

D. BELLET

**COURS  
de  
MECANIQUE  
GENERALE**



# SOMMAIRE

NOTATIONS ET SYMBOLES.....	3
INTRODUCTION.....	9

## PREMIÈRE PARTIE Mécanique Rationnelle – Oscillations

### CHAPITRE I

#### Opérateurs fondamentaux

• Opérateur produit vectoriel par un vecteur $\vec{x}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ .....	17
• Opérateurs de projection.....	19
• Opérateurs de rotation de l'angle $\alpha$ autour de $\vec{u}$ .....	22
• Vitesse de rotation d'un solide.....	25
• Accélération de rotation d'un solide.....	28
• Distribution des vitesses et des accélérations dans un solide.....	29
• Problème fondamental de la cinématique.....	36

### CHAPITRE II

#### Principes de la Mécanique classique Notions de forces et de masses

• Principes fondamentaux.....	41
• Définitions.....	43
• Loi fondamentale.....	45
• Principes résultant de la loi fondamentale.....	48
• Masse grave et masse inerte.....	51
• Forces réelles et forces d'inertie.....	52

### CHAPITRE III

#### Géométrie des masses – Tenseurs d'inertie

• Centre d'inertie d'un ensemble de particules.....	53
• Théorème général de Koenig.....	53
• Moments d'inertie.....	55
• Tenseur $P_A$ des produits d'inertie en un point $A$ , d'un ensemble de particules.....	56
• Tenseur $\Pi_A$ d'inertie classique, en un point $A$ d'un ensemble de particules.....	57

• Ellipsoïde d'inertie classique .....	59
• Calcul pratique de quelques tenseurs d'inertie classiques .....	60
• Squelettes inertiels de quelques solides .....	65

#### CHAPITRE IV

### Grandeurs dynamiques et grandeurs cinétiques

• Grandeurs dynamiques .....	71
• Grandeurs cinétiques (ou d'impulsion) associées aux grandeurs dynamiques .....	74
• Moments cinétique et dynamique en un point mobile .....	76
• Utilisation du centre d'inertie $G$ d'un ensemble de particules .....	77
• Application au cas particulier où l'ensemble $\Sigma$ de particules est un solide indéformable .....	82

#### CHAPITRE V

### Systèmes matériels quelconques – Liaisons

• Schéma réel d'un ensemble de particules – Notions de liaisons .....	87
• Liaisons par contact de deux solides .....	92
• Lois du frottement à sec de Coulomb et Morin, ou du frottement "solide" .....	94
• Types de liaisons classiques .....	96
• Caractéristiques d'un système matériel .....	101

#### CHAPITRE VI

### Expression vectorielle de la loi fondamentale de la Mécanique Théorèmes généraux

• Forme vectorielle de la loi fondamentale nécessaire .....	105
• Cas d'un assemblage de solides à liaisons par contact .....	106
• Expression de la loi fondamentale en fonction des grandeurs cinétiques .....	107
• Théorèmes généraux de la Mécanique .....	108
• Intégrales premières ou constantes du mouvement .....	110
• Mise en évidence du mouvement du centre d'inertie et du mouvement "autour" du centre d'inertie .....	112
• Application des théorèmes généraux de la Mécanique à des systèmes de masse variable .....	114

## CHAPITRE VII

### Expressions scalaires de la loi fondamentale de la Mécanique Loi des travaux virtuels

- Expressions scalaires de la loi fondamentale ..... 119
- Loi des travaux virtuels élémentaires ..... 121
- Souplesse d'emploi de la méthode scalaire ..... 121
- Application à un assemblage de solides ..... 123
- Conclusion – Principes de la Mécanique analytique ..... 127

## CHAPITRE VIII

### Formalisme de Lagrange

- Changement de variables ..... 129
- Formule de Lagrange ..... 131
- Forces réelles généralisées  $Q_j$  ..... 132
- Choix du déplacement virtuel ..... 133
- Cas d'un système holonôme, non dissipatif ..... 134
- Retour au cas général d'un système non-holonôme – Multiplicateurs de Lagrange ..... 137
- Exemple de système non-holonôme, non dissipatif ..... 139
- Conditions holonômes principales et conditions holonômes supplémentaires ..... 141
- Cas des systèmes matériels dissipatifs ..... 143
- Extension de l'emploi des multiplicateurs de Lagrange ..... 144
- Remarque importante ..... 147

## CHAPITRE IX

### Systèmes matériels admettant un Lagrangien

- Théorème de l'énergie cinétique dans le formalisme lagrangien ..... 149
- Fonction potentielle généralisée, à temps constant ..... 151
- Lagrangien d'un système – Intégrale première énergétique ..... 155
- Intégrales premières cinétiques ..... 157
- Extension possible du formalisme de Lagrange à certains cas de dissipation visqueuse – Fonction de dissipation de Rayleigh ..... 161
- Principe variationnel d'Hamilton ..... 164
- Réduction de l'ordre du système de Lagrange quand il existe des intégrales premières cinétiques – Procédé de Routh ..... 166
- Résumé de la méthode de Lagrange ..... 168

## CHAPITRE X

### Petits mouvements dans le voisinage d'un état d'équilibre Oscillations

A - GÉNÉRALITÉS SUR LA LINÉARISATION DES PETITS MOUVEMENTS.....	173
• Conditions nécessaires d'un équilibre .....	173
• Loi des travaux virtuels élémentaires .....	174
• Petits mouvements dans le voisinage d'un état d'équilibre .....	175
• Stabilité d'un équilibre .....	179
B - CAS PARTICULIER D'UN SYSTÈME NON DISSIPATIF À POTENTIEL DE POSITION .....	179
• Conditions nécessaires de l'équilibre .....	179
• Condition suffisante de stabilité de Lejeune-Dirichlet .....	180
• Linéarisation du système de Lagrange .....	181
• Première méthode d'intégration par "découplage" .....	183
• Deuxième méthode d'intégration dite des "modes propres" .....	186
• Comparaison des deux méthodes d'intégration .....	189
• Extension à des oscillations amorties par frottement visqueux .....	190
• Oscillations forcées avec amortissement - Résonance .....	193
C - COMPLÉMENTS SUR LE SIGNE DES RAPPORTS D'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS ET SUR LE PHÉNOMÈNE DE "BATTEMENTS" .....	196
• Pulsations propres d'un petit mouvement linéarisé dans le voisinage d'un état d'équilibre stable .....	196
• Les deux modes propres .....	198
• Rapports d'amplitude .....	199
• Signes des rapports d'amplitude .....	200
• Equation aux rapports d'amplitude .....	200
• Interprétation géométrique de la solution générale complexe .....	201
• Phénomène observable des "battements" .....	202
• Choix des conditions initiales .....	202
• Cas particulier spectaculaire .....	204

D – OSCILLATIONS DE SYSTÈMES PRÉSENTANT UNE SYMÉTRIE MÉCANIQUE..... 205

- Exemples ..... 205
- Recherche des modes propres de vibrations d'un système symétrique 207
- Rapports d'amplitude des paramètres dans un mode propre ..... 210
- Applications ..... 211

**DEUXIÈME PARTIE**

**Mouvements des solides – Gyroscopes**

CHAPITRE XI

**Loi fondamentale de la dynamique du solide**

- Grandeurs cinétiques d'un solide en mouvement ..... 219
- Grandeurs dynamiques et loi fondamentale ..... 221
- Cas particuliers importants ..... 224

CHAPITRE XII

**Mouvement sans frottement d'un solide quelconque à point fixe**

- Equations du mouvement sans frottement d'un solide à point fixe :  
équations d'Euler ..... 229
- Mouvement d'Euler-Poinsot ..... 231
- Solide ayant une droite fixe ..... 238

CHAPITRE XIII

**Mouvements de solides de révolution**

- Paramètres de position angulaires d'Euler ou "angles d'Euler" ..... 243
- Equations d'Euler dans le cas d'un solide de révolution ..... 248
- Mouvement d'Euler-Poinsot pour un solide de révolution ..... 252
- Autres paramètres de position pour décrire les mouvements de solides 255

CHAPITRE XIV

**Mouvement de Lagrange-Poisson d'un solide de révolution**

- Définition ..... 265
- Etude de la vitesse de précession ..... 269

- Conditions pour que le mouvement soit sans nutation ..... 271
- Petits mouvements dans le voisinage d'un mouvement moyen sans nutation à vitesse de précession faible ..... 274

## CHAPITRE XV

### Théorie du gyroscope

- Définition et équations du gyroscope suspendu "à la Cardan" ..... 281
- Gyroscope entretenu et équations approchées ..... 283
- Parties gyroscopiques de tenseurs caractéristiques ..... 288
- Travail virtuel élémentaire du moment gyroscopique dans une rotation ..... 292
- Présentation et explications des phénomènes gyroscopiques ..... 294

## CHAPITRE XVI

### Premières applications du gyroscope

- Gyroscope de Foucault ..... 299
- Anneaux reliés par un ressort ..... 300
- Balance gyroscopique ..... 300
- Gyromètre ..... 301
- Culbuteur de Hardy ..... 302
- Compas méridien géographique ..... 304
- Exemples de l'effet stabilisateur (ou redresseur) du moment gyroscopique ..... 308

## CHAPITRE XVII

### Stabilisation d'équilibres par addition de gyroscopes

- Petits mouvements au voisinage d'un état d'équilibre apparent d'un système matériel comportant un gyroscope ..... 311
- Généralisation : addition de gyroscopes à un système vibrant mécanique ..... 316
- Degrés d'instabilité d'un petit mouvement ..... 318
- Effet sur la stabilité d'un seul amortissement visqueux dérivant d'une fonction de dissipation ..... 319
- Effet sur la stabilité des seules forces d'inertie gyroscopiques ..... 322
- Coexistence des forces d'inertie gyroscopiques et des forces réelles de résistance visqueuse ..... 325

CHAPITRE XVIII  
Formalisme d'Appell

- Inconvénients du formalisme de Lagrange ..... 329
- Formalisme d'Appell ..... 329
- Calcul de l'accélération d'énergie pour un solide ..... 333
- Explicitation et emploi de la "fonction utile" d'Appell dans un repère lié au solide ..... 335
- Explicitation et emploi de la "fonction utile" d'Appell dans un repère principal d'inertie arbitraire, lorsque le solide est de révolution ..... 337

CHAPITRE XIX

Autres méthodes classiques d'analyse des systèmes mécaniques

- Analyse dimensionnelle ..... 341
- Similitude en dynamique ..... 352
- Aperçu sur la théorie des modèles réduits ..... 354
- Analogies mécano-électriques ..... 355
- Quelques changements d'unités mécaniques ..... 362

CHAPITRE XX

Formulaire relatif aux mouvements des solides et gyroscopes

- Solide de masse  $\mu$ , de centre d'inertie  $G$ , de vitesse de rotation  $\vec{\Omega}$  363
- Gyroscope entretenu suspendu à la cardan sans frottement ..... 369

BIBLIOGRAPHIE ..... 371

INDEX ..... 373