

*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*



*Université SAAD DAHLEB BLIDA-1-*  
*Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales-IAES*  
*Département de construction aéronautique*

*Mémoire de fin d'études*  
*En vue de l'obtention du diplôme de master en Aéronautique*

Option :  
Structures Aeronautique

*Thème :*

**Analyse des Contraintes Thermomécaniques dans les Plaques Composite  
Croisées Épaisses en Utilisant la méthode d'Ordre Elevée de Reddy**

Réalisé par :

**Amara zakaria**

**Kehel kada djilali**

Encadreur :

**Mr. Boukert Billel .**

Co-Encadreur :

**Mr. Khodjet Kesba Mohamed.**

*Septembre 2019*

## **Remerciements**

*Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH tout puissant de nous avoir donné la force, la santé, le courage et la patience pour la réalisation de ce travail.*

*Nous tenons à remercier notre encadreur, Mr boukert et Mr khodjet pour leurs aides, encouragements et leurs précieux conseils tout au long de notre travail.*

*Nos sincères remerciements vont aussi à monsieur le président et messieurs les membres du jury pour avoir expertisé notre travail et nous avoir honorés par leurs présences.*

*Nous exprimons nos profondes gratitudeux aux enseignants de l'institut de l'Aéronautique de l'Université de Saad Dahleb Blida 1.*

*Un grand merci à nos familles et nos parents en particulier pour leur soutien, leurs encouragements et leurs sacrifices tout au long de notre parcours scolaire.*

*Enfin, Que tous ceux et celles qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail, trouvent ici nos profonds remerciements.*

## ***Dédicace***

*Je dédie ce travail à celle qui m'a donné la vie qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma très chère mère...*

*A mon père, qui a été mon ombre durant toutes mes années d'étude, qui a veillé à me donner de l'aide, à m'encourager et à me protéger, que Dieu le garde et le protège.*

*A mes adorables sœurs qui m'ont donné le sens de la vie, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que Dieu vous protège et vous garde.*

*A ma chère grand-mère et toute ma famille Qui m'ont accompagnées par leurs prières, leur douceur, puisse Dieu leur prêter longue vie et beaucoup de santé et de bonheur.*

*A mon binôme kada et toute la famille kahel.*

*A mes meilleures camarades: Ahmed, Chakib, Foudhil, rabah ,ousamma, Billel, Mustapha, Nazi, Ali, Hocine, Farid ,Imad ,Walid et Alim, sami.*

*Une spéciale dédicace aux ceux qui je partage avec eux tous les moments de ma vie :*

*Amin harzallah , Nacer lekhel et Karim bendjilali.*

*Et à tous ceux que j'ai omis de citer, qui m'ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail, et qui se reconnaîtrons dans ces lignes.*

**ZAKI.**

## ***Dédicace***

*J'ai grand plaisir de dédier ce modeste travail :*

*A mon cher père*

*A ma chère mère*

*Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard. De me soutenir*

*Et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.*

*A mes frères*

*Pour ses soutiens moral et leur conseils précieux au long de mes études.*

*A la famille kehel ,mekhanef, amara ,belaamri.*

*A mon frère et mon binôme Amara Zaki*

*Pour son entente et sa sympathie*

*A mes chers amis Ali, Alim, Sami, bilhel, walid ,ahmed , mustapha ,faudhil, zohir, ihab ,chakib  
,rabah, farid, hamza, kacem , oussama ,imad, seddiki, amar.*

*Mes collègues assia et abir qui m'encouragés*

*Et tous qui mon aider et supporter dans le moment difficile*

*A tous ceux que j'aime et ceux qui m'aiment*

**KADA**

## Abstract

In this thesis, we studied the mechanical and thermo mechanical behaviors of thick composite structures plates. The modeling is based on the high order deformation theory (HSDT). A matlab program was developed to simulate the mechanical and thermo mechanical behavior of laminates.

Key words: composite martial, classical stratification theory, high order theory, temperature, thermo mechanical

## Resume :

Dans ce mémoire, nous avons étudiés les comportements mécaniques et thermomécaniques des structures composites en plaques épaisses. La modélisation est base sur la théorie de déformation d'ordre élevé(HSDT). Un code de calcul en matlab a été élaboré pour simuler le comportement mécanique et thermomécanique des stratifier.

Mots clés : martiaux composite, théorie classique des stratifier, théorie d'ordre élevé, température, thermomécanique.

## ملخص

في هذه المذكرة، درسنا السلوكيات الميكانيكية والحرارية للهياكل المركبة في الصفائح السميكة. تستند النمذجة إلى نظرية التشوه عالية الترتيب (HSDT). لقد تم تطوير برنامج في ماتلاب لمحاكاة السلوك الميكانيكي والحراري للرقائق.

الكلمات المفتاحية: العرفية المركبة ، نظرية التقسيم الطبقي الكلاسيكي ، نظرية الترتيب العالي ، درجة الحرارة. الميكانيكية الحرارية.

## Notations et Symboles

$a$  : longueur de la plaque

$b$  : largeur de la plaque

$[A_{ij}]$  : Matrice des rigidités en membrane

$[B_{ij}]$  : Terme de couplage en membrane/flexion-torsion

$[C_{ij}]$  : Coefficients de la matrice de rigidité  $[C]$

$[D_{ij}]$  : Matrice des rigidités en membrane flexion-torsion

$E_T$  : Module de Young transversale

$E_L$  : Module de Young longitudinale

$G_{ij}$  : Module de cisaillement

$h$  : L'épaisseur de stratifié

$M_x, M_y$  : Moment de flexion

$M_{xy}$  : Moment de torsion

$N_x, N_y, N_{xy}$  Résultantes en membrane par unité de longueur

$Q_{ij}$  : Les coefficients de rigidité réduite

$[S]$  : Matrice de souplesse

$T$  : Température

$\Delta T$  : Gradient de température

$[v_{ij}]$  : Coefficient de poisson

$[\epsilon_{ij}]$  : Tenseur de déformation

$[\sigma_{ij}]$  : Tenseur de contrainte ;

$\Theta$  : L'angle de l'orientation des fibre

$\alpha$  : Coefficient de dilatation thermique

$[ ]$  : Matrice

$\{ \}$  : Vecteur;

## Table des matières

<i>Liste des figures :</i>	3
<i>Liste des tableaux :</i>	5
<i>Introduction générale</i>	6
<b>Chapitre I : introduction sur les matériaux composites</b>	8
<b>I.1 Définition d'un matériau composite :</b>	8
I.1.1 Grande diffusion (GD):	8
I. 1.2 Hautes performances (HP):	8
<b>I. 2 Constituants des matériaux composites :</b>	8
I.2.1 Renfort :	9
I.2.2 Matrice :	10
<b>I.3 Classification des matériaux composites :</b>	11
I.3.1 Classification suivant la forme des constituants :	11
I.3.2 Classification suivant la nature des constituants :	11
<b>I.4 Secteurs d'application des composites :</b>	12
I.4.1 Construction aéronautique :	12
I.4.1 Construction automobile :	12
<b>I.5 Les avantages :</b>	13
<b>I.6 Les inconvénients:</b>	13
<b>I. 7 Quelques procédés de fabrication de structures composites :</b>	13
I.7.1 Moulage au contact :	13
I.7.2 Moulage par projection :	14
I.7.3 Moulage sous vide ou «au sac» :	14
I.7.4 RTM (Résine Transfer Moulding) :	15
I. 7. 6 Compression à chaud :	16
<b>I. 8 Architecture du composite:</b>	17
I.8.1 Les monocouches :	17
I.8.2 Les stratifiées:	18
I.8.3 Les sandwichs :	18
<b>I.9 Etude comparatif entre les matériaux composites et les alliages :</b>	19
<b>I.10. Effet de la température et d'humidité sur les composites :</b>	19
<b>I.11 Définition du Sujet :</b>	20
<b>Chapitre II : MECANIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES ET MODELISATION THERMOMECHANIQUE</b>	21
<b>II.1 Introduction :</b>	21
<b>II.2 Théories de comportement des stratifiés composites:</b>	21
II.2.1 Théorie des plaque minces ( clpt ) :	22

II.2.2	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :	23
II.2.3	Théorie des plaques d'ordre supérieur (HSDT) :	25
<b>II.3</b>	<b>Les repères :</b>	<b>26</b>
<b>II.4</b>	<b>analyse théorique du comportement mécanique et thermomécanique des matériaux composite :</b>	<b>27</b>
<b>II.4.1</b>	<b>Microanalyse:</b>	<b>27</b>
<b>II.4.2</b>	<b>loi de comportement :</b>	<b>28</b>
•	loi de hook généralisé :	28
<b>II.5</b>	<b>Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) :</b>	<b>31</b>
II.5.1	Contraintes Planes Généralisées :	31
II.5.2	Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux :	32
II.5.3	La matrice de rigidité de chaque pli du stratifié :	32
<b>II.6</b>	<b>Théories de déformation en cisaillement de 3eme ordre de REDDY (TSDT) :</b>	<b>34</b>
II.6.1	Champs de déplacement :	34
II.6.2	Champs de déformation et contrainte :	35
<b>II.6.4</b>	<b>Equation de mouvement :</b>	<b>36</b>
<b>II.6.5</b>	<b>Solution de Navier :</b>	<b>38</b>
<b>II.6.6</b>	<b>Calcul des contraintes :</b>	<b>41</b>
<b>II.7</b>	<b>MODELISATION DU COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE :</b>	<b>42</b>
III.7.1	Les contraintes relatives à chaque couche :	43
<b>Chapitre III</b>	<b>résultats et interprétation</b>	<b>44</b>
<b>III .1</b>	<b>Introduction :</b>	<b>44</b>
<b>III .2</b>	<b>Organigramme de la plaque mince:</b>	<b>44</b>
<b>III .3</b>	<b>Simulation des plaques minces :</b>	<b>46</b>
III .3.1	conditions de simulation :	46
III .3.2	résultats :	46
<b>III .4</b>	<b>organigramme de la plaque épaisse :</b>	<b>53</b>
III.5	resultats de simulation des plaques épaisses :	56
	Afin de valider notre programme développé les résultats en terme de plaque épaisse obtenue sont en bonne concordance avec les résultats de la référence [6] et [10].	56
III .5.1	<i>Influence du mode de sollicitation :</i>	56
➤	<i>Mécanique :</i>	56
➤	<i>Thermique :</i>	58
III .5.2	<i>Influence de température opérationnelle :</i>	61
III .5.3	<i>Influence de température de référence :</i>	63
III .5.4	<i>Influence de température opérationnelle négative :</i>	65
III .5.5	<i>Influence de l'anisotropie :</i>	67
<b>IV. Conclusion</b>	<b>:</b>	<b>77</b>

## Liste des figures :

### Chapitre 01 :

Figure (I. 1): Différentes familles du renfort.....	9
Figure (I. 2): Moulage au contact.....	14
Figure (I. 3): Montage par projection.....	14
Figure (I. 4): Moulage sous vide ou «au sac».....	15
Figure (I. 5): RTM (Résine Transfer Moulding).....	15
Figure (I. 6): L'infusion.....	16
Figure (I. 7): Compression à chaud.....	16
Figure (I. 8): Couche de composite.....	17
Figure (I. 9): Constitution d'un stratifié.....	18
Figure (I. 10): Matériaux sandwiches à âmes pleines.....	18

### Chapitre 02 :

Figure (II. 1): Une plaque.....	22
Figure (II. 2): Illustration de la loi de la plaque mince (CLPT).....	23
Figure (II. 3): Illustration de la loi du premier ordre (FSDT).....	25
Figure (II. 4): Illustration de la loi d'ordre élevée (HSDT).....	26
Figure (II. 5): Le repère local et globale d'un stratifié.....	26

### Chapitre 03 :

Figure (III. 1): Organigramme de la plaque mince.....	45
Figure (III. 2): Stratifié $[30^\circ/-15^\circ/-30^\circ/15^\circ]$ .....	46
Figure III .3.3.1 : déformation mécanique dans le repère global XY.....	51
Figure III .3.3.2 : déformation mécanique dans le repère local LT.....	51
Figure III .3.3.3 : contrainte mécanique dans le repère global XY.....	53
Figure III .3.3.3 : contrainte mécanique dans le repère local LT.....	53
Figure (III. 4): Organigramme de la plaque épaisse.....	55

Figures (III. 5):influence de la sollicitation mécanique sur une plaque composite .....	58
Figures (III. 6):influence de la sollicitation thermique sur une plaque composite.....	59
Figures (III. 7):influence de sollicitation thermomécanique sur une plaque composite.....	61
Figures (III. 8):influence de la température opérationnelle.....	62
Figures (III. 9):influence de la temperature de référence.....	65
Figures (III. 10):influence de température opérationnelle negative .....	67
Figures (III. 11):états de contraintes du 1 <sup>er</sup> stratifier.....	69
Figures (III. 12): états de contraintes du 2 <sup>eme</sup> stratifier.....	70
Figures (III. 13): états de contraintes du 3 <sup>eme</sup> stratifier.....	72
Figures (III. 14):influence de paramètre géométrique a/h.....	73
Figures (III. 15):influence de paramètre géométrique a/b.....	76

## Liste des tableaux :

### Chapitre 01 :

Tableau (I. 1): La différence entre matrice thermodurcissable et thermoplastique.....	11
Tableau (I. 2): Tableau comparatif entre l'alliage d'aluminium et fibre de Carbone.....	19

### Chapitre 03 :

Tableau (III. 1): Les conditions mécaniques.....	42
Tableau III .4.1 : condition mécanique de la plaque.....	51

## Introduction générale

Un matériau est une matière d'origine naturelle ou artificielle que l'homme façonne pour en faire des objets. C'est donc le matériau est un élément de base constituant la structure qui doit résister aux différentes sollicitations

Les pièces et structures mécaniques, que nous utilisons et manipulons quotidiennement, sont toutes constituées d'une matière donnée et Depuis l'apparition des premières pièces, les matériaux ne cessent d'évoluer vers des produits qui sont, soit les moins coûteux possibles, soit les plus performants. Ces matériaux sont impliqués dans de nombreux secteurs : aéronautique, automobiles, bâtiment....

Le développement de nouveaux matériaux est soumis aux besoins des utilisateurs (constructeurs), aujourd'hui on ne découvre plus de nouveaux matériaux, mais on crée plutôt des nouvelles associations de matériaux. L'un des résultats de cette association est l'aboutissement à un matériau composite, qui fait le sujet de notre étude.

Les matériaux composites sont utilisés depuis les temps anciens comme le bois qui est un matériau composite naturelle. Avec la révolution industrielle, les chercheurs ont développés les matériaux composite comme Charles Macintosh qui a créé l'imperméable avec du caoutchouc sur des tissus comme le coton en 1823. et François Hennebique qui a déposé le brevet du béton armé en 1892

Dans les secteurs de production industrielle, le souci de optimisation des matériaux revêt une importance capitale. Optimiser un matériau, revient principalement à améliorer ses propriétés tout en réduisant son coût, de nombreuses technologies modernes font appel à des nouveaux matériaux dotés des propriétés que ne peuvent offrir les matériaux traditionnels (métaux, céramique, polymère).

Les structures aérospatiales en composites, changent en température et en humidité durant leur usage structural. Le changement de température engendre des effets : le matériau se dilate lorsqu'il est chauffé et se contracte lorsqu'il est refroidi, la chaleur cause la réduction de la température de transition, d'où une sévère dégradation de la rigidité.

Lors de leur exposition à des environnements variables en terme de température et d'humidité durant leur usage structural, ces matériaux sont souvent soumis à des états de contraintes complexes, qui peuvent être engendrées par des déformations de nature hygrothermique, dues à l'absorption d'humidité par la matrice polymère, en favorisant une

chute considérable de la résistance du matériau.

Déterminer avec précision les contraintes internes dans des structures composites, soumises à des sollicitations hygrothermiques est clairement une des premières étapes à aborder pour une meilleure durabilité des structures, ainsi qu'une meilleure compréhension des effets de l'environnement sur ces structures.

Afin d'atteindre les objectifs du mémoire nous avons décidé de suivre le plan travail suivant :

### Chapitre I : introduction sur les matériaux composites

Dans ce chapitre on va définir les matériaux composites et ses différents constituants, les avantages et les inconvénient des matériaux composites, les secteur d'application des composite et quelque procédé de fabrication.

### Chapitre II : mécanique des matériaux composites et modélisation thermomécanique

Dans ce chapitre on commencera par une recherche bibliographique sur les théories existantes des plaques composites, un intérêt particulier sera donne aux théorie HSDT de Reddy qui sera utilisé dans notre mémoire, et on terminera par la modélisation de la température dans les lois de comportements des plaques composites épaisses.

### Chapitre III : résultats et interprétation

Dans ce chapitre on va décrire d'abord le code de calcul développé dans ce travail à travers des organigrammes explicatifs par rapport aux méthodes de calcul itératives, les résultats obtenus seront présentés sous forme de sections qui traitent les différents paramètres

# **Chapitre I : introduction sur les matériaux composites**

L'utilisation des matériaux composite en substitution aux matériaux traditionnels se justifier par des meilleures propriétés spécifique les composite ne cessent pas d'évoluer vers des produits qui sont soit les moins couteux possible soit les plus performant et l'idéal c'est les deux à la fois.

## **I.1 Définition d'un matériau composite :**

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux ou plus de Natures différentes [1]. Se complétant et permettant d'aboutir à un matériau hétérogène dont L'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.

Le matériau composite est un matériau polyphasé qui combine les propriétés de ses composant afin d'obtenir des propriétés plus intéressent que les matériaux constitutifs.

On distingue deux types de composites: la composite grande diffusion et les Composites hautes performances.

### **I.1.1 Grande diffusion (GD):**

Les composites GD, représentent 95 % des matériaux composites utilisés. En général, ce sont : des plastiques armés ou des plastiques renforcés dont le taux volumique de renfort avoisine 30%. Les principaux constituants de base sont les résines polyesters (95 % des résines Thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99 % des renforts utilisés).

### **I. 1.2 Hautes performances (HP):**

Sont principalement utilisés dans l'aéronautique (besoin d'une grande performance) le nautisme, les sports et loisirs ou encore la construction industrielle. Les renforts utilisés sont plutôt des fibres longues dont le taux de renfort est supérieur à 50 %. Contrairement aux composites GD, leurs propriétés mécaniques, résistance mécanique et rigidité, sont largement supérieurs à celles des métaux.

## **I. 2 Constituants des materiaux composites :**

Les principaux constituants sont le renfort et la matrice. Le renfort a pour rôle

d'apporter au Matériau composite ses performances mécaniques élevées. La matrice qu'on appelle aussi liant, son rôle est de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures [1-6].

En ajoutant des additifs pour modifier certains des propriétés physiques ou chimiques. On les utilise même pour des raisons économiques et par fois pour faciliter la mise en œuvre.

### I.2.1 Renfort :

C'est le principal porteur constitutif dans le composite (forme, volume). Il confère aux composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté. Ces renforts permettent également d'améliorer certaines des propriétés physiques : comportement thermique, tenue en température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. Les caractéristiques recherchées pour les renforts sont des propriétés mécaniques élevées, une masse volumique faible, une bonne compatibilité avec les résines, une facilité de mise en œuvre, un faible coût. En fonction de leur utilisation, les renforts peuvent être d'origines diverses comme il est Indiquée sur la figure (I.1).

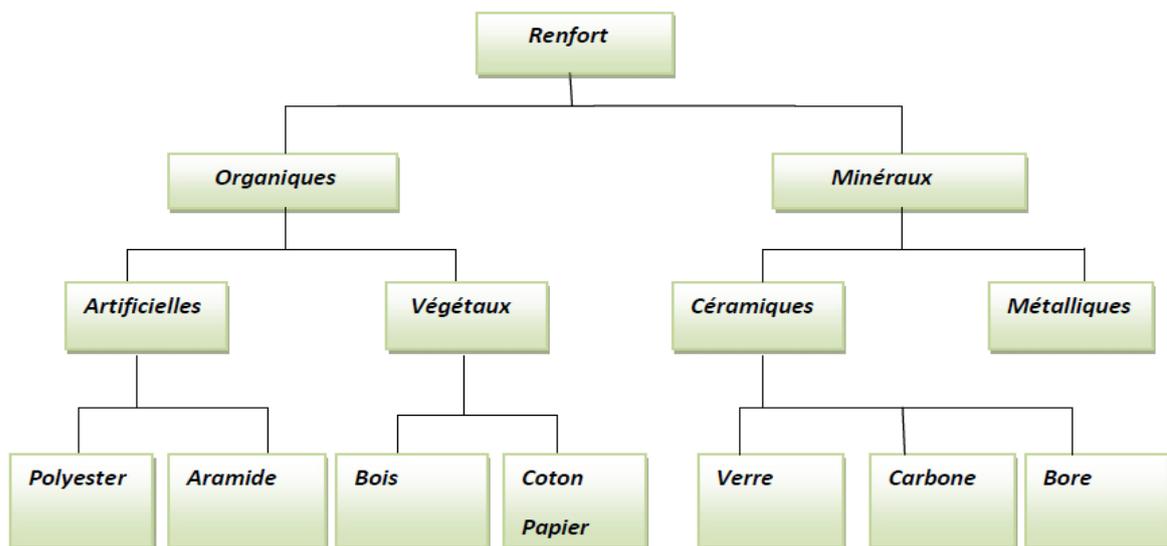


Figure (I.1) : Différentes familles du renfort.

- Fibre de verre : un excellent rapport performance et prix, ils sont les plus utilisées dans la construction aéronautique.
- Fibre de Carbone : les fibres de Carbone ont des très fortes propriétés mécaniques et sont élaboré à partir d'un polymère de base appelé précurseur.
- Fibre d'aramide : ont des propriétés mécaniques élevées en traction mais une

résistance faible de compression.

- Fibre céramique : sont élaborés par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support ces fibres sont rencontrés dans des applications où la température est élevée comme la partie chaude des moteurs d'avion.

### **I.2.2 Matrice :**

La matrice permet de lier les fibres du renfort fibreux entre elles, ainsi que de répartir les efforts. La matrice est facilement déformable et assure la protection chimique des fibres, et lie les fibres du renfort entre eux et assure la répartition de la contrainte c'est « l'emballage ». Les matrices doivent présenter une bonne compatibilité avec le renfort. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

Les résines les plus utilisées dans les matériaux composites sont :

- les résines thermodurcissables
- les résines thermoplastiques.

Ces deux types de polymères diffèrent en leur structure moléculaire aussi bien que leur comportement.

- Matériaux thermodurcissables : ont une stabilité thermique beaucoup plus élevée en comparaison avec les matériaux thermoplastiques, un grand avantage pour des applications d'une demande très élevée, les résines thermodurcissables principalement utilisées sont les suivantes :

- Résines époxydes.
- Résines phénoliques.

- Matrices thermoplastiques :

Les matrices thermoplastiques possèdent de faibles propriétés mécaniques. Leur renforcement (le plus souvent par des fibres courtes) confère une meilleure résistance mécanique, une bonne stabilité dimensionnelle, ainsi qu'un accroissement de la tenue en température. Parmi les matrices thermoplastiques, on trouve :

Le poly (acétate de vinyle) (PAV) (colles à bois et autres adhésifs).

Le nylon 6,6 (fibres, vêtements). Mis en forme par chauffage, durcissent au cours du refroidissement. La transformation est réversible.

*Tableau ( I.1 ) : la différence entre matrice thermodurcissables et thermoplastique.*

<i>Matrices</i>	<i>Thermodurcissables</i>	<i>Thermoplastiques</i>
Etat de base	Liquide visqueux	Solide prêt à l'emploi
Stockage	Réduit	Illimité
Mouillabilité des renforts	Aisée	Difficile
Moulage	Chauffage continu	Chauffage + refroidissement
Cycle	Long (polymérisation)	Court
Tenue au choc	Limitée	Assez bonne
Tenue thermique	Meilleure	Réduite
Chutes et déchets	Perdus	Recyclables
Conditions de travail	Emanations de solvants	Propreté

### **I.3 Classification des matériaux composites :**

Les composite peuvent être classé suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants.

#### **I.3.1 Classification suivant la forme des constituants :**

Martiaux composite à particule : lorsque le renfort se trouve sous forme de particules, ces particules sont généralement utilisées pour améliorer la nature des matériaux ou des matrices comme la rigidité la tenue à la température et la résistance à l'abrasion.

Matériaux composite a fibre : lorsque le renfort se trouve sous forme des fibres continues ou discontinues : fibre coupés, courtes ...

#### **I.3.2 Classification suivant la nature des constituants :**

Selon la nature de la matrice (organique, métallique, minérale) divers renfort sont associés à ces matrices [1] :

Matrice organique (résine, charges) : fibre d'aluminium, fibre de verre ...

Matrice métallique (alliages léger) : fibre de silicium ...

Matrices minérale (céramique) : fibre de bore ...

Les matériaux composite à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le

domaine des températures ne dépasse pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composite à matrice métallique ou minérale dans le domaine de 600 °C , et jusqu'à 1000 °C pour les matrice céramique.

#### **I.4 Secteurs d'application des composites :**

Le choix des matériaux, tel que l'industrie aéronautique, aérospatiale, automobile, ferroviaire, sports et loisirs, bâtiment, génie civil est toujours un problème complexe où le comportement coût/performance règne en maître.

##### **I.4.1 Construction aéronautique :**

L'utilisation des matériaux composites dans les constructions aéronautiques entraîne un gain de poids substantiel. Leur emploi permet, à performances égales, des gains de masse variant de 10% à 20%. Le poids de l'avion moyen-courrier Boeing 767 a été réduit par l'emploi des composites,. Les matériaux composites sont essentiellement utilisés pour la conception et réalisation des propulseurs à poudre des lanceurs de satellites et de leur tuyère d'éjection des gaz de propulsion, obtenue par bobinage de fibres de verre, de kevlar ou de carbone , afin de résister à la pression interne résultant de la combustion du propergol solide et aux efforts de lancement qui, dans certain cas, se traduisent par des chocs et des vibrations. Sur les avions commerciaux, les premiers appareils produits industriellement en grande série utilisaient essentiellement des alliages d'aluminium, de l'acier et du titane, aujourd'hui ; les avions commerciaux les plus récents (A350) utilisent en masse encore 19% d'alliage d'aluminium, mais 53% de matériaux composites ont été introduits dans la structure, 6% d'acier, 14% de titane et 8% de matériaux divers. [3]

##### **I.4.1 Construction automobile :**

L'utilisation des composites dans le secteur automobile remonte à des origines relativement anciennes (fin des années 1980), mais ne s'est généralisé que très récemment, chez les grands constructeurs étrangers (Volvo, Mercedes) pour développer des coffres et hayons.

La société LOHEAC de transports routiers, a pu réduire substantiellement sa consommation de carburant grâce à l'économie de poids obtenue en remplaçant les cabines conventionnelles de ses tracteurs par de nouveaux éléments moulés en une seule pièce

renforcés de fibre à haute résistance.

Les composites sont choisis pour la conception de ressorts à lames. Ce sont des pièces de suspension routières très sollicitées, utilisées par les véhicules de gros tonnage et dont la lame secondaire, assurant 80% de la fonction suspension en évitant des ruptures brutales.[4]

### **I.5 Les avantages :**

- Légèreté : Ils sont beaucoup plus légers, ce qui est un gain énorme au niveau du poids de l'avion qui est nettement réduit. L'avion consomme donc moins de carburant.
- grande résistance à la fatigue
- maintenance réduite
- faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion.
- insensibles aux produits chimiques sauf les décapants de peinture qui attaquent les résines.
- Une bonne isolation électrique.
- liberté de formes : Le On peut créer des matériaux de toutes les formes, de toutes les épaisseurs, en fonction de la demande.

### **I.6 Les inconvénients:**

Ils sont beaucoup plus sensibles à tous les impacts. Une petite faille peut engendrer de grosses déformations.

- La détection de ces problèmes est difficile, ce qui entraîne une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage.
- La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe.

## **I. 7 Quelques procédés de fabrication de structures composites :**

### **I.7.1 Moulage au contact :**

Le moulage au contact ou stratification au contact est un procédé entièrement manuel de mise en forme de plastiques renforcés, à température ambiante et sans pression. Ce procédé est le premier à avoir été employé pour le moulage des résines polyesters insaturés renforcées.

Méthode facile de mise en œuvre, dont le coût de moulage est relativement faible. Elle permet d'obtenir des pièces de très grandes dimensions et poids [3-1].

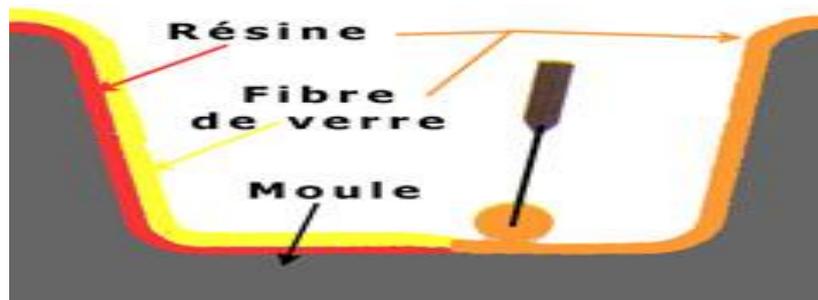


Figure (I.2) : *Moulage au contact*

### I.7.2 Moulage par projection :

La résine catalysée et les fibres de renfort coupées sont projetées simultanément au moyen d'un pistolet sur une forme. Le moulage par projection simultanée est habituellement utilisé pour fabriquer de grandes pièces comme les pièces de camions .

Cette méthode est beaucoup plus rapide que le moulage au contact. [1-3].

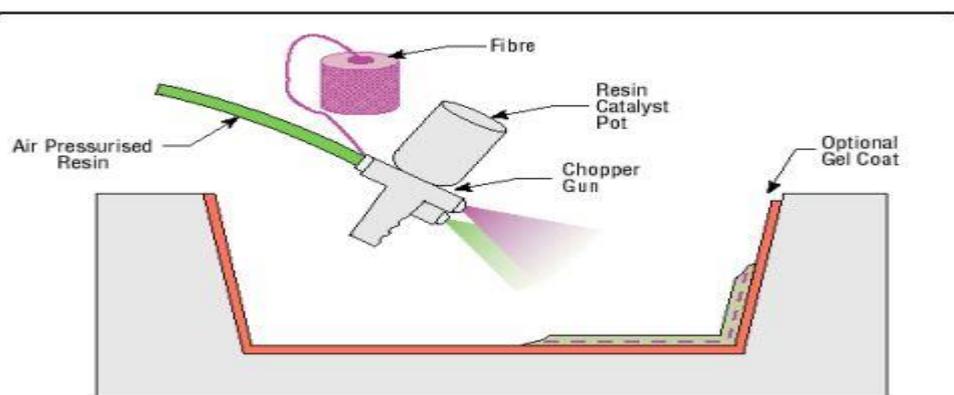


Figure (I.3) : *Moulage par projection*

### I.7.3 Moulage sous vide ou «au sac» :

Le moulage sous vide ou par dépression ou « au sac » est un procédé de mise en forme par moulage de pièces en matériaux composites. [3-1].

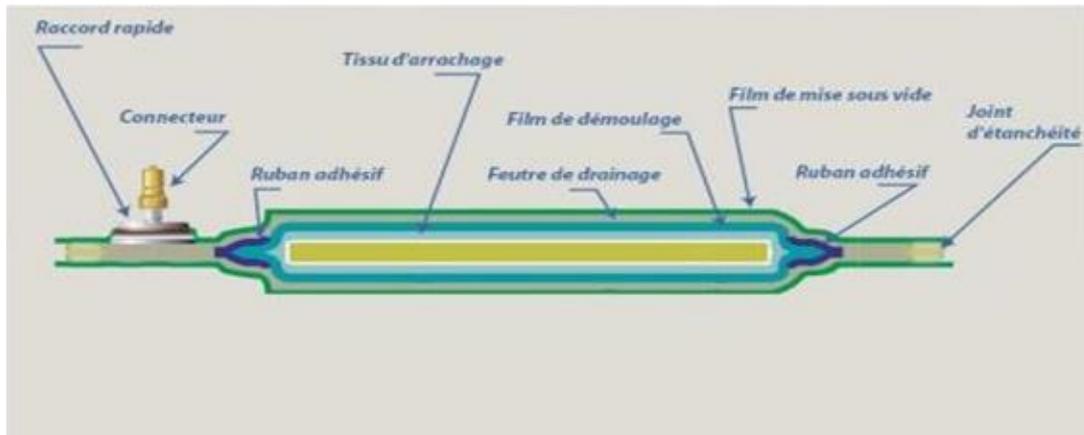


Figure (I.4) : Moulage sous vide ou «au sac»

#### I.7.4 RTM (Résine Transfer Moulding) :

Le moulage par transfert de résine (Résine Transfer molding (RTM)) est un procédé de fabrication de pièces en matériaux composites. C'est un procédé industriel d'injection à basse pression de résine liquide dans un moule rigide et fermé. Ce procédé permet d'obtenir des pièces composites de dimensions précises et présentant un bel état de surface sur toute leur surface. Il convient particulièrement pour les petites et moyennes séries. Le procédé RTM utilise des renforts secs, c'est-à-dire que l'apport de résine se fait en phase finale du procédé, une fois la structure de renfort de la pièce entièrement construite.

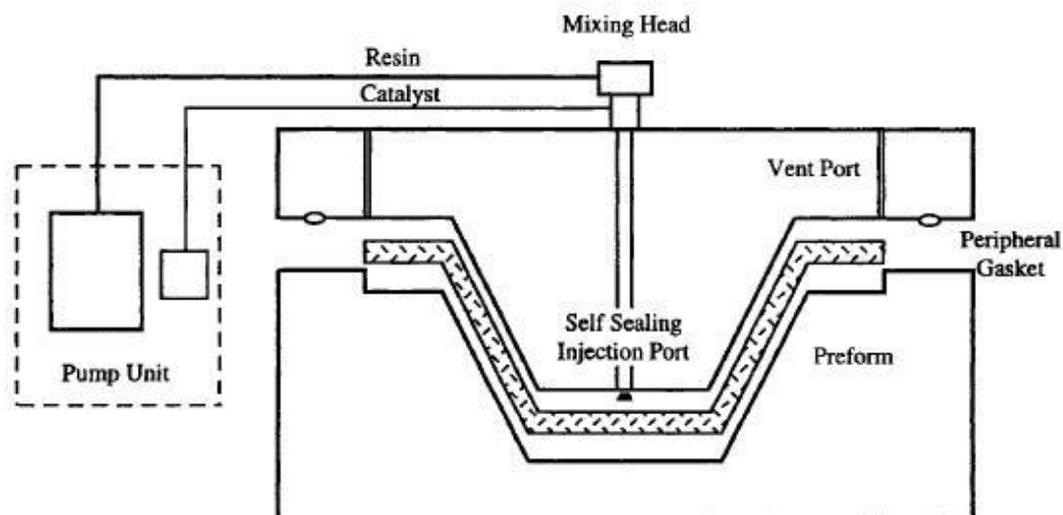


Figure (I.5) : RTM (Résine Transfer Moulding)

### I.7.5 L'infusion :

Est un procédé moderne de mise en œuvre des matériaux composites. Elle consiste à la mise sous vide, dans un moule fermé par une bâche, des renforts secs qui sont imprégnés par la suite avec l'arrivée de résine qui est aspirée par la dépression créée dans le moule. Avantage de l'infusion par rapport au moulage au contact est: un taux de fibre plus élevé car on utilise que la juste quantité de résine nécessaire, donc meilleur rapport résistance/poids.

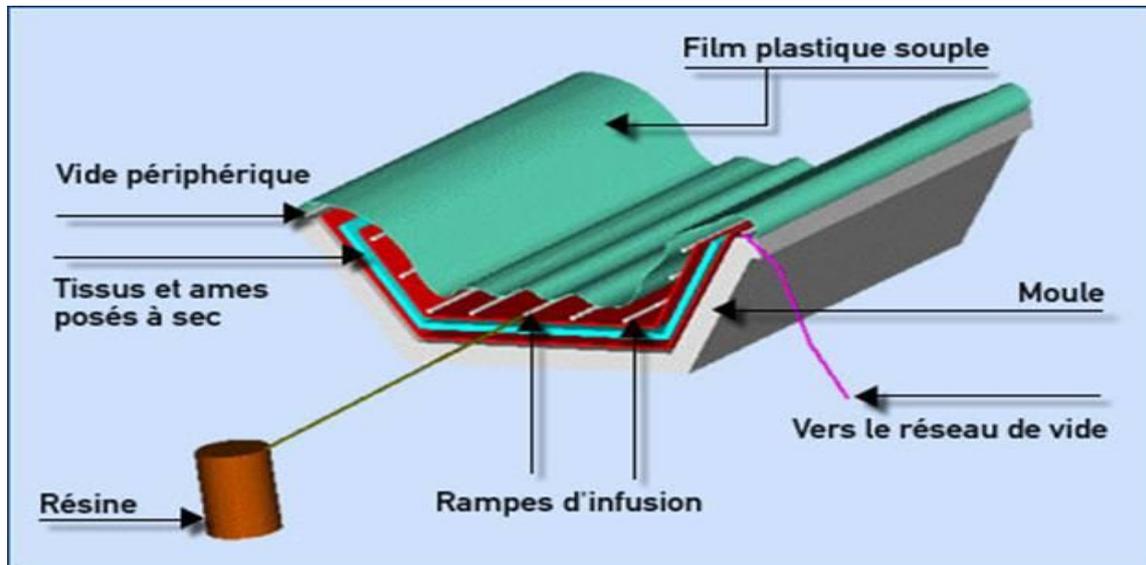


Figure (I.6) : L'infusion

### I. 7. 6 Compression à chaud :

Le moulage par compression est principalement utilisé pour la fabrication d'objets de faibles épaisseurs de forme plane ou voisine de celle d'une boîte. Exemples : couverts, boutons, poignées, grands récipients

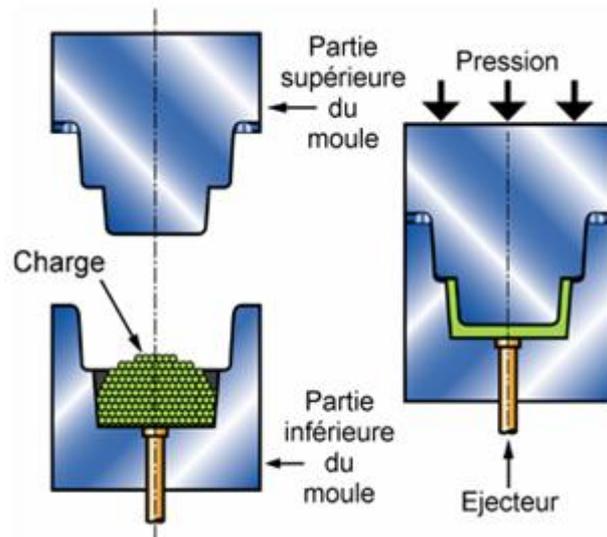


Figure (I.7) : *Compression à chaud*

## I. 8 Architecture du composite:

Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types [1-2] :

- Les monocouches
- Les stratifiées
- Les sandwiches

### I.8.1 Les monocouches :

Le composite monocouche (couche élémentaire ou strate) correspond à l'unité élémentaire d'épaisseur, elle est constituée d'un ou plusieurs plis identiques (tissé, UD, mats,...) assemblés sans aucune orientation.

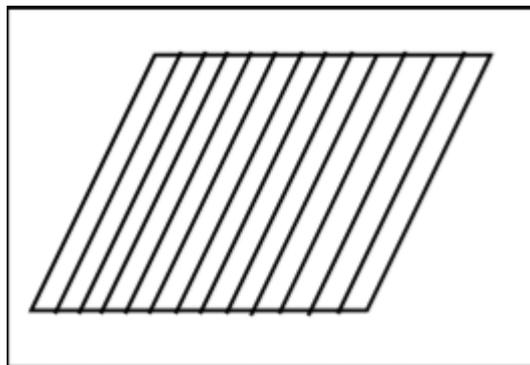


Figure (I.8) : Couche de composite

### I.8.2 Les stratifiées:

Le composite stratifié ou multicouches est un ensemble de couches empilées et orientées suivant un ordre de drapage défini et rendues solidaires par l'opération de polymérisation. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

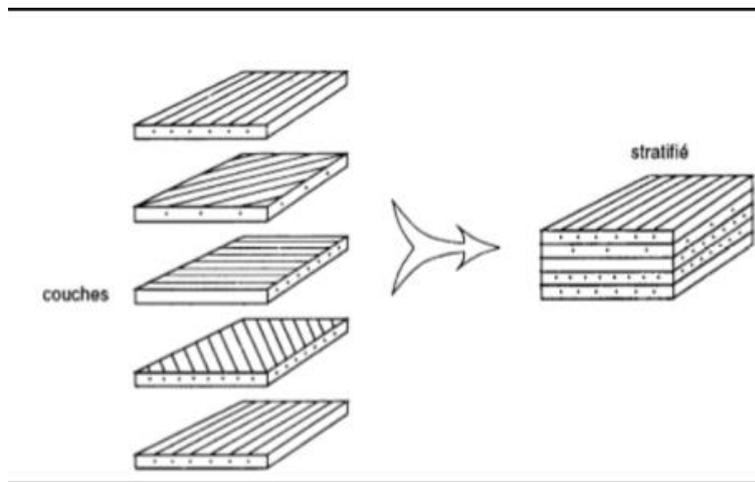


Figure (I.9) : Constitution d'un stratifié

### I.8.3 Les sandwiches :

Les sandwiches sont des matériaux possédant deux peaux de grande rigidité et de faible épaisseur renfermant un cœur (âme) de forte épaisseur et de faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une bonne résistance à la flexion et est un excellent isolant thermique.

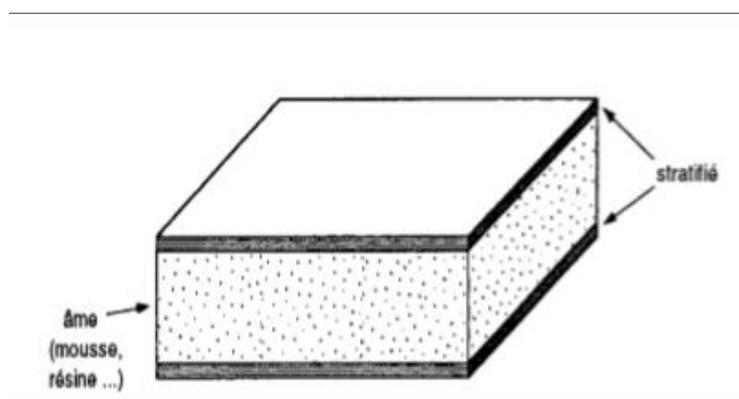


Figure (I.10) : Matériaux sandwichs à âmes pleines

## I.9 Etude comparatif entre les matériaux composites et les alliages :

l'industrie moderne recherche des matériaux les plus performants : une solidité élevée et une masse volumique faible, une résistance forte de toutes sortes de conditions difficiles comme la variation de (vibration, température, vent...), et une légèreté et durabilité remarquable avec un coût faible, les chercheurs ont trouvé une solution pour diminuer les défauts des alliages et les métaux, cette solution est d'élaborer des fibres à faible diamètre et de nature des métaux qui ont des caractéristiques élevées.

	Module de young $E$ (GPa)	CONTRAINTE DE RUPTURE $\sigma$ (MPa)	Masse volumique $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	Module spécifique $E/\rho$ (MN m/kg)	Contrainte spécifique $\sigma/\rho$ (kN m/Kg)
Alliage d'aluminium	70	140-620	2700	25.9	52-230
Fibre de Carbone	390	2100	1900	205	1100

Tableau (I.2) : tableau comparatif entre l'alliage d'aluminium et fibre de Carbone [1]

Les valeurs de ce tableau montrent l'intérêt de l'élaboration des matériaux composites, et l'utilisation intensive de ces matériaux dans l'industrie.

## I.10. Effet de la température et d'humidité sur les composites :

Généralement, les propriétés des matériaux composites sont affectées par les conditions d'environnement auxquelles ils sont soumis. Parmi les facteurs liés à l'environnement, ceux qui introduisent des variations de déformation en l'absence de tout chargement mécanique revêtent un intérêt particulier. Dans le cas des structures en matériaux composites, ces phénomènes sont la conséquence de la variation de température, de l'absorption par la matrice polymère d'agents de gonflement tels que la vapeur d'eau, de la dilatation de gaz absorbés par la matrice, etc.

Ces phénomènes induisent des déformations et contraintes qui peuvent modifier notablement le comportement mécanique des structures en matériaux composites : rigidité, flambement, fréquences de vibration, etc.

### **I.11 Définition du Sujet :**

L'idée consiste à analyser le comportement d'une plaque composite épaisse, cette dernière est sollicitée par des forces mécaniques et opère dans un environnement caractérisé par une température, la théorie utilisée est la théorie d'ordre élevé de Reddy, la plaque est soumise à un gradient de température fixe le long de l'épaisseur de la plaque.

# **Chapitre II : MECANIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES ET MODELISATION THERMOMECHANIQUE**

## **II.1 Introduction :**

Les matériaux composites naturels et artificiels sont présents partout. Les structures composites classiques industrielles telles que composite simple peau et les structures en sandwich sont courantes dans de nombreuses industries. Les matériaux composites sont attrayants et exigeants de nos jours en raison de leur fiabilité accrue, de leur résistance à la fatigue et, plus important encore, de leurs applications hautes performances (réduction du poids).

Les structures composites sont des types de structures multicouches qui présentent un comportement mécanique différent des métaux. Par conséquent, la nécessité d'une compréhension claire de la mécanique du matériau à travers des études expérimentales et numériques est d'une importance vitale. Du point de vue analytique, plusieurs théories des plaques ont été développées. Par exemple, la théorie des plaques classiques (CLPT) et la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieure (HSDT) sont pertinentes.

## **II.2 Théories de comportement des stratifiés composites:**

Nous établissons dans ce chapitre, d'une façon progressive, les équations de comportement mécanique d'un stratifié. Nous examinons par la suite, de quelles manières sont modifiées ces équations.

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan  $x,y$ ) et par une petite épaisseur (notée  $h(x,y)$ ), par rapport aux autres dimensions à savoir la longueur et la largeur.

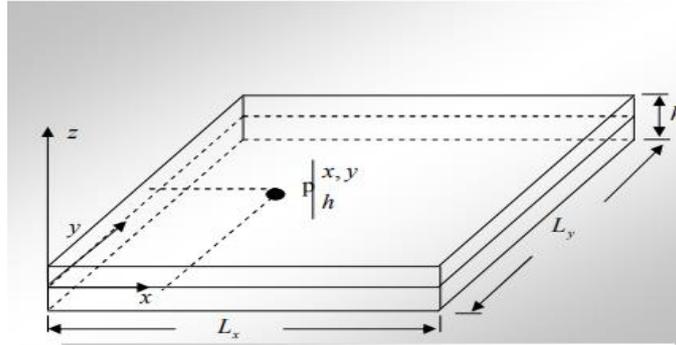


Figure (II.1) : une plaque en composite

Suivant l'ordre de grandeur de  $h$  par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince au épaisse aux plaques et aux coques.

Nous admettons généralement [8]:

Pour les plaques minces :  $\frac{h}{a} \leq 0.05$

Pour les plaques épaisses :  $0.05 \leq \frac{h}{a}$

Les théories classiques des stratifiés, permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et déformations dans les matériaux composites stratifiés .

Avant de résoudre un problème structural il faut bien choisie la bonne théorie décrivant correctement le comportement élastique et dynamique de cette structure. Danc on distingue trois théories :

- Théorie classique des plaques minces (théorie du love-Kirchhoff)
- Théorie des plaques semi épaisses (théorie du premier ordre)
- Théorie des plaques épaisses (théorie d'ordre supérieure)

### II.2.1 Théorie des plaque minces ( clpt ) :

La théorie des plaques minces considérée est basée sur :

- L'hypothèse dite des sections droites (ou planes): Les points matériels, situés sur une normal à la surface moyenne non déformée, restent sur une droite dans la configuration déformée.
- Les déplacements  $u$  et  $v$  suivant  $x$  et  $y$  d'un point quelconque  $m(x, y, z)$  variant alors

linéairement en fonction de  $z$ , et le déplacement transversal  $w$  suivant  $z$ , n'est fonction que de  $x$  et  $y$ . Cette hypothèse a été proposée par plusieurs auteurs, dont les plus connus sont : Reissner, Hencky, Boilé, Mindlin .Elle a été initialement proposée pour les plaques isotropes, mais a ensuite été appliquée aux plaques orthotropes et multicouches.

- L'hypothèse d'une déformation transversale  $\varepsilon_z$ , nulle (pas de variation d'épaisseur).
- L'hypothèse des contraintes planes: dans les relations de comportement, la contrainte  $\sigma_z$ , est Négligeable par rapport aux autres composantes, du tenseur de contraintes[9].

$$U(x, y, z) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$V(x, y, z) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{II.1}$$

$$W(x, y, z) = w_0(x, y, t)$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).

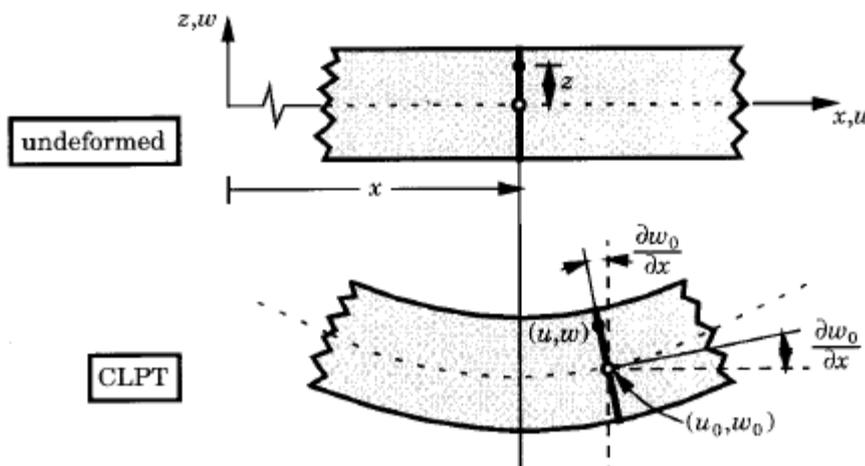


Figure (II.2) : illustration de la loi de la plaque mince (CLPT)[8].

### II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre est aussi appelée la théorie de mindlin a prolongé la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff) en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les

déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans (Reissner, 1945) [5],

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \qquad \varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$U(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \varphi_x(x, y, t)$$

$$V(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \varphi_y(x, y, t) \qquad II.2$$

$$W(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\varphi_x, \varphi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement

Cette théorie des déformations du premier ordre nécessite un facteur de correction du cisaillement qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance de la géométrie, du coefficient de poisson à travers l'épaisseur, et les charges appliquées avec les conditions aux limites.

Stephen Timoshenko (Ukraine) a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres.

Dans la théorie du premier ordre (FSDT), la troisième hypothèse de Kirchhoff est plus valable, c.-à-d., les sections normales ne restent plus perpendiculaires au plan moyen après déformation

À partir des hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement s'écrit de la façon suivante :

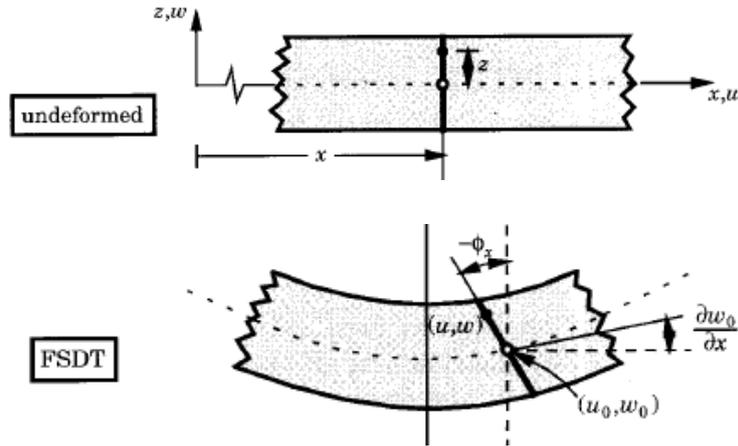


Figure (II.3) : illustration de la loi du premier ordre(FSDT)[8].

### II.2.3 Théorie des plaques d'ordre supérieur (HSDT) :

La théorie classique des plaques minces devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique : flèche du stratifié, répartition des contraintes lorsque la plaque est épaisse. Une première amélioration consiste à tenir compte du cisaillement transverse, avec une théorie des plaques du premier degré. Une deuxième amélioration consiste à modifier cette théorie, en introduisant des facteurs de correction aux modules de cisaillement transverse du stratifié. Cette approche, est une extension, aux cas des stratifiés, des théories développées par E. Reissner[5] et Reddy[ 6][10], Mindlin[ 7].

Donc cette théorie est venue améliorer les hypothèses des théories classique et premier ordre lorsque l'épaisseur devient important.

Le champ de déplacement est :

$$U(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \varphi_x(x, y, t) + z^3 \delta x(x, y, t)$$

$$V(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \varphi_y(x, y, t) + z^3 \delta y(x, y, t) \quad II.3$$

$$W(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

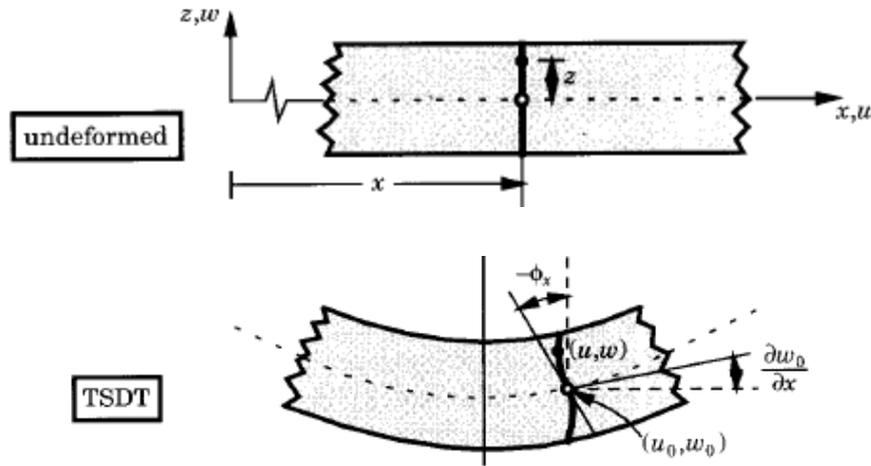


Figure (II.4) : illustration de la loi d'ordre élevée(HSDT)[8].

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur la théorie des plaques ainsi que les modèles analytiques des plaques à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle.

### II.3 Les repères :

#### Le repère local (LT) :

Le repère local (LT) est lié à chaque couche de composite, la direction L est parallèle à la fibre c'est la direction longitudinale et la direction normale que est perpendiculaire à la direction de fibre est appelée direction transversale . [14]

#### Le repère globale (XY) :

Les stratifiés étant élaborés par couches suivant des directions de fibres décalés d'une couche à une autre d'un angle, il est nécessaire de rapporter le comportement élastique de chaque couche à un système d'axe noté XYZ appelé repère de stratifier.[14]

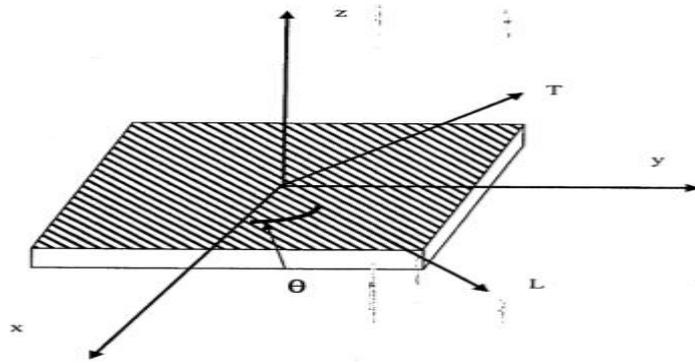


Figure (II.5) : le repère local et globale d'un stratifié

## II.4 : analyse théorique du comportement mécanique et thermomécanique des matériaux composite :

Avant de procéder à la modélisation macroscopique des plaques composites, il est nécessaire de connaître les éléments de base et les outils indispensables à toute modélisation de ce milieu anisotrope.

### II.4.1 : Microanalyse:

L'analyse des matériaux composites à l'échelle microscopique met en cause les caractéristiques élémentaires des constituants (fibre et matrice) [1].

- Fraction de fibre en volume :

$$V_f = \frac{\text{volume des fibres}}{\text{volume total}}$$

- Fraction de matrice en volume :

$$V_m = \frac{\text{volume de la matrice}}{\text{volume total}}$$

$$V_f + V_m = 1$$

- Module de young longitudinal :

$$E_L = V_f * E_f + V_m * E_m$$

- Module de young transversal :

$$E_t = E_m \left( \frac{1}{(1 - V_f) + \left(\frac{E_m}{E_f}\right) V_f} \right)$$

- Module de cisaillement :

$$G_{LT} = G_m \left( \frac{1}{\left(\frac{G_m}{G_f}\right) V_f + (1 - V_f)} \right)$$

- Coefficient de Poisson principal :

$$\vartheta_{LT} = V_f * \vartheta_f + \vartheta_m * V_m$$

- COEF DE DILATATION THERMIQUE longitudinal :

$$\alpha_L = \frac{V_f E_f \alpha_f + V_m E_m \alpha_m}{E_L}$$

- COEF DE DILATATION THERMIQUE transversale :

$$\alpha_T = V_f (\alpha_f + V_f \vartheta_f) + V_m \alpha_m (1 + \vartheta_m) - \alpha_L (V_f \vartheta_f + V_m \vartheta_m)$$

## II.4.2 loi de comportement :

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liées par des lois de comportement caractérisant le comportement mécanique du milieu, ces lois permettent de rendre compte aux mieux les phénomènes observés, et sont connues sous l'appellation, « loi de Hook généralisée » [1].

- **loi de hook généralisé :** introduit la matrice de rigidité C qui est généralement symétrique avec des coefficients indépendants non nuls (valeurs physique),

$$[\sigma_i] = [C_{ij}] [\varepsilon_i]$$

$$[C]^{-1} = [S] \quad [\varepsilon_i] = [S_{ij}] [\sigma_i]$$

[S] c'est la matrice inverse de la matrice de rigidité appelé la matrice flexibilité ou souplesse.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad \text{II.4}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

Matériaux orthotrope : possédé 3 plans symétries perpendiculaire deux à deux :

Relation dans le repère local (LT) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{ZZ} \\ \gamma_{LZ} \\ \gamma_{TZ} \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{ZZ} \\ \tau_{LZ} \\ \tau_{TZ} \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} \quad \text{II.5}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{ZZ} \\ \tau_{LZ} \\ \tau_{TZ} \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{ZZ} \\ \gamma_{LZ} \\ \gamma_{TZ} \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = E_L + 4\nu_{LT}^2 K_L$$

$$C_{12} = 2\nu_{LT} K_L$$

$$C_{44} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2}$$

$$C_{23} = K_L - G_{LT}$$

$$C_{22} = K_L + G_{LT}$$

$$C_{66} = G_{LT} = C_{55}$$

$$S_{11} = \frac{1}{E_L}$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{LT}}{E_L}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_T}$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{LT}}$$

$$S_{23} = -\frac{\nu_{LT}}{E_T}$$

Relation dans le repéré globale (XY) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{II.6}$$

$$C'_{11} = C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$C'_{12} = (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta),$$

$$C'_{13} = C_{12} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta,$$

$$C'_{14} = 0, \quad C'_{15} = 0,$$

$$C'_{16} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta,$$

$$C'_{22} = C_{11} \sin^4 \theta + C_{22} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$C'_{23} = C_{12} \sin^2 \theta + C_{23} \cos^2 \theta,$$

$$C'_{24} = 0, \quad C'_{25} = 0,$$

$$C'_{26} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta,$$

$$C'_{33} = C_{22}$$

$$C'_{36} = (C_{12} - C_{23}) \sin \theta \cos \theta,$$

$$C'_{44} = 0.5(C_{22} - C_{23})\cos^2 \theta + C_{66}\sin^2 \theta$$

$$C'_{45} = [C_{66} - \left(\frac{C_{22} - C_{23}}{2}\right)]\sin \theta \cos \theta$$

$$C'_{55} = 0.5(C_{22} - C_{23})\sin^2 \theta + C_{66}\cos^2 \theta$$

$$C'_{34} = 0$$

$$C'_{35} = 0$$

$$C'_{46} = 0$$

$$C'_{56} = 0$$

L'analyse des constantes de rigidité à l'échelle microscopique, a révélé la forte prépondérance des propriétés élémentaires des fibres et de la matrice. Le volume des fibres, est un paramètre déterminant quant au comportement élastique. Le calcul de la matrice de rigidité est un outil essentiel et nécessaire avant toute tentative de modélisation.

## **II.5 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) :**

La théorie classique des stratifié et la théorie de premier ordre sont les théories les plus simple de la catégorie théorie de couche équivalente, et elles décrivent convenablement le comportement de la plupart des cas des stratifiés ,la théorie à ordre élevée représente bien le comportement des stratifiés ,elle n'exige pas des facteurs de correction cisaillement, et peut rapporter une distribution inter laminaires des contraintes plus précise, la raison d'augmenter les déplacements au 3ème degré par rapport à la cordonnée en épaisseur , par conséquence la variation du cisaillement transversal sera de même nature que le déplacement ,ceci évite l'utilisation du facteur de correction de cisaillement.

### **II.5.1 Contraintes Planes Généralisées :**

Un état de contrainte plane généralisé est un état de contrainte à deux dimensions, dont la direction z est la direction principale où la déformation dans cet axe est nulle, le tenseur est

caractérisé par :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{II.7}$$

### II.5.2 Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux : III 1

$$[Q]_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad \text{II.8}$$

Ces constantes de rigidité réduites sont :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22}$$

$$Q_{66} = G_{LT}$$

$$Q_{55} = G_{LT''}$$

$$Q_{44} = G_{TT''}$$

### II.5.3 La matrice de rigidité de chaque pli du stratifié :

La relation d'élasticité peut s'écrire sous la forme :

$$[\mathcal{Q}']_{ij} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}'_{11} & \mathcal{Q}'_{12} & \mathcal{Q}'_{16} & 0 & 0 \\ \mathcal{Q}'_{12} & \mathcal{Q}'_{22} & \mathcal{Q}'_{26} & 0 & 0 \\ \mathcal{Q}'_{16} & \mathcal{Q}'_{26} & \mathcal{Q}'_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{Q}'_{44} & \mathcal{Q}'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{Q}'_{45} & \mathcal{Q}'_{55} \end{bmatrix}$$

II.9

Avec :

$$Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

$$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta$$

$$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

$$Q'_{44} = Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta$$

$$Q'_{55} = Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta$$

$$Q'_{45} = (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} Q'_{11} \\ Q'_{22} \\ Q'_{12} \\ Q'_{66} \\ Q'_{16} \\ Q'_{26} \\ Q'_{44} \\ Q'_{55} \\ Q'_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 & 0 & 0 \\ s^4 & C^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 & 0 & 0 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^2+s^2 & -4c^2s^2 & 0 & 0 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2-s^2)^2 & 0 & 0 \\ c^3s & -s^3c & -cs(c^2-s^2) & -2cs(c^2-s^2) & 0 & 0 \\ s^3c & -c^3s & cs(c^2-s^2) & 2cs(c^2-s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^2 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^2 & C^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -cs & cs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{44} \\ Q_{55} \end{bmatrix} \quad \text{II.10}$$

## II.6 Théories de déformation en cisaillement de 3eme ordre de REDDY (TSDT) :

### II.6.1 Champs de déplacement :

La théorie de troisième ordre de plaque utilise les hypothèses suivantes [8] :

-La section normale n'est plus perpendiculaire après déformation.

Considérant le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\phi_x(x, y) + z^3\lambda_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\phi_y(x, y) + z^3\lambda_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad \text{II.11}$$

Ou  $(u_0, v_0, w_0)$ ,  $(\phi_x, \phi_y)$ ,  $(\theta_x, \theta_y)$ ,  $(\lambda_x, \lambda_y)$  sont des paramètres à déterminer tel que :

$$u_0 = u(x, y, 0), \quad v_0 = v(x, y, 0), \quad w_0 = w(x, y, 0) \quad \text{II.11.1}$$

En imposant la condition limite libre pour la face supérieure et inférieure du stratifié :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}\left(x, y, \mp \frac{h}{2}\right) &= 0, \quad \sigma_{yz}\left(x, y, \mp \frac{h}{2}\right) = 0 \\ \sigma_{xz}\left(x, y, \mp \frac{h}{2}\right) &= Q_{55}\gamma_{xz}\left(x, y, \mp \frac{h}{2}\right) + Q_{45}\gamma_{yz}\left(x, y, \mp \frac{h}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yz} \left( x, y, \bar{\mp} \frac{h}{2} \right) &= Q_{45} \gamma_{xz} \left( x, y, \bar{\mp} \frac{h}{2} \right) + Q_{44} \gamma_{yz} \left( x, y, \bar{\mp} \frac{h}{2} \right) = 0 \\
\gamma_{xz} \left( x, y, \bar{\mp} \frac{h}{2} \right) &= \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (2z\theta_x + 3z^2 \Lambda_x)_{z=\bar{\mp} \frac{h}{2}} = 0 \\
\gamma_{yz} \left( x, y, \bar{\mp} \frac{h}{2} \right) &= \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (2z\theta_y + 3z^2 \Lambda_y)_{z=\bar{\mp} \frac{h}{2}} = 0 \\
\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \left( -h\theta_x + \frac{3h^2}{4} \Lambda_x \right) &= 0 \quad \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \left( h\theta_x + \frac{3h^2}{4} \Lambda_x \right) = 0 \\
\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + \left( -h\theta_y + \frac{3h^2}{4} \Lambda_y \right) &= 0 \quad \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + \left( h\theta_y + \frac{3h^2}{4} \Lambda_y \right) = 0 \\
\theta_y = 0 \quad \theta_x = 0, \quad \Lambda_x &= -\frac{4}{3h^2} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \quad \Lambda_y = -\frac{4}{3h^2} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{II.11.2}$$

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) - \frac{4}{3h^2} z^3 \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) - \frac{4}{3h^2} z^3 \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned} \tag{II.11.3}$$

## II.6.2 Champs de déformation et contrainte :

En remplacent le champ de déplacement dans le système des lois de déformation [8]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^3 \\ \varepsilon_{yy}^3 \\ \gamma_{xy}^3 \end{Bmatrix} \tag{II.12}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{II.12.1}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^3 \\ \varepsilon_{yy}^3 \\ \gamma_{xy}^3 \end{Bmatrix} = -c_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x}\right) \end{Bmatrix} \quad \text{II.12.2}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^2 \\ \gamma_{xz}^2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^2 \\ \gamma_{xz}^2 \end{Bmatrix} = -c_2 \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} \quad \text{II.12.3}$$

Avec :

$$c_1 = 4/3h^2, \quad c_2 = 3c_1$$

### II.6.3 Matrice de passage de déformation et contrainte

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta \cos\theta & -\sin\theta \cos\theta & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{TT'} \\ \sigma_{LT'} \\ \sigma_{LT} \end{Bmatrix} \quad \text{II.13}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & -\sin\theta \cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & \sin\theta \cos\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{TT'} \\ \varepsilon_{LT'} \\ \varepsilon_{LT} \end{Bmatrix}$$

### II.6.4 Equation de mouvement :

Les équations de mouvement sont tirées du principe de déplacement virtuel, pour le cas de la théorie d'ordre élevé les équations du mouvement impliquent l'énergie de déplacement virtuel et le travail virtuel résultant des forces appliquées, et l'énergie cinétique virtuelle [1] :

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ + c1 \left( \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2} \right) + q = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} - \bar{Q}_x = 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{yy}}{\partial y} - \bar{Q}_y = 0 \quad \text{II.14}$$

Avec :  $\bar{M}_{ij} = M_{ij} - c1P_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) ,  $\bar{Q}_i = Q_{ij} - c2R_{ij}$  ( $i, j = 4, 5$ )

Les résultantes des contraintes sont reliées à la déformation par l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} [N] \\ [M] \\ [P] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [E] \\ [B] & [D] & [F] \\ [E] & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \\ \{\varepsilon^3\} \end{Bmatrix} \quad \text{II.15}$$

$$\begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [D] \\ [D] & [F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^0\} \\ \{\gamma^2\} \end{Bmatrix} \quad \text{II.16}$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}'^k \cdot (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, i, j = 1, 2, 3$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}'^k \cdot (1, z^2, z^4) dz, i, j = 4, 5$$

$$A_{ij} = \sum_{i=1}^{(\frac{h}{dz})+1} (z_i - z_{i-1}) \cdot Q_{ij}^i$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(\frac{h}{dz})+1} (z_i^2 - z_{i-1}^2) \cdot Q_{ij}^i$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{(\frac{h}{dz})+1} (z_i^3 - z_{i-1}^3) \cdot Q_{ij}^i \quad \text{II.17}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (z_i^4 - z_{i-1}^4) \cdot Q_{ij}'$$

$$F_{ij} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (z_i^5 - z_{i-1}^5) \cdot Q_{ij}'$$

$$H_{ij} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (z_i^7 - z_{i-1}^7) \cdot Q_{ij}'$$

Avec :

$$\{[N], [M], [P]\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} (1, z^2, z^3) dz \quad \text{II.17.1}$$

$$\{[Q], [R]\} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} (1, z^2) dz \quad \text{II.17.2}$$

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \end{bmatrix} \quad \text{II.17.3}$$

### II.6.5 Solution de Navier :

Dans ce paragraphe on va développer les solutions de Navier pour un stratifié croisé simplement supporté, pour le cas déjà citer les constante de rigidité suivantes sont égales à zéro [8] :

$$A_{16} = A_{26} = A_{45} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$$

$$E_{16} = E_{26} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = D_{45} = F_{45} = 0 \quad \text{II.18}$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned}
u_0(x, 0) = \phi_x(x, 0) = u_0(x, b) = \phi_x(x, b) &= 0 \\
v_0(0, y) = \phi_y(0, y) = v_0(a, y) = \phi_y(a, y) &= 0 \\
w_0(x, 0) = w_0(x, b) = w_0(0, y) = w_0(a, y) &= 0 \\
N_{xx}(0, y) = N_{xx}(a, y) = N_{yy}(x, 0) = N_{yy}(x, b) &= 0 \\
\overline{M_{xx}}(0, y) = \overline{M_{xx}}(a, y) = \overline{M_{yy}}(x, 0) = \overline{M_{yy}}(x, b) &= 0
\end{aligned}
\tag{II.18.1}$$

Les inconnus sont exprimés en termes de double séries :

$$\begin{aligned}
u_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\
v_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\
w_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\
\phi_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\
\phi_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y)
\end{aligned}
\tag{II.19}$$

Avec :  $\alpha = n\pi/a$      $\beta = m\pi/b$

$$\Delta = \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix}
\tag{II.19.1}$$

Le chargement mécanique transversal est aussi développé en double séries comme suite :

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)
\tag{II.20}$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy$$

Les coefficients du vecteur  $\Delta$  sont obtenus à travers la résolution du système suivant (cas d'un chargement mécanique) :

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{25} & s_{45} & s_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{II.21}$$

Avec :

$$s_{11} = A_{11} \alpha^2 + A_{66} \beta^2$$

$$s_{12} = (A_{12} + A_{66}) \alpha \beta$$

$$s_{13} = -c_1 [E_{11} \alpha^2 + (E_{12} + 2E_{66}) \beta^2] \alpha$$

$$s_{14} = \hat{B}_{11} \alpha^2 + \hat{B}_{66} \beta^2$$

$$s_{15} = (\hat{B}_{12} + \hat{B}_{66}) \alpha \beta$$

$$s_{22} = A_{66} \alpha^2 + A_{22} \beta^2$$

$$s_{23} = -c_1 [E_{22} \beta^2 + (E_{12} + 2E_{66}) \alpha^2] \beta$$

$$s_{24} = s_{15}$$

$$s_{25} = \hat{B}_{66} \alpha^2 + \hat{B}_{22} \beta^2$$

$$s_{33} = \bar{A}_{55} \alpha^2 + \bar{A}_{44} \beta^2 + c_1^2 [H_{11} \alpha^4 + 2(H_{12} + 2H_{66}) \alpha^2 \beta^2 + H_{22} \beta^4]$$

$$s_{34} = \bar{A}_{55} \alpha - c_1 [\hat{F}_{11} \alpha^3 + (\hat{F}_{12} + 2\hat{F}_{66}) \alpha \beta^2]$$

$$s_{35} = \bar{A}_{44} \beta - c_1 [\hat{F}_{11} \alpha^3 + (\hat{F}_{12} + 2\hat{F}_{66}) \alpha^2 \beta]$$

$$s_{44} = \bar{A}_{55} + \bar{D}_{11} \alpha^2 + D_{66} \beta^2$$

$$s_{45} = (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) \alpha \beta$$

$$s_{55} = \bar{A}_{44} + \bar{D}_{66} \alpha^2 + \bar{D}_{22} \beta^2$$

$$\hat{A}_{ij} = A_{ij} - c_1 D_{ij}, \hat{B}_{ij} = B_{ij} - c_1 E_{ij}, \hat{D}_{ij} = D_{ij} - c_1 F_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\hat{F}_{ij} = F_{ij} - c_1 H_{ij}, \bar{A}_{ij} = \hat{A}_{ij} - c_1 \hat{D}_{ij} = A_{ij} - 2c_1 D_{ij} + c_1^2 F_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\bar{D}_{ij} = \hat{D}_{ij} - c_1 \hat{F}_{ij} = D_{ij} - 2c_1 F_{ij} + c_1^2 H_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\bar{A}_{ij} = \hat{A}_{ij} - c_2 \hat{D}_{ij} = A_{ij} - 2c_2 D_{ij} + c_2^2 F_{ij}, \quad (i, j = 4, 5)$$

## II.6.6 Calcul des contraintes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.22}$$

D'où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^3 \\ \varepsilon_{yy}^3 \\ \gamma_{xy}^3 \end{Bmatrix} =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} (R_{mn}^{xx} + zS_{mn}^{xx} + C_1 z^3 T_{mn}^{xx}) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ (R_{mn}^{yy} + zS_{mn}^{yy} + C_1 z^3 T_{mn}^{yy}) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ (R_{mn}^{xy} + zS_{mn}^{xy} + C_1 z^3 T_{mn}^{xy}) \cos(\alpha x) \cos(\beta y) \end{Bmatrix} \quad \text{II.23}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{mn}^{xx} \\ R_{mn}^{yy} \\ R_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha U_{mn} \\ -\beta V_{mn} \\ \beta U_{mn} + \alpha V_{mn} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_{mn}^{xx} \\ S_{mn}^{yy} \\ S_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha X_{mn} \\ -\beta Y_{mn} \\ \beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} \end{Bmatrix} \quad \text{II.24}$$

$$\begin{Bmatrix} T_{mn}^{xx} \\ T_{mn}^{yy} \\ T_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha X_{mn} + \alpha^2 W_{mn} \\ \beta Y_{mn} + \beta^2 W_{mn} \\ -(\beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} + 2\alpha\beta W_{mn}) \end{Bmatrix} \quad \text{II.25}$$

les contraintes de cisaillement transverses des équations constitutives sont données par [8] :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^k &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} Q'_{44} & 0 \\ 0 & Q'_{55} \end{bmatrix}^k \left( \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^2 \\ \gamma_{xz}^2 \end{Bmatrix} \right) \\ &= (1 - c_2 z^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} Q'_{44} & 0 \\ 0 & Q'_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} (Y_{mn} + \beta W_{mn}) \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ (X_{mn} + \alpha W_{mn}) \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \text{II.26}$$

Où  $c_2 = \frac{4}{h^2}$  ne signifie pas que les contraintes de cisaillement transverses sont quadratiques par couches dans l'épaisseur.

## II.7 MODELISATION DU COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE :

Les composites thermo structuraux sont destinés a assurer les fonctions mécaniques a haute température; c'est lors de la conception qu'on doit prendre en compte le contraintes mécaniques et thermique .il devient aujourd'hui essentiel de pouvoir prédire les propriétés thermique des composites avant même leur élaborations.

Pour le cas d'un chargement hygro thermomécanique les coefficients du vecteur  $\Delta$  exprimés dans la formule (II.19.1) sont obtenus à travers la résolution du système :

$$\begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{25} & S_{45} & S_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha N^{T1}_{mn} \\ -\beta N^{T2}_{mn} \\ Q_{mn} \\ -\alpha \bar{M}^{T1}_{mn} \\ \beta \bar{M}^{T2}_{mn} \end{Bmatrix} \quad \text{II.27}$$

$$N_{mn}^{T(a)} = \sum_{K=1}^N \int_{zK}^{zK+1} [Q_i]^k \{\alpha_{(a)}\}^k \Delta T(x, y, z) dz$$

$$M_{mn}^{T(a)} = \sum_{K=1}^N \int_{zK}^{zK+1} [Q_i]^k \{\alpha_{(a)}\}^k \Delta T(x, y, z) z dz$$

$$P_{mn}^{T(a)} = \sum_{K=1}^N \int_{zK}^{zK+1} [Q_i]^k \{\alpha_{(a)}\}^k \Delta T(x, y, z) z^3 dz$$

AVEC : (a) = xx , yy, xy

$$\bar{M}_{mn}^{T(a)} = M_{mn}^{T(a)} - \frac{4}{3h^2} P_{mn}^{T(a)}$$

$$T_{mn}^i = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b T^i \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy$$

$$\Delta T(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f(z, T),) \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$$

### III.7.1 Les contraintes relatives à chaque couche :

Peut-être calculer par [8] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^i = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}^i \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}^i \Delta T(x, y, z) \right) \quad \text{II.28}$$

## **Chapitre III : résultats et interprétation**

### **III .1 Introduction :**

Dans ce chapitre nous allons présenter les résultats de l'étude de comportement des plaques en matériaux composite (stratifier), les plaques que nous avons étudiées sont des plaques rectangulaires minces et épaisses.

Ces résultats sont obtenus grâce à un programme MATLAB qu'on a développé, dans lequel on a utilisé :

- ✓ Théorie classique des plaques minces (CLPT);
- ✓ Théorie d'ordre supérieur (HSDT).

### **III .2 Organigramme de la plaque mince:**

La figure ci-dessous qui représente ce organigramme contenant plusieurs éléments dans le but de bien comprendre comment fonctionne notre sous-programme de calcul.

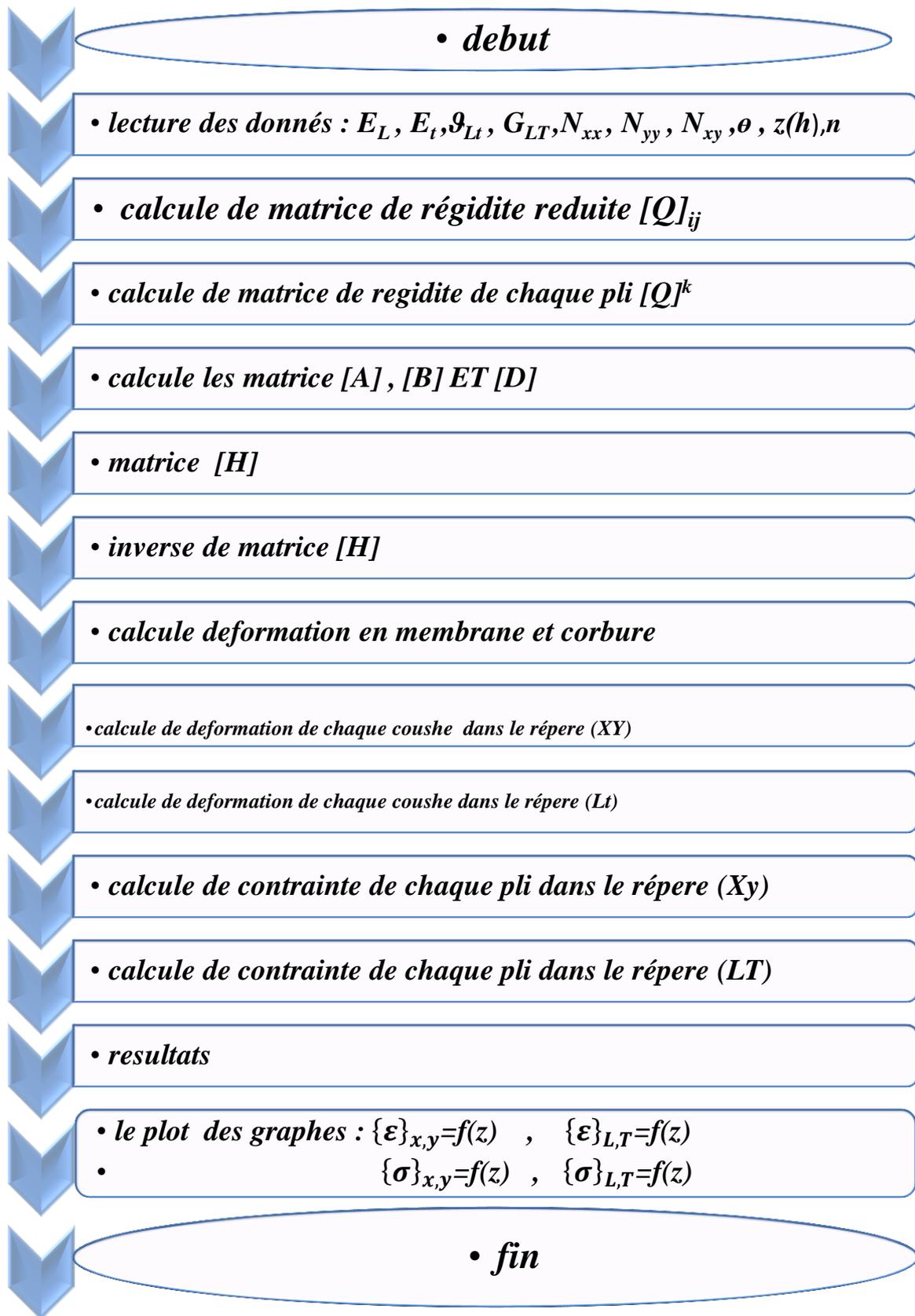


Figure (III. 3): Organigramme de la plaque mince.

### III .3 Simulation des plaques minces :

Afin de valider notre programme développé les résultats obtenus sont en bonne concordance avec les résultats de la référence [1].

#### III .3.1 conditions de simulation :

- ✓ Le stratifié qu'on a étudié:

1 mm	30 °
1.5 mm	-15°
1 mm	30 °
1.5 mm	15°

Figure (III. 4): Stratifié [30°/-15°/-30°/15°].

- ✓ Dans le tableau qui suit, présente les conditions mécaniques du stratifié qu'on a choisi pour faire notre calcul

Tableau (III. 2): Les conditions mécaniques.

Module d'Young longitudinal	$E_L = 38000 \text{ MPa}$
Module d'Young transverse	$E_T = 9000 \text{ MPa}$
Module de cisaillement :	$G_{LT} = 3600 \text{ MPa}$
Coefficient de Poisson principal	$\nu_{LT} = 0.32$
Les moments appliqués	$M_{xx} = M_{yy} = M_{xy} = 0 \text{ N/mm}^2$
Les efforts normaux	$N_{xx} = 10^6 \text{ (N/mm)}$
	$N_{yy} = 5 \cdot 10^5 \text{ (N/mm)}$
	$N_{xy} = 2.5 \cdot 10^5 \text{ N/mm}$

#### III .3.2 résultats :

- ✓ Matrice de rigidité réduite:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 3.8945e + 01 & 2.9516e + 00 & 0 & 0 \\ 2.9516e + 00 & 9.2237e + 00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.6000e + 00 \end{bmatrix}$$

✓ Les matrices de rigidité des différentes couches:

➤ **Matrice de rigidité de la 1 ère couche  $\theta = 15^\circ$ :**

$$[Q']_{\theta=15^\circ} = \begin{bmatrix} 3.5212e+01 & 4.6931e+00 & 6.7316e+00 \\ 4.6931e+00 & 9.4731e+00 & 6.9862e-01 \\ 6.7316e+00 & 6.9862e-01 & 5.3416e+00 \end{bmatrix}$$

➤ **Matrice de rigidité de la 2 ème couche  $\theta = (-30^\circ)$ :**

$$[Q']_{\theta=-30^\circ} = \begin{bmatrix} 2.6290e+01 & 8.1763e+00 & -9.4512e+00 \\ 8.1763e+00 & 1.1429e+01 & -3.4183e+00 \\ -9.4512e+00 & -3.4183e+00 & 8.8247e+00 \end{bmatrix}$$

➤ **Matrice de rigidité de la 3 ème couche  $\theta = (-15^\circ)$ :**

$$[Q']_{\theta=-15^\circ} = \begin{bmatrix} 3.5212e+01 & 4.6931e+00 & -6.7316e+00 \\ 4.6931e+00 & 9.4731e+00 & -6.9862e-01 \\ -6.7316e+00 & -6.9862e-01 & 5.3416e+00 \end{bmatrix}$$

➤ **Matrice de rigidité de la 4 ème couche  $\theta = (30^\circ)$ :**

$$[Q']_{\theta=30^\circ} = \begin{bmatrix} 2.6290e+01 & 8.1763e+00 & 9.4512e+00 \\ 8.1763e+00 & 1.1429e+01 & 3.4183e+00 \\ 9.4512e+00 & 3.4183e+00 & 8.8247e+00 \end{bmatrix}$$

✓ Les matrices de rigidité du stratifié A B D:

➤ **A matrice de rigidité en membrane :**

$$[A] = \begin{bmatrix} 1.5822e+02 & 3.0432e+01 & 0 \\ 3.0432e+01 & 5.1278e+01 & 0 \\ 0 & 0 & 3.3674e+01 \end{bmatrix}$$

➤ **B matrice de couplage flexion-torsion:**

$$[B] = \begin{bmatrix} -1.3384e+01 & 5.2247e+00 & -1.6154e+00 \\ 5.2247e+00 & 2.9342e+00 & 5.9258e+00 \\ -1.6154e+00 & 5.9258e+00 & 5.2247e+00 \end{bmatrix}$$

➤ **D matrice de rigidité en flexion :**

$$[D] = \begin{bmatrix} 3.2738e+02 & 6.4271e+01 & 6.0686e+01 \\ 6.4271e+01 & 1.0732e+02 & 1.5438e+01 \\ 6.0686e+01 & 1.5438e+01 & 7.1025e+01 \end{bmatrix}$$

✓ La matrice H (équation constitutive):

$$[H] = \begin{bmatrix} 1.5822e+02 & 3.0432e+01 & 0 & -1.3384e+01 & 5.2247e+00 & -1.6154e+00 \\ 3.0432e+01 & 5.1278e+01 & 0 & 5.2247e+00 & 2.9342e+00 & 5.9258e+00 \\ 0 & 0 & 3.3674e+01 & -1.6154e+00 & 5.9258e+00 & 5.2247e+00 \\ -1.3384e+01 & 5.2247e+00 & -1.6154e+00 & 3.2738e+02 & 6.4271e+01 & 6.0686e+01 \\ 5.2247e+00 & 2.9342e+00 & 5.9258e+00 & 6.4271e+01 & 1.0732e+02 & 1.5438e+01 \\ -1.6154e+00 & 5.9258e+00 & 5.2247e+00 & 6.0686e+01 & 1.5438e+01 & 7.1025e+01 \end{bmatrix}$$

✓ La matrice inverse  $H^{-1}$  :

$$= \begin{bmatrix} 6.7195e-03 & -3.7090e-03 & -2.7865e-04 & 4.1544e-04 & -5.2541e-04 & 2.7865e-04 \\ -4.0471e-03 & 2.2057e-02 & 1.8099e-03 & -1.8738e-04 & -4.2073e-05 & -1.8099e-03 \\ -1.0321e-03 & 1.9209e-03 & 3.2427e-02 & 1.0321e-03 & -1.9209e-03 & -2.7302e-03 \\ 4.1544e-04 & -1.8738e-04 & 1.0321e-03 & 4.0518e-03 & -2.0576e-03 & -3.0655e-03 \\ -5.2541e-04 & -4.2073e-05 & -1.9209e-03 & -2.0576e-03 & 1.0747e-02 & -4.4512e-04 \\ 2.7865e-04 & -1.8099e-03 & -2.7302e-03 & -3.0655e-03 & -4.4512e-04 & 1.7154e-02 \end{bmatrix}$$

✓ Déformations en membrane:

$$\epsilon_{xx} = 4.7954e+00$$

$$\epsilon_{yy} = 7.4338e+00$$

$$\gamma_{xy} = 8.0350e+00$$

✓ Déformations de courbures:

$$K_{xx} = 5.7977e-01$$

$$K_{yy} = -1.0267e+00$$

$$K_{xy} = -1.3089e+00$$

✓ Les champs des déformations dans le repère (XY):

➤ La 1 ère couche  $\theta = 15^\circ$ :

Face inférieure

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 3.3460e+00 \\ 1.0001e+01 \\ 1.1307e+01 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 4.2156e+00 \\ 8.4605e+00 \\ 9.3439e+00 \end{bmatrix}$$

➤ La 2 ème couche  $\theta = -30^\circ$ :

Face inférieure

Face supérieure

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 4.2156e+00 \\ 8.4605e+00 \\ 9.3439e+00 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 4.7954e+00 \\ 7.4338e+00 \\ 8.0350e+00 \end{bmatrix}$$

➤ **La 3 ème couche  $\theta = -15^\circ$ :**

Face inferieure

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 4.7954e+00 \\ 7.4338e+00 \\ 8.0350e+00 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 5.6650e+00 \\ 5.8938e+00 \\ 6.0717e+00 \end{bmatrix}$$

➤ **La 4ème couche  $\theta = 30^\circ$ :**

Face inferieure

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 5.6650e+00 \\ 5.8938e+00 \\ 6.0717e+00 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 6.2448e+00 \\ 4.8671e+00 \\ 4.7629e+00 \end{bmatrix}$$

✓ Les champs des déformations dans le repère (LT):

➤ **La 1 ère couche  $\theta = 15^\circ$ :**

Face inferieure

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 6.6185e+00 \\ 6.7280e+00 \\ 1.3120e+01 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 6.8359e+00 \\ 5.8402e+00 \\ 1.0214e+01 \end{bmatrix}$$

➤ **La 2 ème couche  $\theta = -30^\circ$ :**

Face inferieure

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 1.2308e+00 \\ 1.1445e+01 \\ 9.9574e-01 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 1.9757e+00 \\ 1.0253e+01 \\ 1.7325e+00 \end{bmatrix}$$

➤ **La 3 ème couche  $\theta = -15^\circ$ :**

Face inferieure

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 2.9634e+00 \\ 9.2658e+00 \\ 5.6393e+00 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 4.1624e+00 \\ 7.3964e+00 \\ 5.1439e+00 \end{bmatrix}$$

➤ **La 4 ème couche  $\theta = 30^\circ$ :**

Face inferieure

Face supérieure

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 8.3514e+00 \\ 3.2075e+00 \\ 3.2340e+00 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 7.9628e+00 \\ 3.1492e+00 \\ 1.1884e+00 \end{bmatrix}$$

✓ Les champs des contraintes dans le repère (XY):

➤ **La 1ère couche  $\theta = 15^\circ$ :**

Face inférieure

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 2.4087e+02 \\ 1.1834e+02 \\ 8.9908e+01 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 2.5105e+02 \\ 1.0646e+02 \\ 8.4199e+01 \end{bmatrix}$$

➤ **La 2ème couche  $\theta = -30^\circ$ :**

Face inférieure

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 9.1691e+01 \\ 9.9225e+01 \\ 1.3694e+01 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 1.1091e+02 \\ 9.6705e+01 \\ 1.7375e-01 \end{bmatrix}$$

➤ **La 3ème couche  $\theta = -15^\circ$ :**

Face inférieure

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 1.4965e+02 \\ 8.7313e+01 \\ 5.4458e+00 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 1.8626e+02 \\ 7.8177e+01 \\ -9.8194e+00 \end{bmatrix}$$

➤ **La 4ème couche  $\theta = 30^\circ$ :**

Face inférieure

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 2.5451e+02 \\ 1.3444e+02 \\ 1.2727e+02 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 2.4898e+02 \\ 1.2297e+02 \\ 1.1769e+02 \end{bmatrix}$$

✓ Les contraintes dans le repère (LT):

➤ **La 1ère couche  $\theta = 15^\circ$ :**

Face inférieure

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 2.7761e+02 \\ 8.1592e+01 \\ 4.7230e+01 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 2.8346e+02 \\ 7.4045e+01 \\ 3.6772e+01 \end{bmatrix}$$

➤ **La 2ème couche  $\theta = -30^\circ$ :**

Face inférieure

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 8.1715e + 01 \\ 1.0920e + 02 \\ 3.5847e + 00 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1.0721e + 02 \\ 1.0041e + 02 \\ 6.2371e + 00 \end{bmatrix}$$

➤ La 3ème couche  $\theta = -15^\circ$ :

Face inférieure

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1.4276e + 02 \\ 9.4212e + 01 \\ 2.0301e + 01 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1.4276e + 02 \\ 9.4212e + 01 \\ 2.0301e + 01 \end{bmatrix}$$

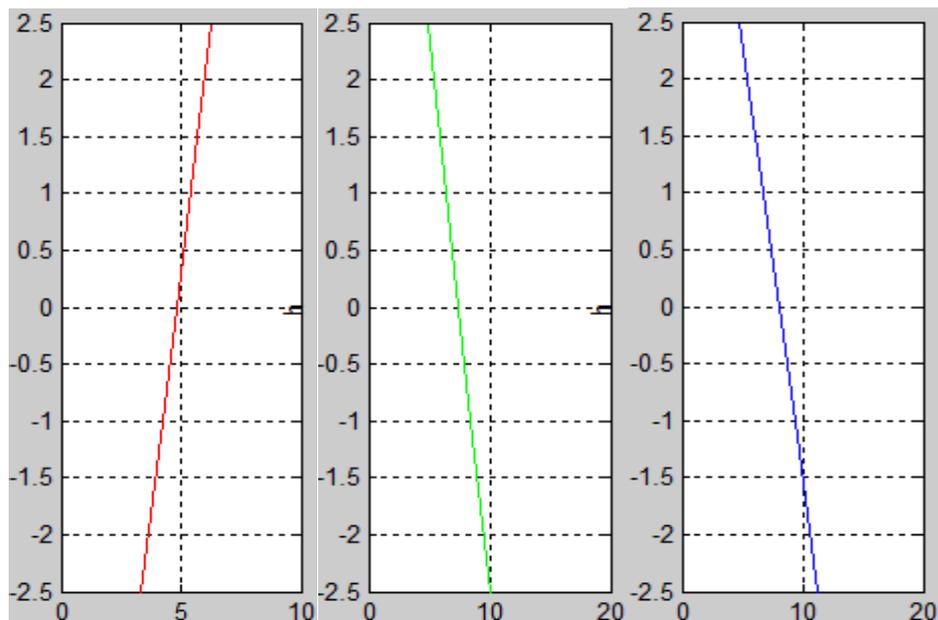
➤ La 4ème couche  $\theta = 30^\circ$ :

Face inférieure

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 3.3471e + 02 \\ 5.4234e + 01 \\ 1.1642e + 01 \end{bmatrix}$$

Face supérieure

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 3.1940e + 02 \\ 5.2550e + 01 \\ 4.2781e + 00 \end{bmatrix}$$



$\epsilon_{xx}$

$\epsilon_{yy}$

$\epsilon_{xy}$

Figure III .3.3.1 : déformation mécanique dans le repère global XY

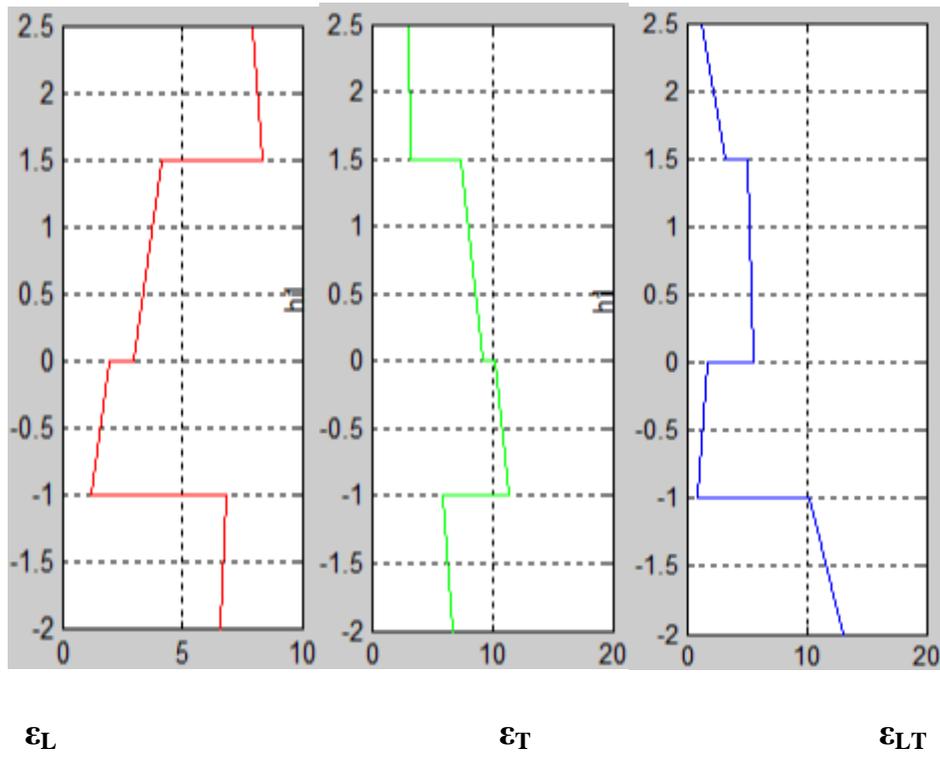


Figure III .3.3.2 : déformation mécanique dans le repère local LT

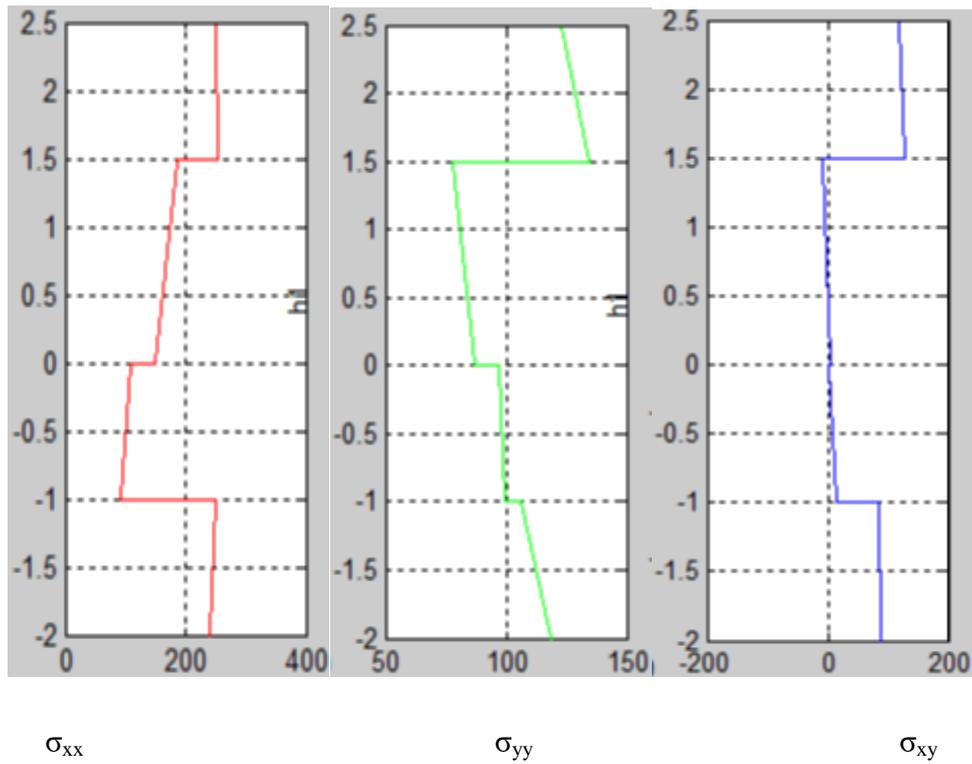


Figure III .3.3.3 : contrainte mécanique dans le repère global XY

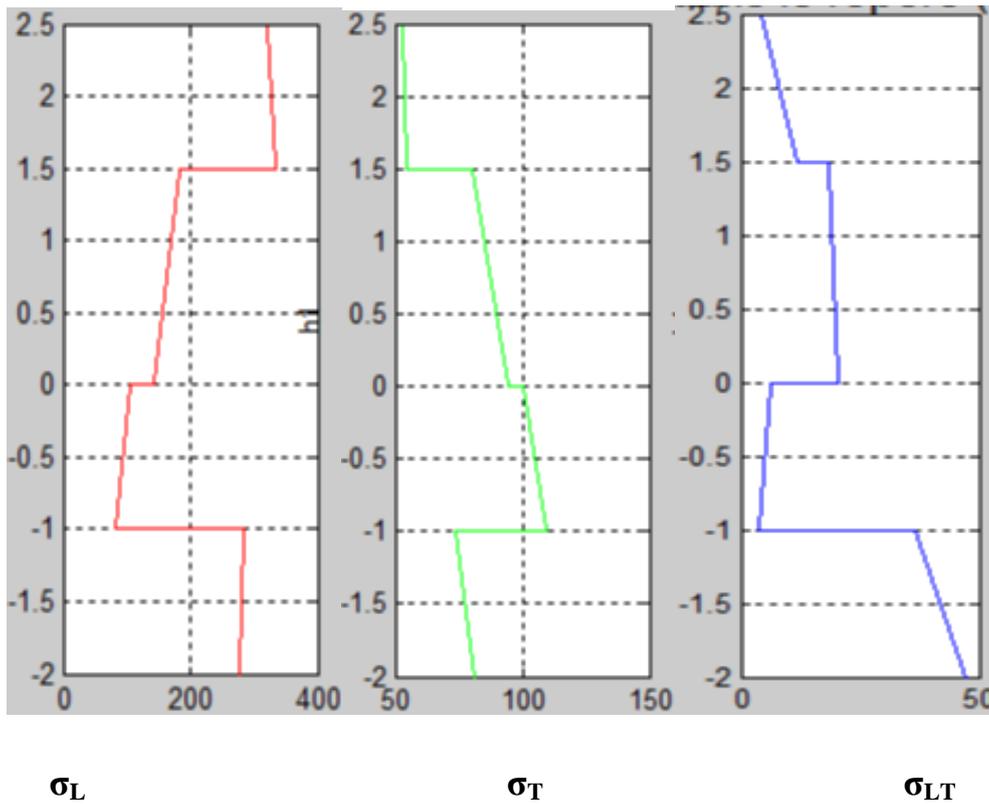


Figure III .3.3.3 : contrainte mécanique dans le repère local LT

### III .4 organigramme de la plaque épaisse :

Ce sous-programme affiche l'état de contrainte du stratifié ou on a utilisé la théorie d'ordre elevé (HSDT), ci-dessous l'organigramme de ce dernier.

Les contraintes presentees dans les graphes seront calculées par la maniere suivante :

$$\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}(a/2, b/2, h/2) \left( \frac{h^2}{b^2 q_0} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy}(a/2, b/2, h/4) \left( \frac{h^2}{b^2 q_0} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy}(0,0, h/2) \left( \frac{h^2}{b^2 q_0} \right)$$

VI.1

$$\bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz}(a/2, 0, 0) \left( \frac{h}{b q_0} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz}(0, b/2, 0) \left( \frac{h}{b q_0} \right)$$

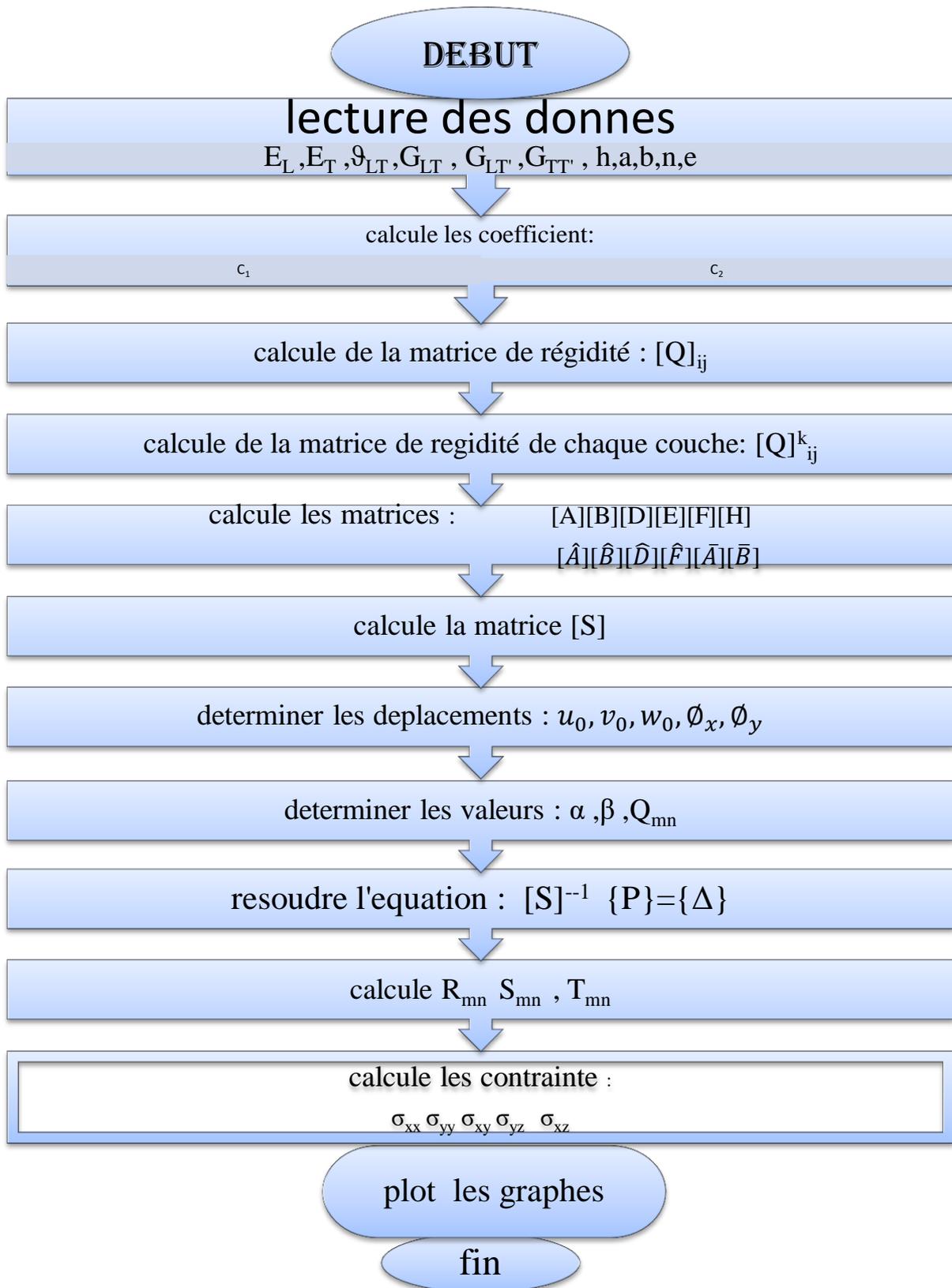


Figure (III. 4): Organigramme de la plaque épaisse.

### III.5 resultats de simulation des plaques épaisses :

- ✓ Le stratifié étudié est un stratifié ou les caractéristiques mécaniques sont données dans le tableau ci-dessous:

Tableau IV .4.1 : condition mécanique de la plaque [11][12][13]

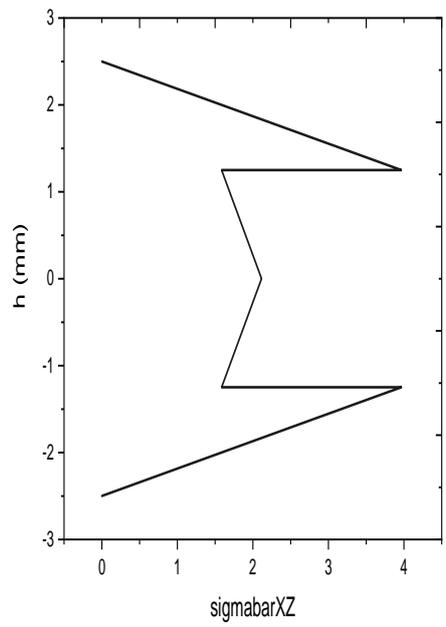
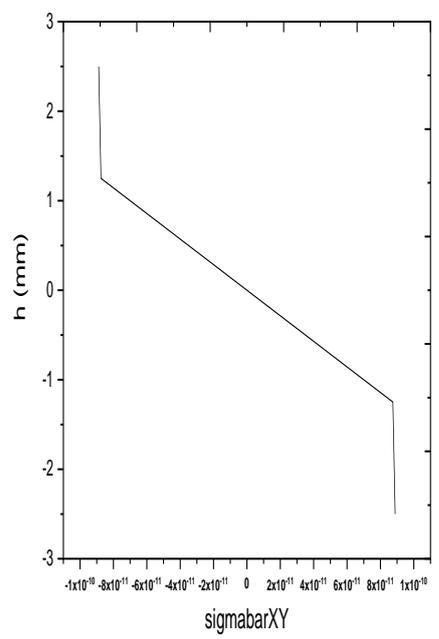
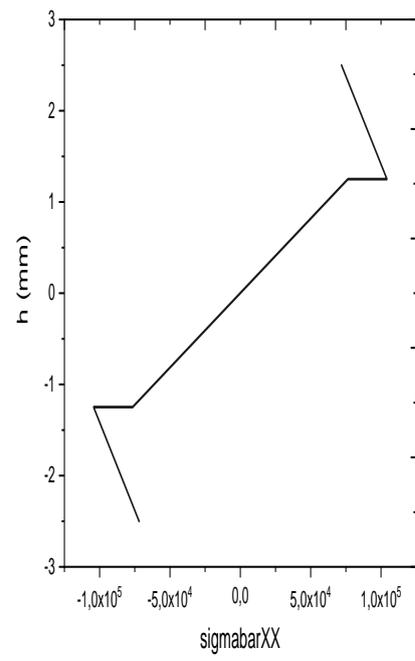
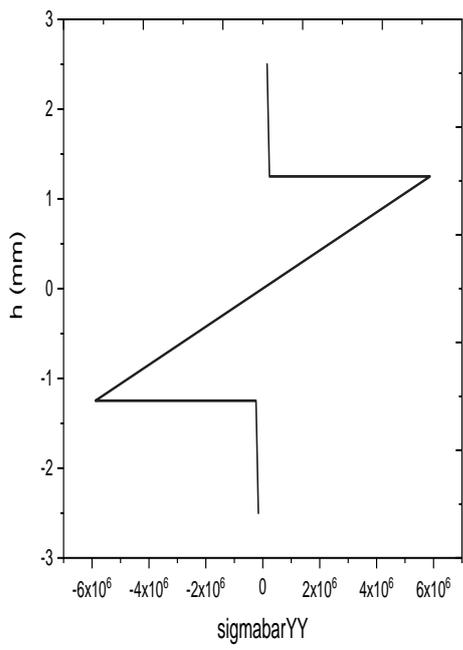
Module d'Young longitudinal	$E_L = 175\text{GPa}$
Module d'Young transverse	$E_T = 7\text{GPa}$
Module de cisaillement :	$G_{LT} = 3.5\text{GPa}$ $G_{LT'} = 3.5\text{GPa}$ $G_{TT'} = 1.4\text{GPa}$
Coefficient de Poisson principal	$\nu_{LT} = 0.25$
Les dimensions de la plaque	a= 20mm
	b= 3mm
	h= 5mm
Orientation des couches :	[0/90/90/0]
Coefficient de dilatation thermique	$\alpha_x = 0.02 * 10^{-6}$ , $\alpha_y = 22.5 * 10^{-6}$ .

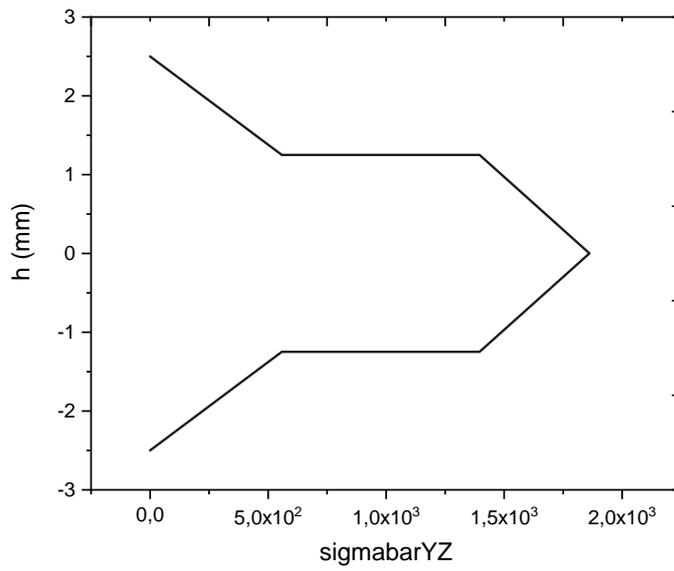
Afin de valider notre programme développé les résultats en terme de plaque épaisse obtenue sont en bonne concordance avec les résultats de la référence [6] et [10].

#### III .5.1 Influence du mode de sollicitation :

➤ *Mécanique :*

$$q_0 = 100, \Delta T = T_{opr} - T_0 = 0$$

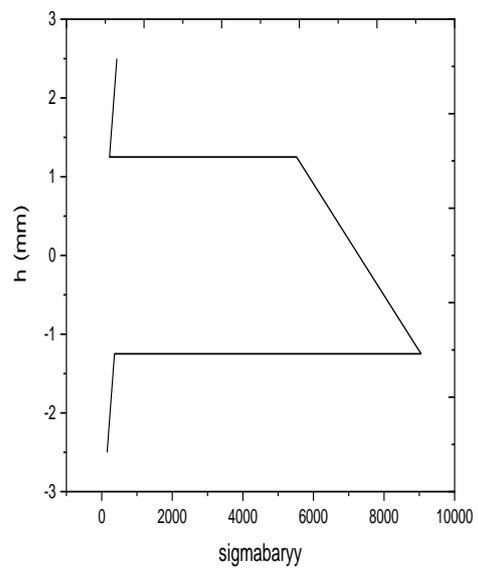
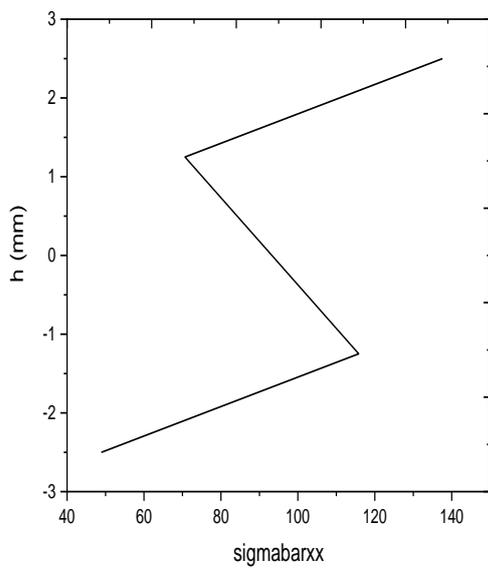


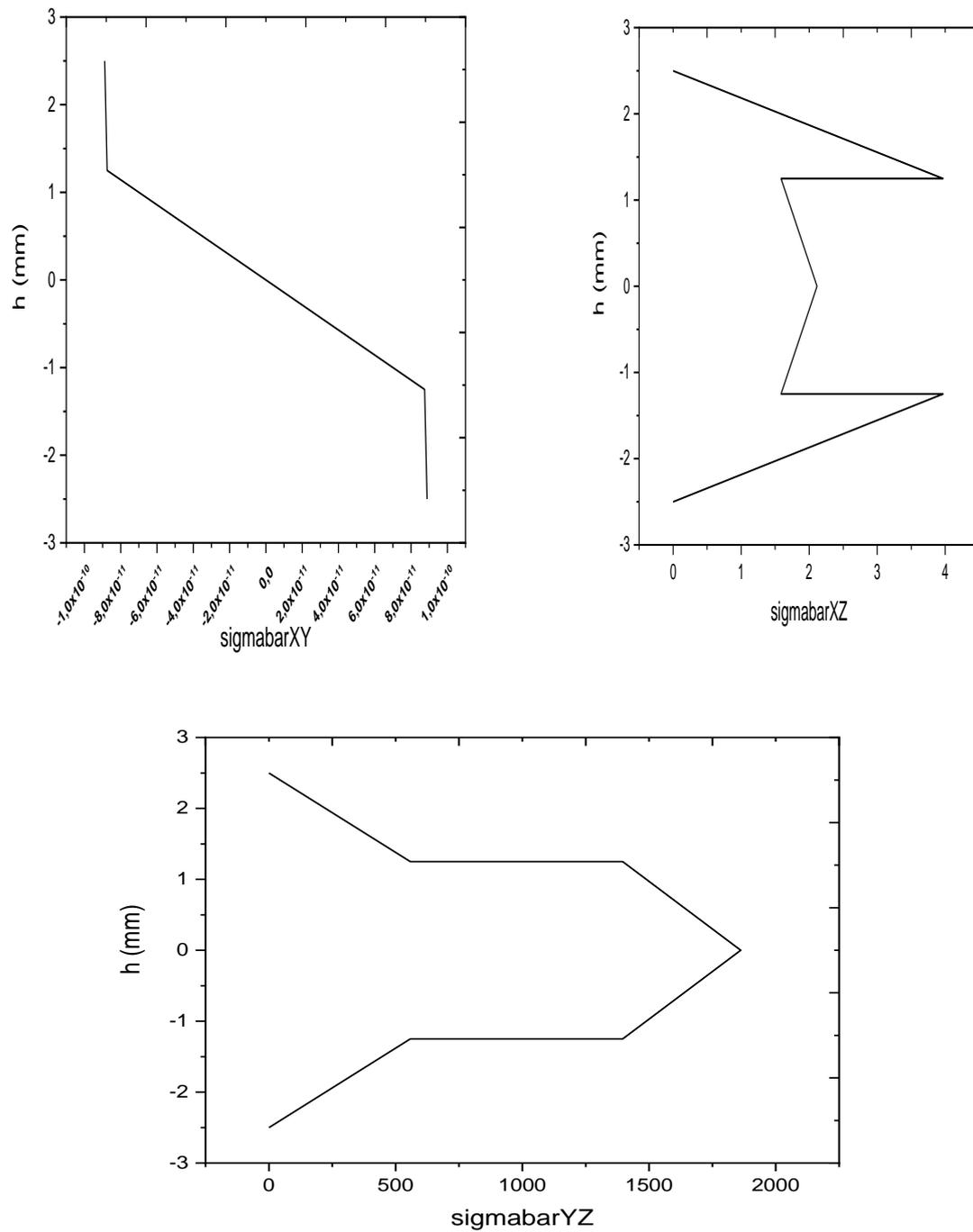


Figures (III. 5):influence de la sollicitation mécanique sur une plaque composite

➤ **Thermique :**

$$q_0 = 0, T_{opr} = 60^{\circ}C$$

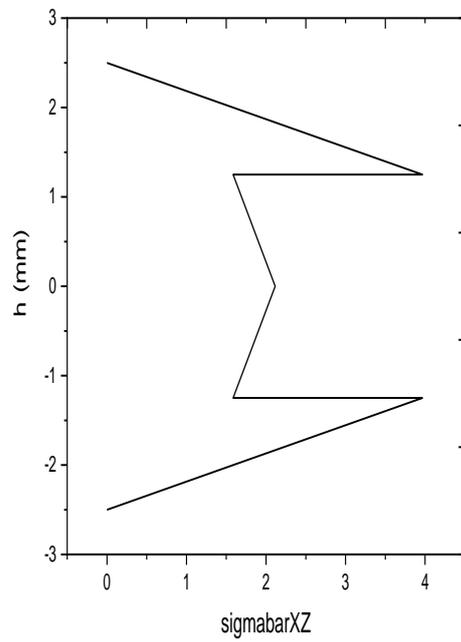
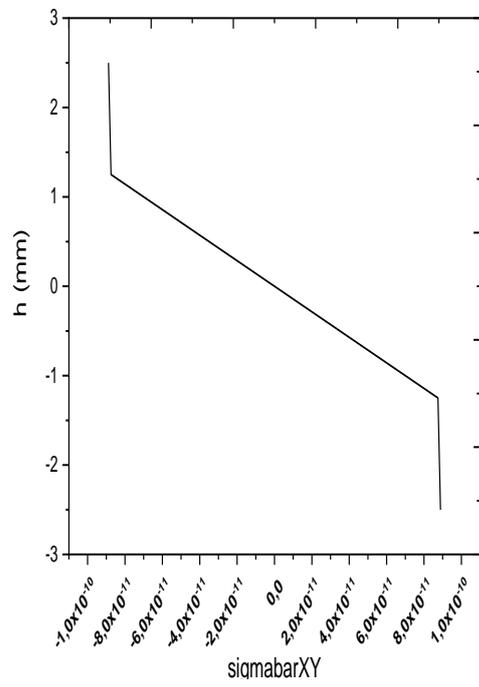
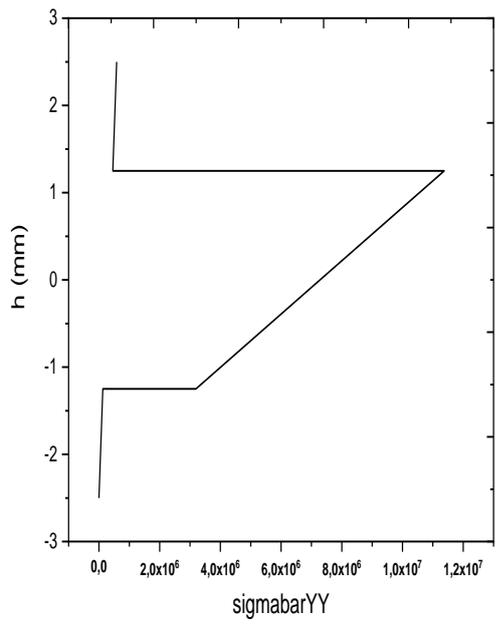
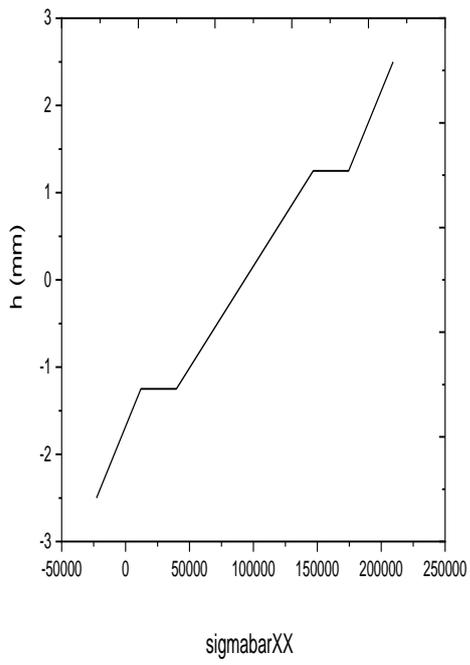


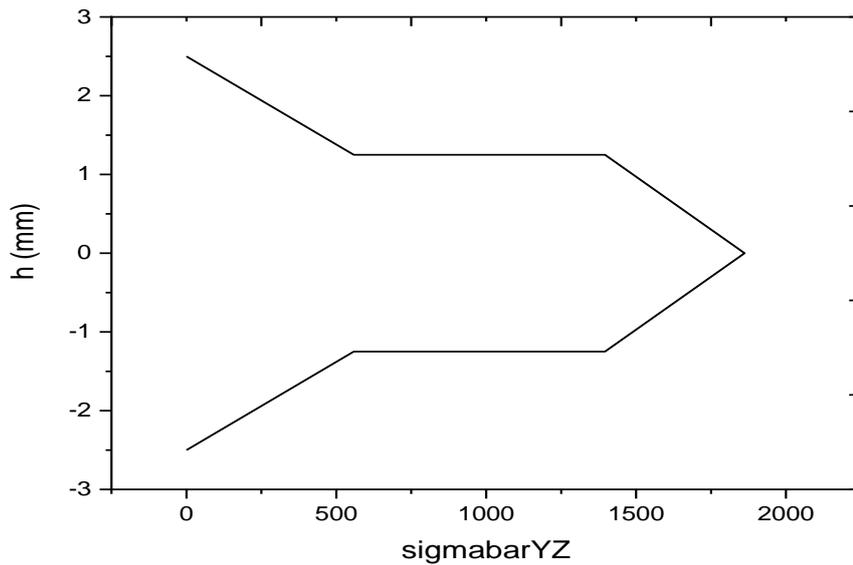


Figures (III. 6):influence de la sollicitation thermique sur une plaque composite

➤ **Thermomécanique : mécanique+thermique**

$$q_0 = 100, T_{opr} = 60^\circ\text{C}$$





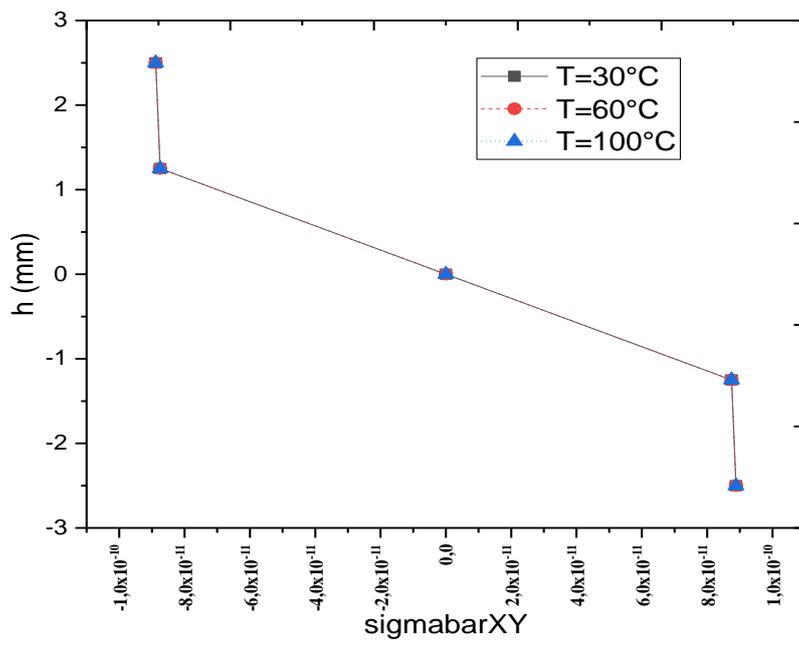
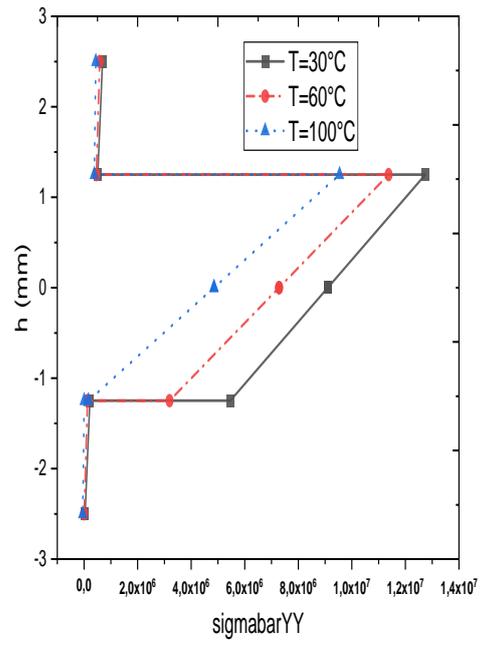
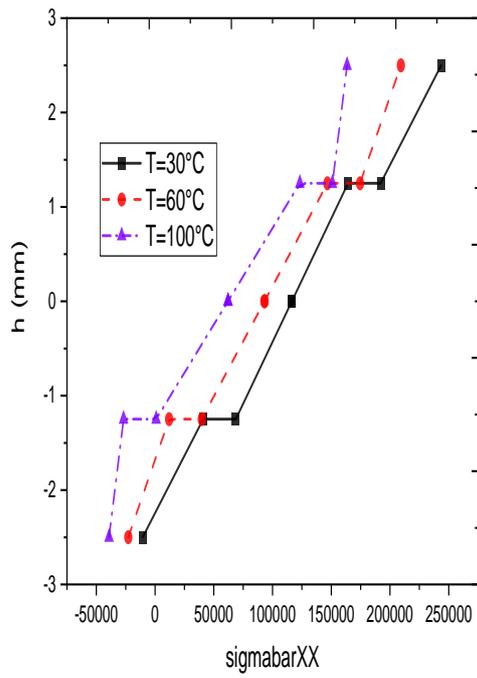
Figures (III. 7):influence de sollicitation thermomécanique sur une plaque composite

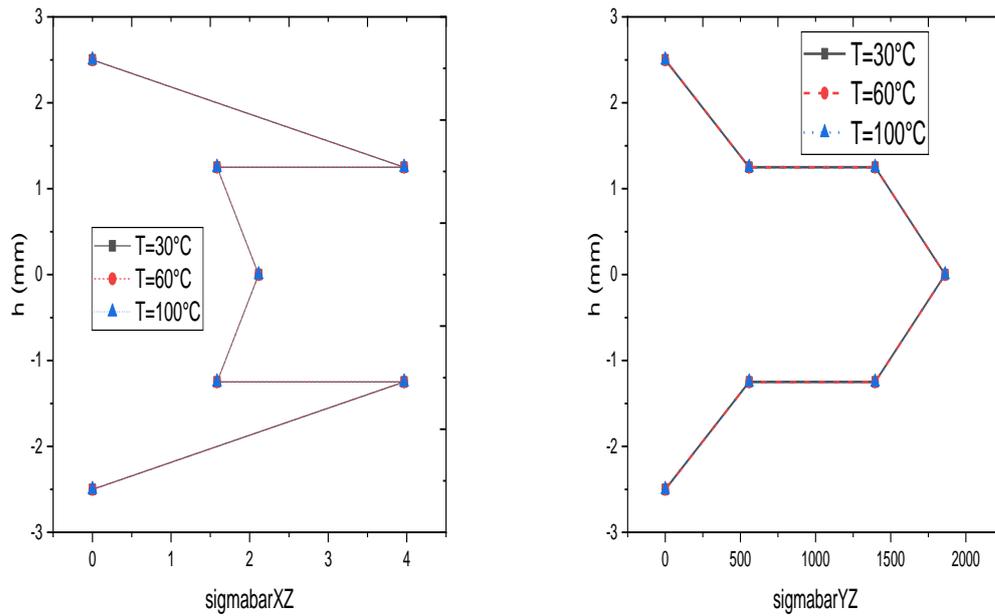
Les figures (III.5 ,6,7) représentent le comportement d'une plaque composite épaisse sous différents modes de sollicitation externe, Mode mécanique ou la stratifiée est soumise à une force mécanique, mode thermique avec absence de force mécanique dans ce cas on tient compte de la température opérationnelle dans laquelle se trouve notre plaque, mode thermomécanique ou on la superposition des deux modes précédents, les résultats montrent clairement une dépendance entre le mode de sollicitation et le comportement de la plaque en terme d'allure de graphes, ces derniers sont conservés malgré le changement du mode de sollicitation, l'ordre de grandeur des contraintes thermique est beaucoup plus inférieur par rapport au cas mécanique.

### III .5.2 Influence de température opérationnelle :

$$q_0 = 100, T_0 = 180^\circ\text{C}$$

$T_{opr}$	$T_{opr}$	$T_{opr}$
$30^\circ\text{C}$	$60^\circ\text{C}$	$100^\circ\text{C}$





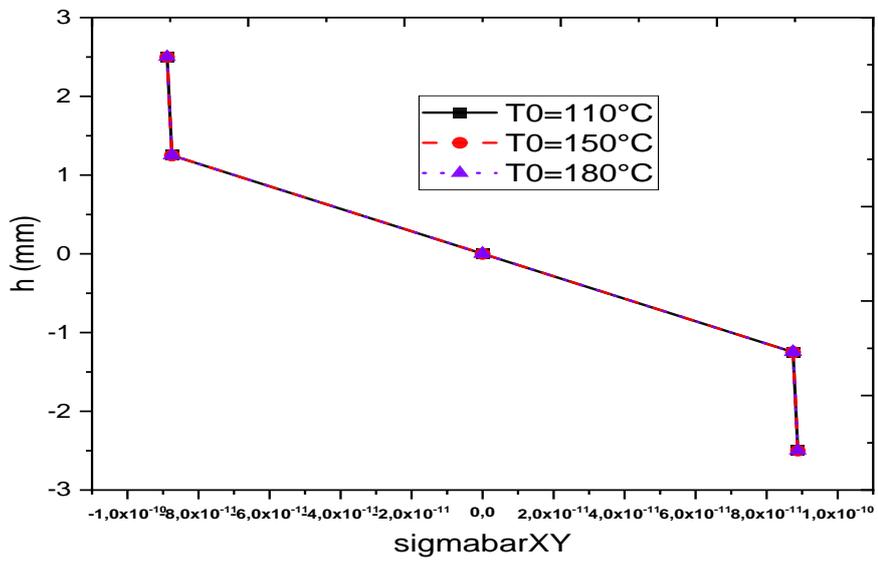
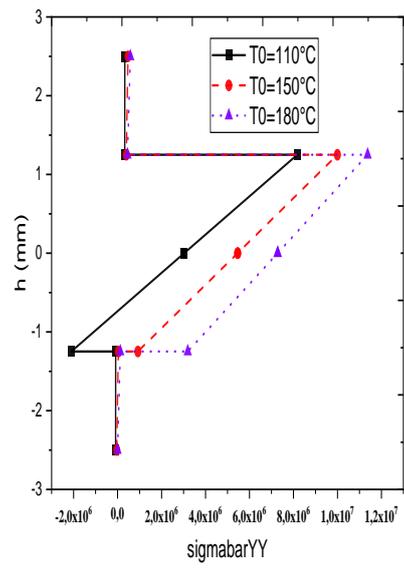
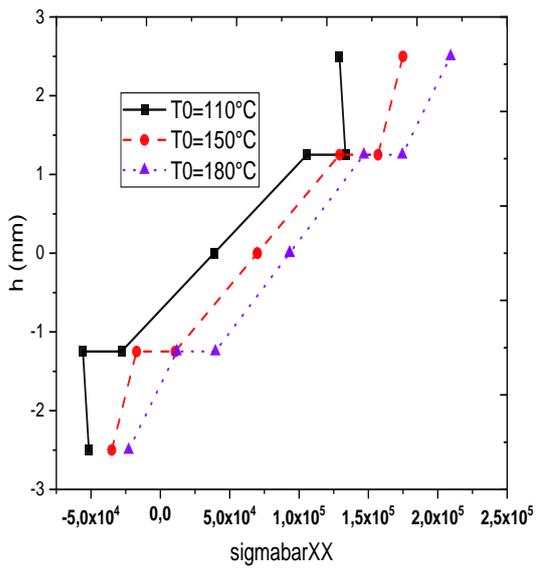
Figures (III. 8):influence de la température opérationnelle

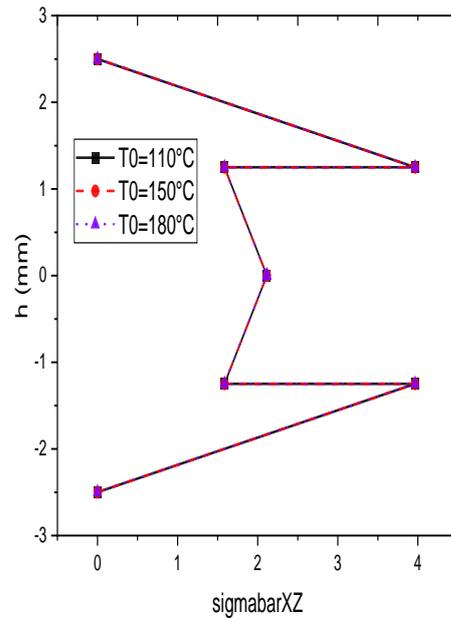
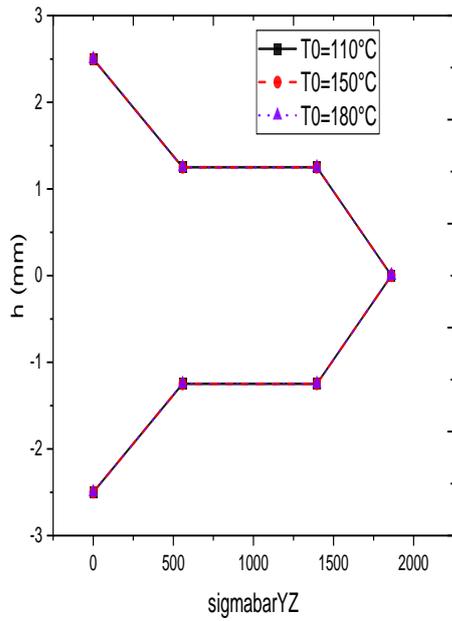
Les Figures( III.8) présentent le comportement du stratifié dans différents cas de température opérationnelle , les contraintes longitudinales et transversales sont très influencées par le changement de cette dernière, plus la température opérationnelle augmente l'états de contraintes est moins important est cela est dû à la réduction de la longueur du gradient de température, la contraintes dans le plan (xy) et les cisaillement transversales sont pas influence par le changement de la température opérationnelle. Le comportement du stratifié change avec la température d'une manière très faible et celui-là est dû à l'ordre de la grandeur du coefficient de dilatation thermique.

### III .5.3 Influence de température de référence :

$$q_0 = 100 , T_{opr} = 100^\circ C$$

$T_0$	$T_0$	$T_0$
180°C	150°C	110°C





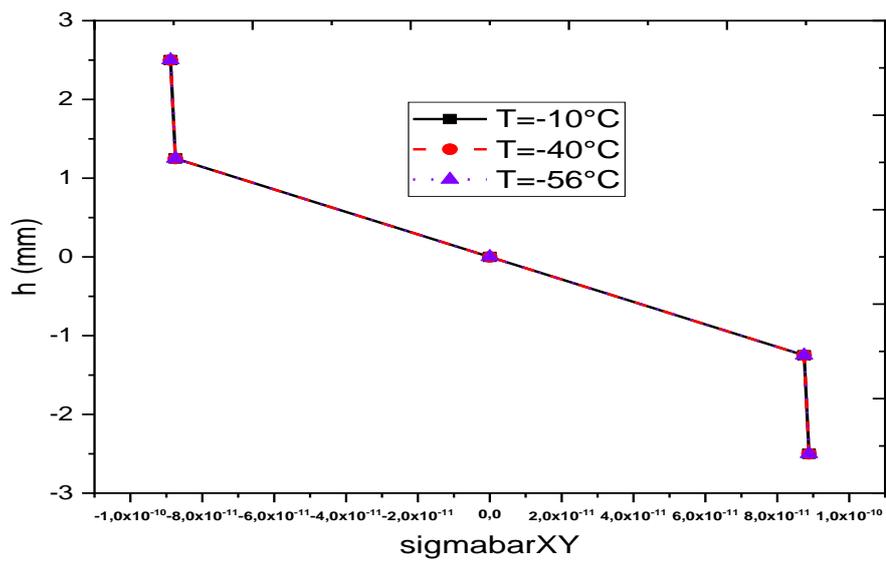
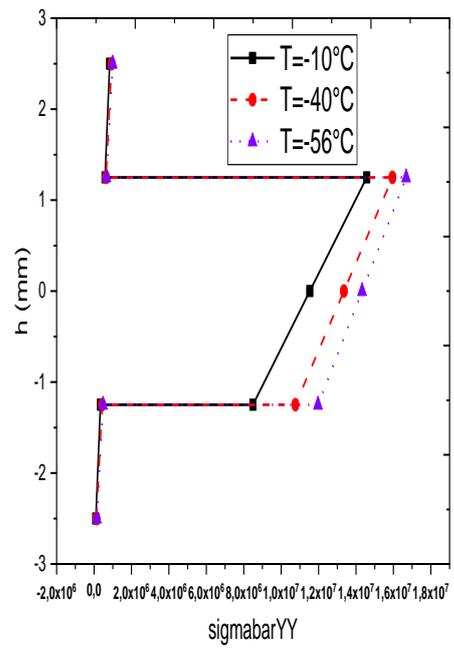
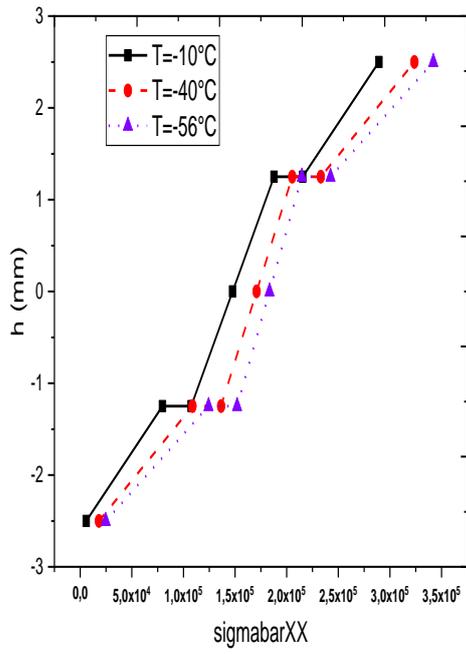
Figures (III. 9):influence de la température de référence

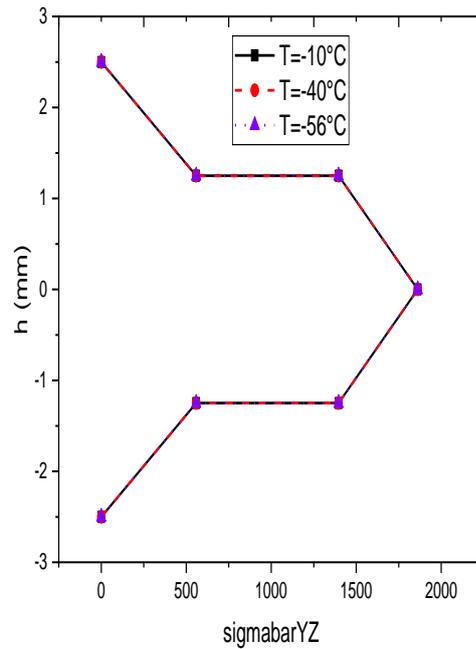
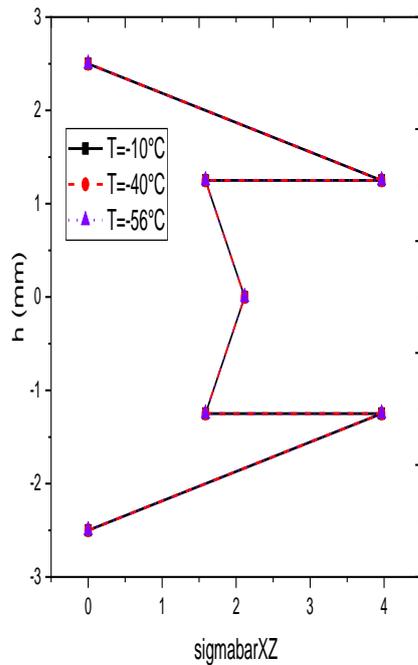
Dans cette section on a repris la simulation précédente sauf que dans ce cas la température opérationnelle est figée, et la température de référence change dans le but de voir l'influence de cette dernière, le but de cette simulation est de prouver que si on arrive techniquement à réduire la température de référence cela va nous permettre d'avoir un état de contrainte moins important pour la même température opérationnelle T.

### III .5.4 Influence de température opérationnelle négative :

$$q_0 = 100$$

$T_0$	$T_0$	$T_0$
$-10^{\circ}C$	$-40^{\circ}C$	$-56^{\circ}C$





Figures (III. 10):influence de température opérationnelle négative

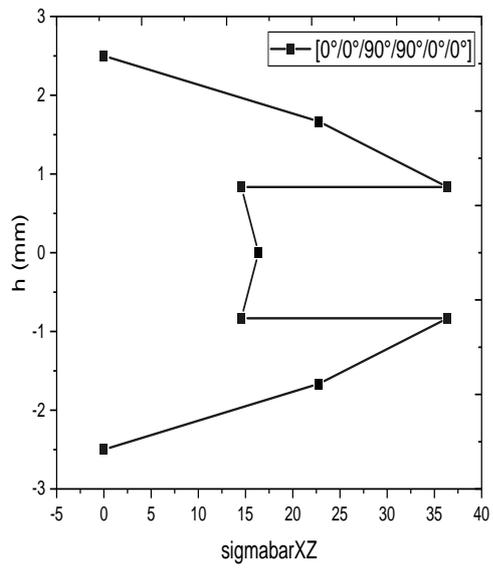
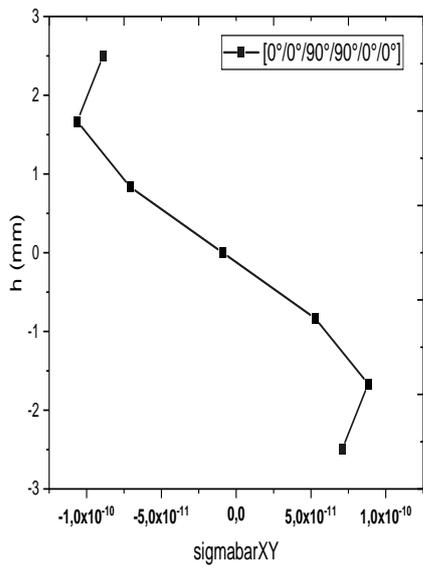
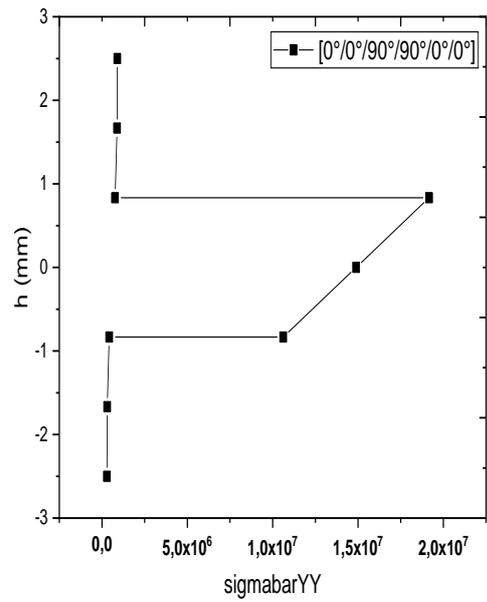
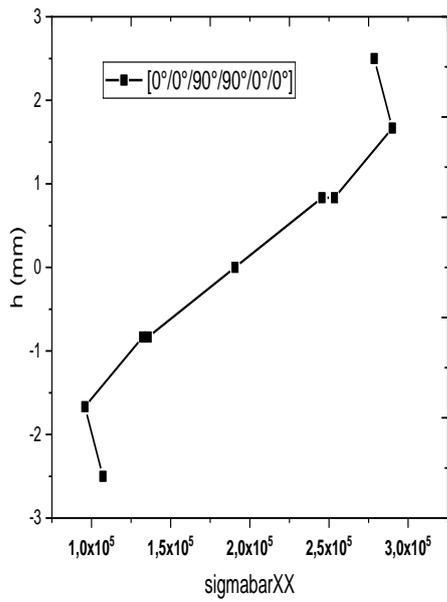
Dans cette section nous avons simulé le comportement du composite dans un environnement où règne une température opérationnelle négative, on remarque que même pour ce cas une influence est remarquée, en général les mêmes commentaires de la 1<sup>ère</sup> section sont applicables ici.

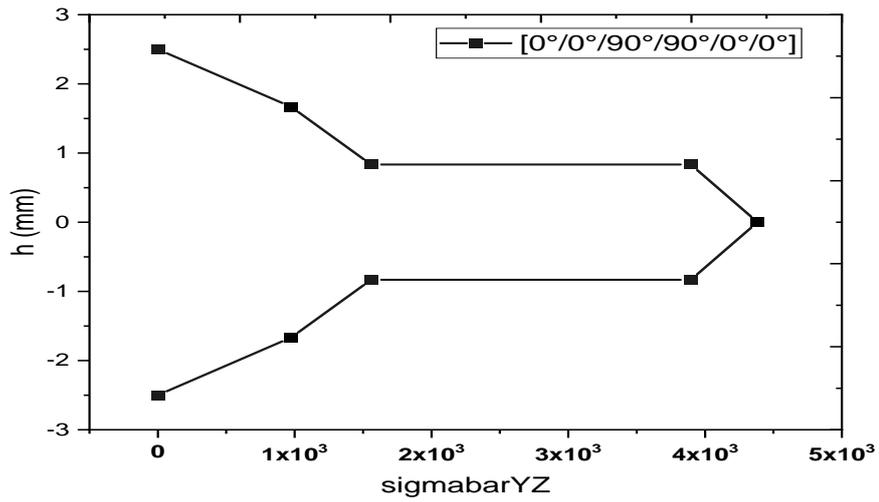
### III .5.5 Influence de l'anisotropie :

$q_0$	$T_0$	$T_{opr}$	$h$	$a$	$b$
100	180°C	60°C	5	20	1

On va étudier l'influence du nombre de couches sur le comportement mécanique, pour cela on a étudié trois stratifiés différents :

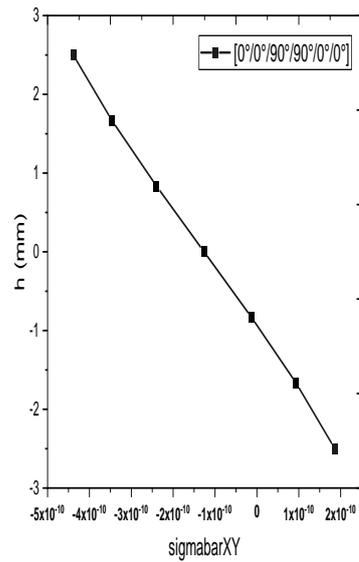
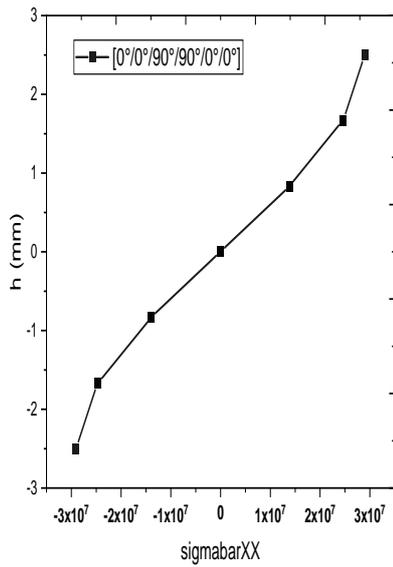
➤ Le premier stratifier :  $[0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ/0^\circ]$

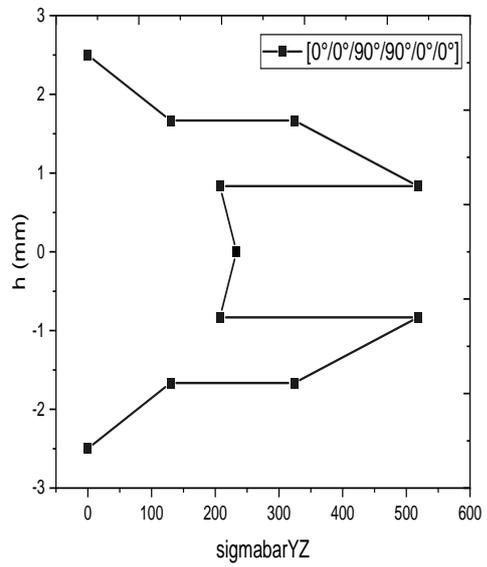
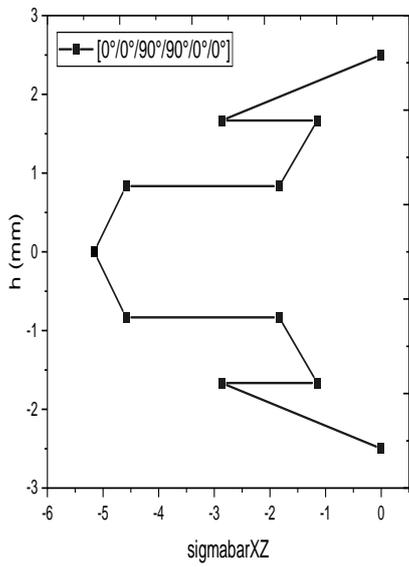
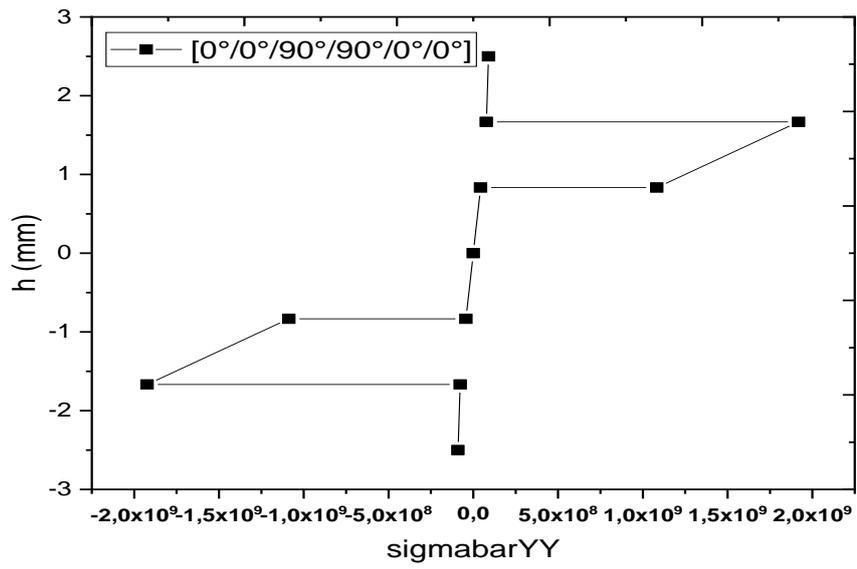




Figures (III. 11):états de contraintes du 1<sup>er</sup> stratifier [0°/0°/90°/90°/0°/0°]

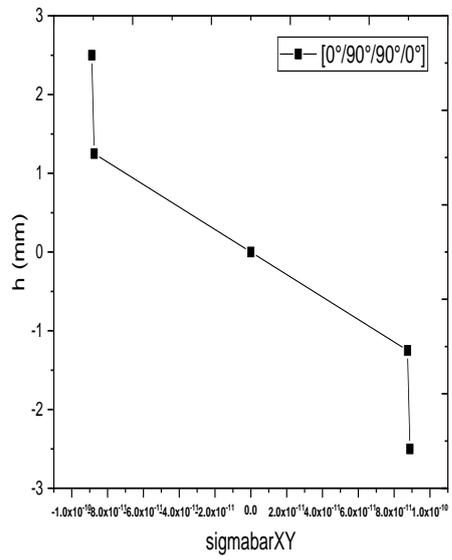
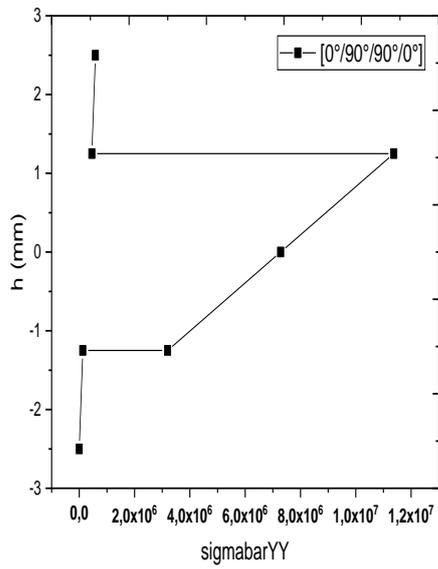
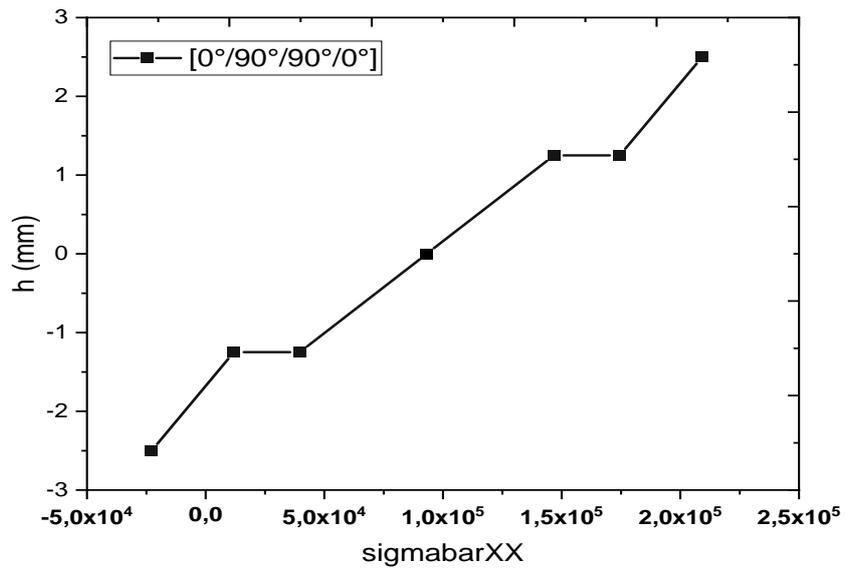
➤ Le deuxième stratifier : [0°/90°/0°/0°/90°/0°]

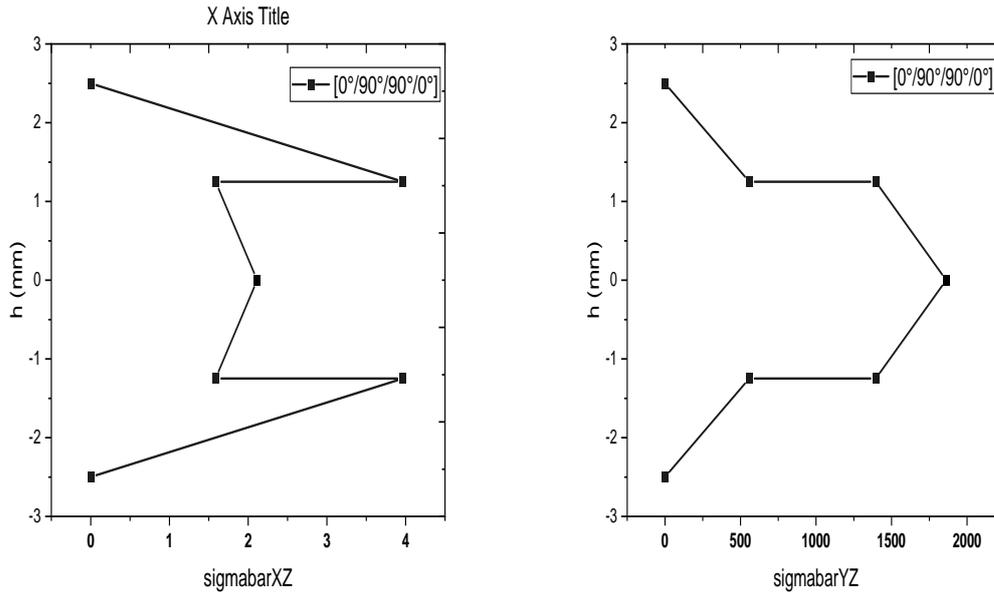




Figures (III. 12): états de contraintes du 2<sup>eme</sup> stratifier [0°/90°/0°/0°/90°/0°]

➤ Le troisieme stratifier :  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$





Figures (III. 13): états de contraintes du 3<sup>ème</sup> stratifié [0°/90°/90°/0°]

Cette section traite l'influence de l'anisotropie sur le comportement de la plaque, pour cela on a simulé le comportement de trois stratifiés d'architecture différentes [0.0.90.90.0.0], [0.90.0.0.90.0], [0.90.90.0] de même épaisseur, les simulations montrent un comportement proche pour le cas de  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ , pour les contraintes de cisaillement le comportement change selon le stratifié, les mêmes commentaires sont valables pour l'ordre de grandeur des contraintes.

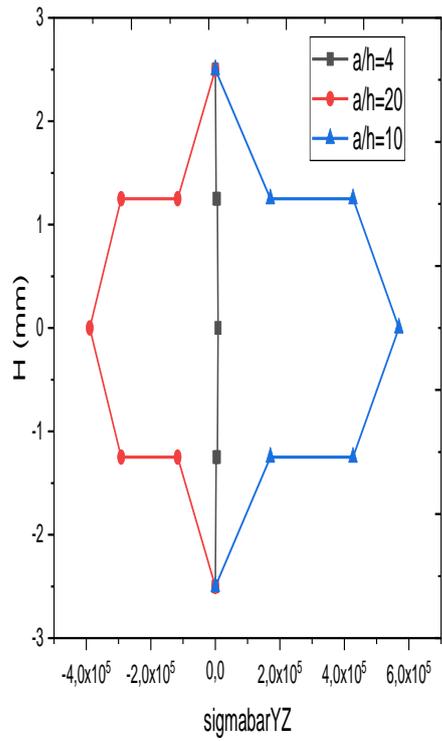
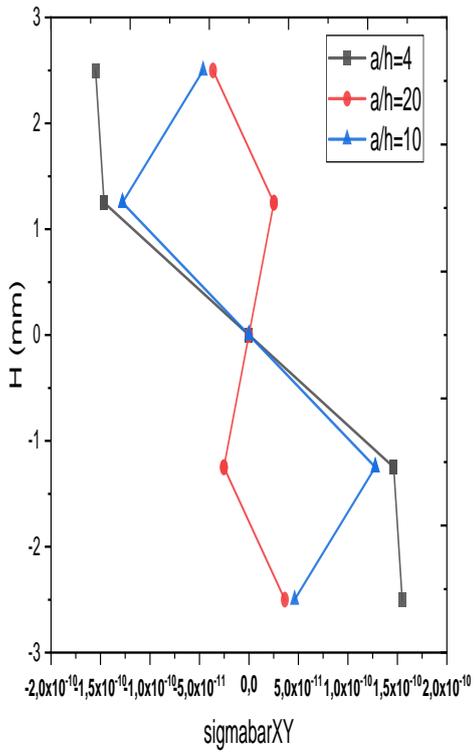
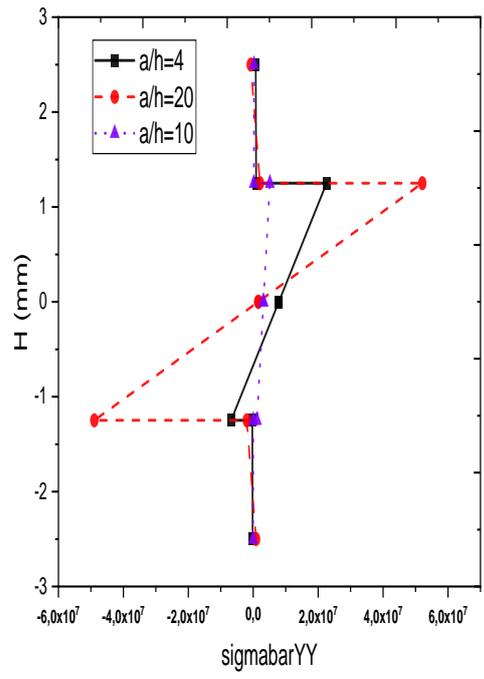
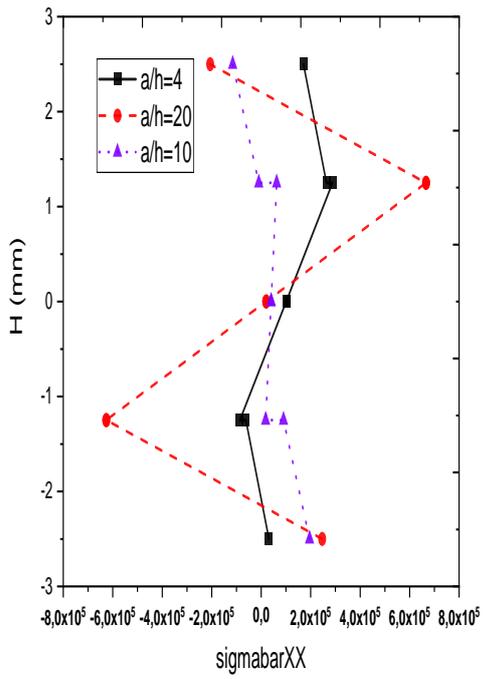
### III .5.6 Influence des paramètres géométriques :

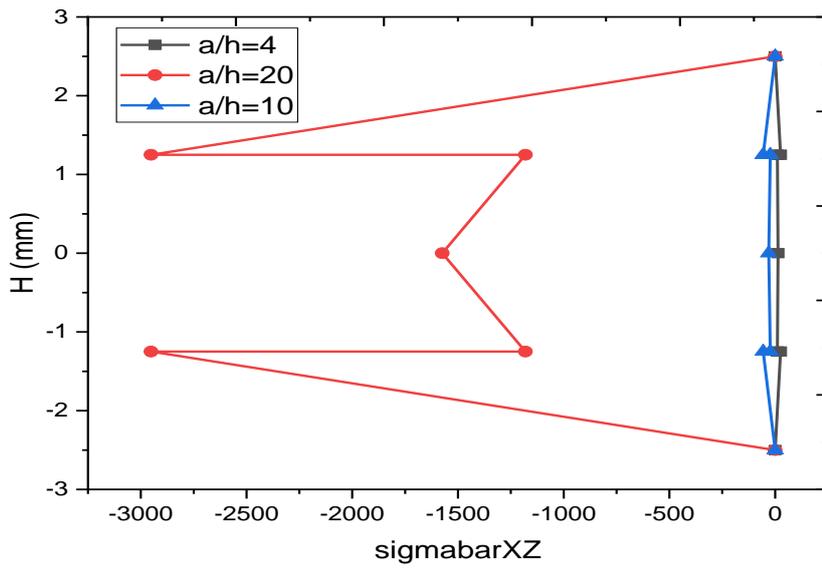
#### III .5.6.a Influence du rapport géométrique $a/h$ :

Variation des paramètres (longueur/épaisseur) :

$$q_0 = 100, T_{opr} = 60^\circ C, T_0 = 180^\circ C, a/b = 10, h=5$$

$a/h=4$	$a/h=10$	$a/h=20$
a=20	a=50	a=100



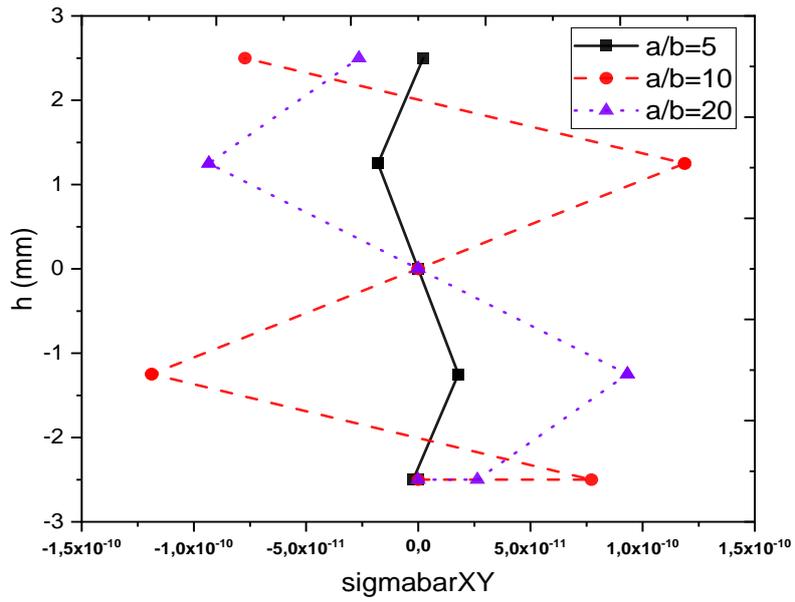
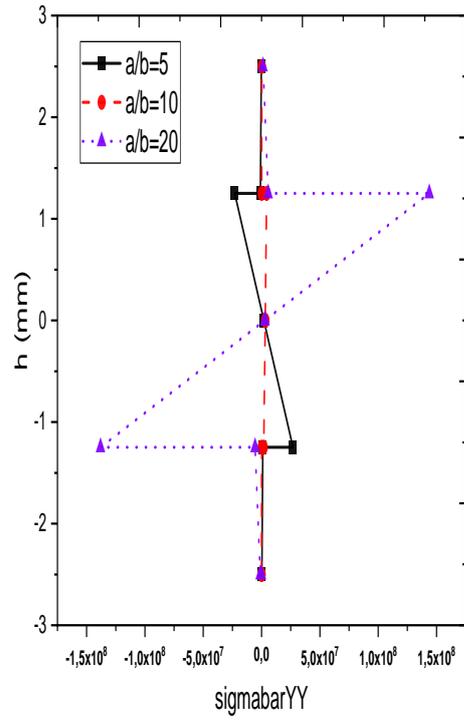
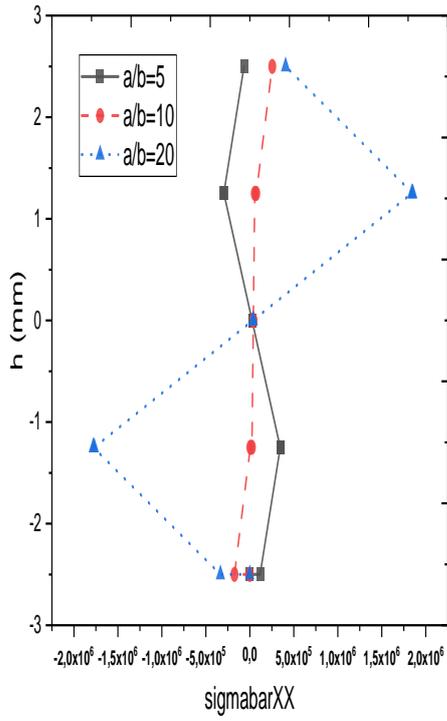


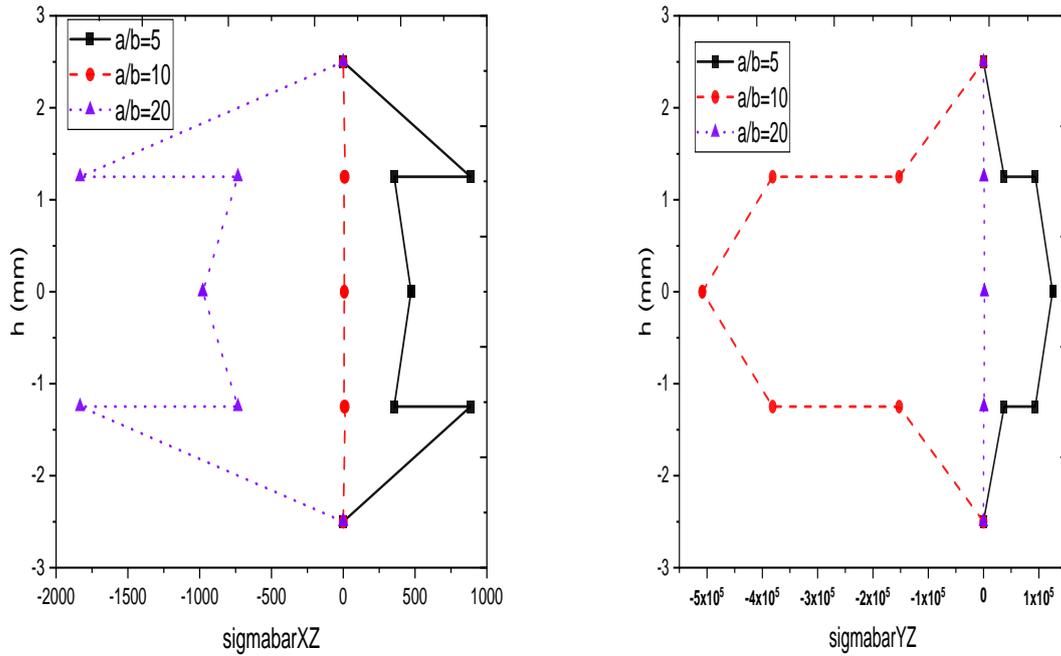
Figures (III. 14):influence de paramètre géométrique a/h

### **III .5.6.b Influence du rapport géométrique a/b :**

$$q_0 = 100 , T_{opr} = 60^\circ C , T_0 = 180^\circ C , a/h = 10$$

$a/b$	$a/b$	$a/b$
5	10	20





Figures (III. 15):influence de paramètre géométrique a/b

Dans cette section on a simulé le comportement des plaques composites épaisses avec des paramètres géométrique variable , ou on a joué sur les différents rapport géométrique des dimensions de cette dernière , d'abord on a commencé par varier le rapport a/h qui représente la fraction entre la longueur et l'épaisseur de plaque , les résultats sont représentés dans la figure III.14 , la variation de ce rapport induit une modification significative de l'état de contrainte par rapport aux différents plan (xx,xy,yy ,xz,yz) , plus le rapport a/h augmente la contrainte xx yy , par rapport aux cisaillements transversales une influence plus importante en terme d'ordre de grandeur est remarquée, la variation du rapport géométrique a/b qui représente longueur sur largeur donne aussi une influence remarquable (figure III.14), en général les mêmes commentaires sont applicables pour ce dernier .

## **IV. Conclusion :**

Durant ce travail un programme informatique sous Matlab a été développé, ce dernier nous permis de simuler le comportement des stratifiés composites sollicités par des forces mécaniques extérieures et travaillant dans des conditions environnementales variables en terme de température,

Les sollicitations causées par les paramètres environnementaux ont été prisent en considération lors du calcul des états des contraintes.

Les résultats ont montré une grande contribution de ces derniers dans l'état de contrainte d'où la nécessité de les prendre en considération dans les phases d'engineering des structures composites aéronautiques vu que ces dernières opèrent dans des conditions environnementales variables et extrêmes (altitude et vitesse).

Les résultats ont montré une très grande influence des paramètres de référence de fabrication ( $T_0$ ) sur les états des contraintes générés, donc une amélioration de ces derniers va contribuer significativement dans la réduction des contraintes dû à l'environnement.

L'architecture du stratifié peut jouer un rôle major dans la réduction des contraintes dû à l'environnement.

Les résultats ont montré que l'ordre de grandeur des contraintes mécanique est beaucoup plus important à l'ordre de grandeur des contraintes thermique.

Les défauts et les dégradations générés par la température n'ont pas été abordé dans notre étude.

Nous recommandons de faire une étude transitoire de la concentration (Phase d'absorption) pour confirmer l'effet de la température.

## Bibliographie

- 1- J-M.BERTHELOT matériaux composites. comportement mécanique et analyse des structure MASSON , ISMANS , institut supérieur des matériaux et mécaniques avancés le Mans, France Novembre 2010
- 2-THESE DE DOCTORAT : « Application des théories à ordre élevé de déformation de cisaillement pour l'étude du comportement mécanique des plaques épaisses » . Présentée par Mr : BOUKHARI Ahmed .université sidibelabbes departement genie civil 2015-2016
- 3-<https://www.industrie-techno.com/article/1-a350-xwb-premier-airbus-avec-plus-de-50-de-composites.23272>
- 4- Les matériaux composites Dossier créé avec la collaboration de Marc Marzano - Action Composite Pascal Celle – GNFA(Automotives Composites. 2nd édition. Ray Publishing Inc. 2006)
- 5-Reissner : Une théorie simple d'ordre supérieur pour plate/ composite stratifiée. J. Appl. Mech., vol. 12, (1945).
- 6- J.N. Reddy, Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis. CRC Press, Boca Raton, (1997).
- 7-Mindlin. R.D: Influence de l'inertie de rotation et de cisaillement sur les motions de flexion, plaques élastiques isotropes. Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31-38, (1951)
- 8- J-N Reddy : “mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis”(second edition)
- 9- B.Boukert , Memoire de Magister ” prise en compte du vieillissement hygrothermique dans l'analyse du comportement des composites hybrides “ Institut d'aeronautique et des etudes spatiale Juillet 2011.
- 10-. Reddy, J.N., "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates". ASME Journal of Applied Mechanics, (1984), 745–752.
- 11- Tsai SW. Composite design. 4th ed. Dayton: Think Composites; 1988.
- 12- Z. Sereir, Accelerated aging of unidirectional hybrid composites under the long-term elevated temperature and moisture concentration, Theor. Appl. Fract. Mech. (2011).
- 13- Tounsi A, Bouazza M, Meftah SA, Adda-bedia E. On the transient hygroscopic stresses in polymer matrix laminated composites plates with cyclic and unsymmetric environmental conditions. Polym Polym Compos 2005;13(5):489–504.

14-Mémoire de Magister Présenté par : ROUAM Kamila (Elaboration, caractérisation mécanique et hygrothermique d'un stratifié renforcé par des fibres naturelles). universite m'hamed bougara – boumerdes. science et génie des matériaux 2013-2014.

15-these de doctorat : « analyse thermomecanique des plaques composites » présenté par : Taibi Fatima zohra . universite djillali liabes sidi bel abbes. département de genie civil 2014-2015.