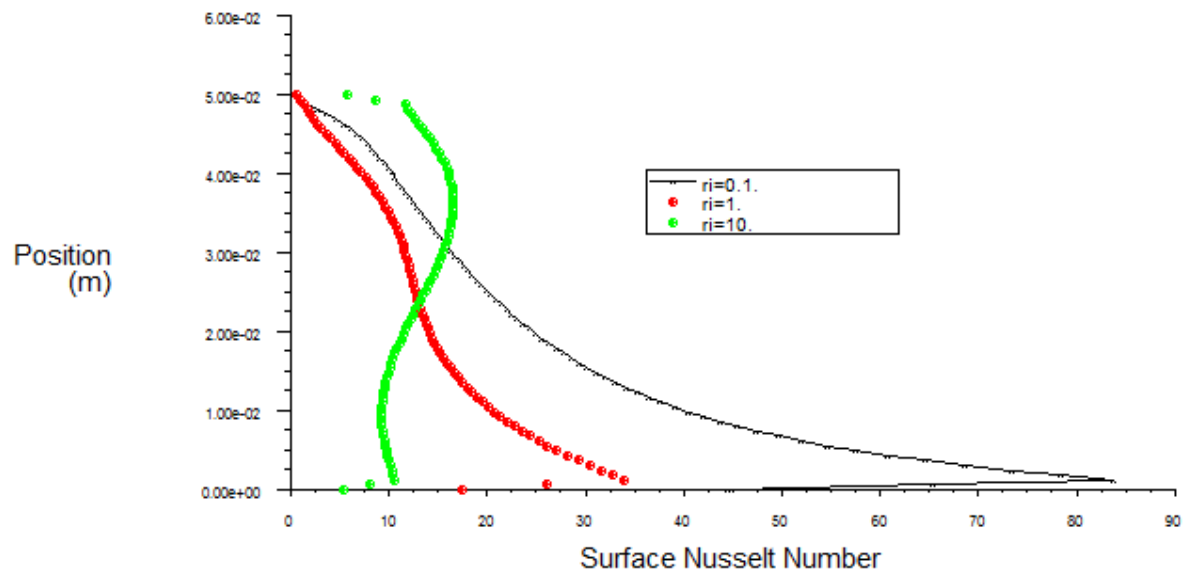


Figure (IV-11) : les profils de vitesse au niveau de la section droite médiaire( $x=0.025$ ) donnée pour le troisième cas



**Figure (IV-12) : le nombre de Nusselt locale le long de la paroi froide pour le troisième cas**

## **NOMENCLATURE**

$A$	Surface de la paroi [ $m^2$ ]
$C_p$	Chaleur spécifique à pression constante [ $J/kg \cdot K$ ]
$g$	Accélération de la pesanteur [ $m/s^2$ ]
$i, j$	Coordonnées logiques des nœuds
$k$	Conductivité thermique [ $W/m \cdot K$ ]
$L$	Hauteur dimensionnelle de la cavité [m]
$\vec{n}$	Normale à la surface
$Nu$	Nombre de Nusselt local
$P$	Pression [Pa]
$P$	Pression adimensionnelle
$T$	Température [K]
$u, v$	Composantes des vitesses [m/s]
$V_0$	Vitesse des parois latérale [m/s]
$U, V$	Composantes adimensionnelles des vitesses
$\bar{x}, \bar{y}$	Coordonnées d'espace dimensionnelles [m]
$U, V$	Coordonnées d'espace adimensionnelles

## **Symboles grecs**

$\alpha$	Diffusivité thermique [m <sup>2</sup> /s]
$\beta$	Coefficient d'expansion thermique à pression constante [1/ K]
$\theta$	Température adimensionnelle
$\emptyset$	Variable dépendante générale
$\gamma$	Viscosité cinématique [m <sup>2</sup> /s]
$\rho$	Masse volumique [kg/m <sup>3</sup> ]
$\psi$	Fonction de courant adimensionnelle
$\mu$	Viscosité dynamique <i>kg/m.s</i>

## **Nombres sans dimensions**

$\overline{Nu}$	Nombre du Nusselt moyen	$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int \frac{\partial \theta}{\partial n} dA$
$Pr$	Nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\gamma}{\alpha}$
$Gr$	Nombre de Grashof	$Gr = \frac{g\beta L^3 (T_c - T_f)}{\gamma^2}$
$Re$	Nombre de Reynolds	$Re = V_0 \frac{L}{\gamma}$
$Ri$	Nombre de Richardson	$Ri = \frac{Gr}{Re^2}$

## **Indices Supérieurs**

*	Valeur estimée
'	Valeur corrigée

## V. Conclusion :

L'étude présentée dans ce mémoire porte sur la convection mixte dans une cavité ayant des parois latérales mobiles avec des vitesses constantes pour différents cas. Alors que l'une des parois latérales est maintenue à une température froide et l'autre à une température chaude. Les autres parties sont considérées adiabatiques.

En se basant sur l'approximation de Boussinesq, on a développé le modèle mathématique décrivant notre problème. On a simulé ensuite la solution avec le logiciel FLUENT pour différentes configurations dynamiques et thermiques de la cavité. Quelles remarques générales peuvent être tirées pour ces différentes configurations :

1. les paramètres gouvernant le transfert de chaleur c'est le nombre de Richardson ( $Ri$ ).  
Pour  $Ri < 1$ , la convection forcée domine l'écoulement et le transfert de chaleur et pour  $Ri > 1$ , la convection naturelle domine l'écoulement, pour  $Ri=1$  c'est la convection mixte.
2. Pour  $Ri < 1$ , quand la convection forcée est dominante comme dans les cas I et II on conclut que le transfert de chaleur se dirige vers le sens du mouvement des parois.
3. Quand les parois latérales se déplacent vers la même direction comme le cas III le transfert de chaleur se diminue dans la cavité par rapport aux autres cas, mais il reste un cas spécial pour  $Ri < 1$ .
4. Pour le cas III la force de flottabilité opposée diminue le transfert de chaleur, et les forces de circulation de fluide se dirigent vers le sens du mouvement des parois.



- [1]. **A.M. Bianchi, Y. Fautrelle, J. Etay.** «Modes fondamentaux de transfert thermique », Int.Transferts thermiques/Première édition, pp. 4–5, (2004).
- [2]. **R. frederik and F. Quiroz.** « On the transition from conduction to convection in a cubical enclosure with a partially heated wall », International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 44 pp. 1699–1709, (2001).
- [3]. **N. Quertatani, N.B. Cheikh, B.B. Beya, T. Lilli, A. Campo.** «Mixed convection in a double lid-driven cubic cavity », International Journal of Thermal Sciences, Vol. 48, Issue 7, pp. 1265–1272, (2009).
- [4]. **A. Baïri.** «Transient thermal characteristics of airborne electronic equipment with discrete hot bands in square cavities », Applied Energy, Vol. 85, pp. 951–967, (2008).
- [5]. **K. Torrance, R. Davis, K .Eike, P. Gill, D. Gutman, A. Hsui, S. Lyons, H. Zien.** «Cavity flows driven by buoyancy and shear », J. Fluid Mech, Vol. 51, Part 2, pp. 221–231, (1972).
- [6]. **M.K. Moallemi, K.S. Jang.** «Prandtl number effects on laminar mixed convection heat transfer in a lid-driven cavity », International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 35 pp. 1881–1892, (1992).
- [7]. **T. Basak, S. Roy, P.K. Sharma, I. Pop.** «Analysis of mixed convection flows within a square cavity with linearly heated side walls », International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 52 pp. 2224–2242, (2009).
- [8]. **K. Kamafer, K. Vafain and M. lightstone.** « Mixed convection heat transfer in two-dimensional open- ended enclosures », International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 45, pp. 5171–5190, (2002).
- [9]. **Mostapha. Najam, Mustapha. El Alami, Mohammed. Hasnaoui, Abdelkhalek. Amahmid.** «Étude numérique de la convection mixte dans une cavité en forme de «T» soumise à un flux de chaleur constant et ventilée par le bas à l'aide d'un jet d'air vertical», Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier, (2002).

- [10]. Tsan. **Hsu, Sheng-Gwo Wang**. « Mixed convection of micropolar fluids in a cavity », International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 1563–1572, (2000).
- [11]. **Hakan F. Oztop, I. Dagtekin**. «Mixed convection in two-sided lid-driven differentially heated square cavity», International Journal of Heat and Mass Transfer Vol. 47, pp. 1761–1769, (2004).
- [12]. **S.K. Mahapatra, Anjan Sarkar**. «Numerical simulation of opposing mixed convection in differentially heated square enclosure with partition», International Journal of Thermal Sciences, Vol. 46, Issue 10, pp. 1761–1769, (2007).
- [13]. **O. Aydin; Wen-Jei Yang**. «Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls», Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 695–710,(2000).
- [14]. **Abdalla M. Al-Amiri a, Khalil M. Khanafer, Ioan Pop**. «Numerical simulation of unsteady mixed convection in a driven cavity using an externally excited sliding lid», European Journal of Mechanics – B/Fluids, Vol. 26, 669–687. (2007).
- [15]. M.A.R. Sharif. « Laminar mixed convection in shallow inclined driven cavities with hot moving lid on top and cooled from bottom », Applied Thermal Engineering, Vol. 27, pp. 1036 – 1042,(2007).
- [16]. **T. S. Cheng, W.H. Liu**. «Effect of Temperature gradient orientation on the characteristics of mixed convection flow in a lid-driven square cavity », Computers and Fluids, Vol. 39, 965–978, (2010).
- [17]. **G. Guo, Muhammad.A.R. Sharif**. « Mixed convection in rectangular cavities at various aspect ratios with moving isothermal sidewalls and constant flux heat source on the bottom wall»,International Journal of Thermal Sciences, Vol. 43, Issue 10, pp. 465–475, (2004)
- [18]. **P. Kandaswamy, J. Lee and M. Muthamilselvan**. «Heat transfer of copper water nanofluids in a lid-driven enclosure», Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, Vol. 15 pp. 1501 – 1510, (2009).
- [19]. **Menace Dalila**. « Étude numérique de la convection mixte dans des cavités phénomène de bifurcation » thèse 2012.
- [20]. **H.F.oztop et I.Dagtekin**. « Mixed convection in two-sided lid-driven differentially Heated square cavity» International Journal of Heat and Mass Transfer 47 (2004) 1761–1769