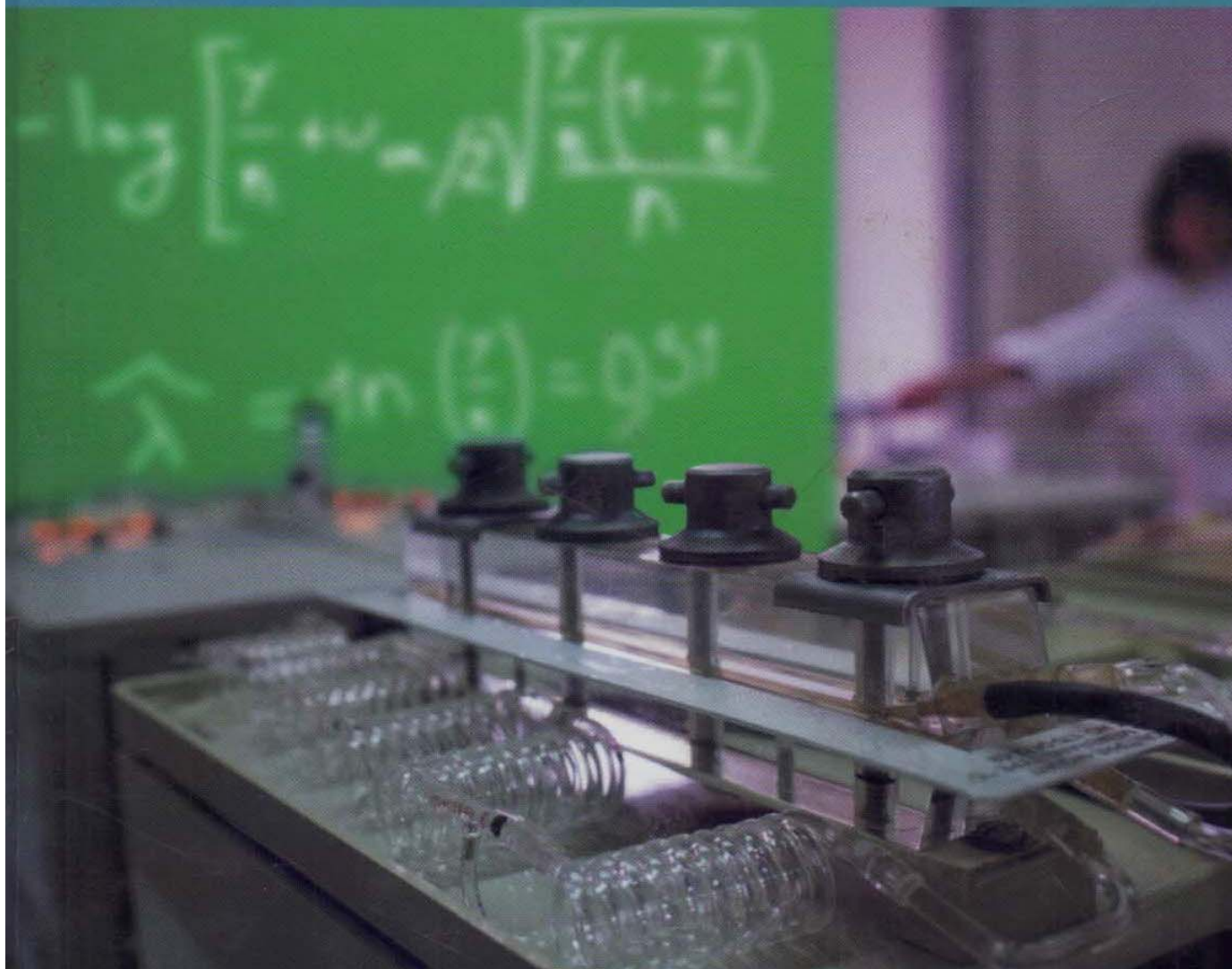
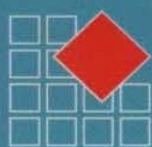


Jean-Jacques Daudin • Camille Duby
coordonnateurs



Techniques mathématiques pour l'industrie agroalimentaire



COLLECTION
SCIENCES & TECHNIQUES
AGROALIMENTAIRES

Editions
TEC
& **DOC**

Table des matières

Avant-propos	V
Liste des auteurs	IX
Sigles et abréviations	XI

Première partie

Méthodes mathématiques pour l'amélioration de la qualité

Chapitre 1

Plans de contrôle (Jean-Jacques Daudin)	3
1. Introduction	3
2. Contrôle par attribut	4
2.1. Différents types de plans de contrôle	5
2.1.1. Plan simple	5
2.1.2. Plan double	5
2.1.3. Plan multiple	6
2.1.4. Plan progressif	6
2.1.5. Plans tronqués	7
2.2. NQA, NQL, risques du producteur et du consommateur, courbe d'efficacité	8
2.3. Effectif moyen contrôlé	11
2.4. Que fait-on d'un lot jugé mauvais ?	11
2.5. Quelques formules mathématiques	13
2.5.1. Courbe d'efficacité pour un plan simple	13
2.5.2. Recherche d'un plan simple respectant des objectifs de qualité	14
2.5.3. Effectif moyen contrôlé	15
2.5.4. Qualité moyenne après contrôle	15

2.5.5.	Effectif moyen total contrôlé	15
2.5.6.	Courbe d'efficacité pour un plan double	15
2.5.7.	Effectif moyen contrôlé	16
2.5.8.	Qualité moyenne après contrôle et effectif moyen total contrôlé	16
2.5.9.	Plan progressif	16
2.5.10.	Contrôle du nombre de non conformités par unité de contrôle	17
2.5.11.	Approximations	17
2.6.	Normes ISO et AFNOR pour le contrôle de lots par attributs ...	17
2.6.1.	Norme NF X06-021	17
2.6.2.	Normes ISO 2859 et NF X06-022	18
2.6.3.	Norme X06-024	19
3.	Contrôle par variable	20
3.1.	Estimation de la proportion d'objets non-conformes	20
3.2.	Description de la procédure de contrôle	21
3.3.	Quelques expressions mathématiques	22
3.3.1.	Détermination d'un plan simple respectant des objectifs de qualité (NQA, α , NQL, β)	22
3.3.2.	Calcul de l'efficacité	22
3.3.3.	Effectif moyen total contrôlé, qualité moyenne après contrôle et tri	23
3.4.	Normes ISO 3951, AFNOR X06-023 et 025	23
3.4.1.	Norme ISO 3951, NF X06-023	23
3.4.2.	Norme X06-025	24
3.4.3.	Logiciels de calcul d'efficacité	24
3.5.	Contrôle par variable dans les cas non gaussiens	24
	Références bibliographiques	25

Chapitre 2

Maîtrise statistique des processus (Jean-Jacques Daudin)	27
1. Introduction	27
2. Modèle de base	28
3. Aptitude d'un processus	30
4. Carte de contrôle de la moyenne	34
4.1. Règle de décision	34
4.2. Représentation graphique de la carte de contrôle	36
5. Fausse alarme, risques d'erreur, efficacité	37
5.1. Périodes opérationnelles moyenne et maximale	39
6. Choix des paramètres de la carte	41
6.1. Détermination de la taille de l'échantillon	41
6.2. Détermination de la fréquence des contrôles	43
7. Étapes préliminaires	43
8. Tests de séries	45
9. Carte <i>s</i>	45

10. Cas d'une proportion ou d'un nombre de défauts.....	47
10.1. Carte p	47
10.2. Carte u	48
11. Intérêt et limites de la MSP.....	48
11.1. Gains.....	48
11.2. Pièges et limites.....	49
12. Détermination économique de la carte de contrôle.....	50
13. Carte cusum.....	50
13.1. Introduction.....	50
13.2. Description de la méthode.....	50
13.3. Choix de la carte de contrôle.....	51
13.4. Exemple.....	52
14. Carte EWMA.....	53
14.1. Description de la méthode.....	53
14.2. Choix des limites de contrôle.....	54
14.3. Choix de la carte de contrôle.....	55
14.4. Exemple.....	56
15. Normes AFNOR X06-030 et 031.....	57
16. Logiciels.....	57
Références bibliographiques.....	57

Chapitre 3

Méthodes bayésiennes pour la qualité (Éric Parent, Ali Chaouche)...	59
1. Introduction.....	59
2. Formalisation bayésienne du contrôle par attribut.....	59
2.1. Scénario pour un contrôle par attribut.....	60
2.2. Concepts bayésiens pour quantifier l'incertitude.....	60
2.2.1. Le pari conditionnel à un état de connaissances ou indice de crédibilité.....	60
2.2.2. Incertitude – Grandeurs observables et non observables..	61
2.2.3. Convention d'écriture.....	61
2.2.4. Représenter les grandeurs incertaines observables.....	62
2.2.5. Grandeur incertaine non observable.....	62
2.3. Premiers concepts bayésiens pour l'aide à la décision.....	67
2.3.1. Ensemble des actions.....	67
2.3.2. Fonction de coût.....	67
2.3.3. Résumé des éléments nécessaires à la modélisation bayésienne.....	68
3. Contrôle par attribut à taille d'échantillon fixée.....	68
3.1. Règles de décisions et risque.....	68
3.2. Règles de décision bayésiennes.....	69
3.3. Valeur de l'information dans un contexte décisionnel bayésien...	70
4. Contrôle séquentiel bayésien.....	71
4.1. Informations.....	72
4.2. Les S_n forment un processus markovien d'ordre 1.....	72

4.3.	Règles de décision et coûts	73
4.4.	Recherche de la stratégie d'action optimale	73
4.4.1.	Recherche de la stratégie d'arrêt optimale par programmation dynamique	73
4.4.2.	Programmation dynamique pour la recherche de la stratégie d'arrêt optimale	74
4.4.3.	Applications	75
4.4.4.	Conclusions	76
5.	Détection de changement dans la qualité	77
5.1.	Exposé et formulation du problème	77
5.2.	Modélisation d'une rupture avec saut	78
5.2.1.	Modèle M_1	78
5.2.2.	Information	78
5.2.3.	Vraisemblance	78
5.2.4.	Loi <i>a priori</i> des paramètres	79
5.2.5.	Loi <i>a posteriori</i> de $(\theta(\pi(\theta \mathbf{x})))$ et loi prédictive des observations $(g(\mathbf{x}))$	79
5.2.6.	Lois marginales de θ_1 et θ_2	80
5.2.7.	Loi marginale de τ (loi de la date de rupture)	80
5.2.8.	Lois conditionnelles	80
5.3.	Limites d'emploi du modèle M_1	81
5.4.	Modèle M_2	82
5.4.1.	Vraisemblance de \mathbf{x} sous (H_{nc}, θ_1)	82
5.4.2.	Vraisemblance de \mathbf{x} sous (H_{nc}, θ_2)	82
5.4.3.	Loi <i>a posteriori</i> de l'intensité de la rupture	83
5.5.	Utilisations du modèle M_2 et commentaires	84
5.5.1.	Estimation bayésienne des paramètres d'intérêt	84
5.5.2.	Insertion du modèle dans une démarche décisionnelle	84
5.5.3.	Ensemble des actions	85
5.5.4.	Ensemble des états de la nature	85
5.5.5.	Fonction de coût	85
5.5.6.	Règle de décision	86
6.	Discussion et conclusions	89
	Remerciements	90
	Annexe – Algorithme	90
	Références bibliographiques	91

Chapitre 4

Plans d'expériences

	(Christine Durier, Christelle Hennequet, Brigitte Schaeffer)	93
1.	Introduction	93
2.	Plans factoriels à 2 niveaux	94
2.1.	Terminologie	94
2.2.	Plans factoriels complets ou plans 2^n	94

2.2.1.	Étude détaillée d'un plan factoriel complet 2^2 à l'aide d'un exemple.....	94
2.2.2.	Exemple d'un plan factoriel 2^4 avec répétitions – Mise au point d'un milieu de culture pour <i>Bradyrhizobium japonicum</i>	98
2.3.	Plans factoriels fractionnaires ou plans 2^{n-p}	101
2.3.1.	Construction.....	101
2.3.2.	Analyse statistique.....	105
2.3.3.	Exemple – Netttoyabilité des surfaces utilisées dans l'industrie agroalimentaire.....	106
2.4.	Plans de Plackett et Burman.....	108
2.4.1.	Principe.....	109
2.4.2.	Propriétés.....	109
2.4.3.	Exemple de sélection de souches de micro-organismes pour la production d'arômes dans le fromage de Brie.....	110
3.	Plans «robustes» de Taguchi.....	111
4.	Plans factoriels en blocs.....	113
4.1.	Absence de contraintes sur les facteurs.....	113
4.2.	Présence de contraintes sur les facteurs – Plans en split plot.....	114
4.3.	Facteurs blocs croisés.....	116
4.3.1.	Exemple de fabrication fromagère en atelier expérimental (INRA Recherche laitière, Jouy-en-Josas).....	116
5.	Plans pour surfaces de réponse.....	120
5.1.	Contexte.....	120
5.2.	Modèles pour surfaces de réponse du 1 ^{er} et du 2 ^e degré.....	120
5.3.	Démarche d'optimisation.....	122
5.4.	Plans pour modèle du 1 ^{er} degré.....	123
5.4.1.	Plans de Plackett-Burman.....	123
5.4.2.	Plans factoriels fractionnaires avec ajouts de points centraux.....	123
5.4.3.	Exemple – Influence des conditions de pétrissage et de laminage sur la pâte biscuitière (INRA, Montpellier). ..	124
5.5.	Plans pour modèle du 2 ^e degré.....	127
5.5.1.	Plans composites centrés.....	127
5.5.2.	Plan composite à faces centrées.....	133
5.5.3.	Plans de Box-Behnken.....	134
5.6.	Comparaison des plans pour surfaces de réponse du 2 ^e degré.....	137
6.	Conclusion.....	138
	Références bibliographiques.....	138

Deuxième partie
Mesures et analyses

Chapitre 5

Validation des méthodes d'analyse (Max Feinberg)	143
1. Qualité et traçabilité des mesurages	143
2. Cycle de vie et validation d'une méthode d'analyse	146
2.1. Vie et évolution d'une méthode d'analyse	146
2.2. Principaux critères de validation	147
3. Aspects statistiques de l'étalonnage	151
3.1. Caractéristiques d'étalonnage	151
3.1.1. Sensibilité et blanc	151
3.1.2. Étalonnage inverse	154
3.2. Limites de détection et de quantification	155
3.3. Limites de linéarité du domaine d'étalonnage	158
3.4. Carte de contrôle d'un étalonnage	159
4. Incertitude des mesures chimiques	161
4.1. Incertitude et exactitude	161
4.2. Analyses inter-laboratoires	163
4.2.1. Diversité des analyses inter-laboratoires	163
4.2.2. Modèle de la norme Iso 5725	165
4.2.3. Modèle empirique de Horwitz	167
4.3. Justesse d'une méthode	171
4.3.1. Comparaison avec des valeurs conventionnellement vraies ..	171
4.3.2. Spécificité et méthode des ajouts dosés	173
5. Conclusions	175
Références bibliographiques	177

Chapitre 6

Mesure et calibration (Marie-Anne Poursat)	179
1. Introduction	179
2. Exemples	180
2.1. Exemple 1 – Calibration d'un autoanalyseur	180
2.2. Exemple 2 – Dosage d'engrais dans le sol	181
2.3. Exemple 3 – Dosage de cortisol	183
3. Estimation de la courbe d'étalonnage	184
3.1. Estimation des paramètres du modèle	185
4. Intervalles de calibration	186
4.1. Intervalles de calibration par inversion	187
4.2. Méthode du rapport de vraisemblance	188
5. Calibration et <i>bootstrap</i>	189
5.1. <i>Bootstrap</i> et régression	189
5.2. Intervalles de calibration <i>bootstrap</i>	190
6. Variance non constante	191

7. Applications	192
7.1. Exemple 1 – Calibration d'un autoanalyseur	192
7.2. Exemple 2 – Dosage d'engrais dans le sol	192
7.3. Exemple 3 – Dosage de cortisol	193
8. Conclusion	194
Références bibliographiques	194

Chapitre 7

Méthodes d'échantillonnage (Camille Duby)	195
1. Introduction	195
2. Vocabulaire de l'échantillonnage	196
2.1. Problème à traiter – Objectifs	196
2.2. Univers – Population	196
2.3. Unités – Individus	197
2.4. Base d'échantillonnage	197
2.5. Mesures – Observations	197
2.6. Recensements	198
2.7. Échantillon	198
2.8. Erreurs	199
3. Méthodes classiques d'échantillonnage	199
3.1. Échantillonnages empiriques	200
3.2. Échantillonnages aléatoires	200
3.3. Qualité d'un mode d'échantillonnage aléatoire	200
4. Échantillonnage aléatoire simple	201
4.1. Cas particulier des proportions	203
4.2. Intervalle de confiance d'une proportion	204
4.3. Estimation de la taille de l'échantillon	205
5. Échantillonnage stratifié	209
5.1. Échantillonnage stratifié <i>a posteriori</i>	212
6. Échantillonnage à deux ou plusieurs degrés	213
6.1. Analyse des composantes de la variance	216
6.2. Utilisation des échantillons à plusieurs degrés pour les matériaux particuliers en vrac	218
7. Échantillonnage en grappes	223
8. Échantillonnage systématique	224
9. Réalisation pratique d'un échantillonnage	225
10. Échantillonnages séquentiels	226
10.1. Introduction	226
10.2. Estimation des proportions de phénomènes rares	226
10.3. La variance est fonction de la moyenne	227
11. Méthode d'analyses par groupes	228
11.1. Introduction	228
11.2. Analyse par groupes de taille donnée	228
11.3. Analyse par groupes dont la taille n'est pas fixée <i>a priori</i>	230

12. Méthode des dilutions	232
12.1. Méthode d'estimation pour plusieurs dilutions	234
Références bibliographiques	237

Chapitre 8

Analyse sensorielle (Philippe Courcoux, El Mostafa Qannari).....	239
1. Introduction	239
2. Analyse des données des profils sensoriels	240
2.1. Profil sensoriel	240
2.2. Analyse du tableau sensoriel moyen.....	241
2.3. Analyse de Procuste généralisée	242
2.4. Méthode Statis.....	243
2.5. Autres méthodes d'analyse de données à trois voies	246
3. Analyse des données de préférence	248
3.1. Épreuves de notation hédonique	248
3.1.1. Cartographie interne des préférences	248
3.1.2. Cartographie externe des préférences.....	249
3.1.3. Segmentation d'un panel.....	252
3.1.4. Avantages et limitations de la cartographie des préférences	254
3.2. Épreuves de comparaisons par paires	254
3.2.1. Modèles pour les comparaisons par paires	255
3.2.2. Plans de présentation.....	256
3.2.3. Segmentation d'un panel à l'issue de comparaisons par paires	257
4. Conclusion	258
Références bibliographiques.....	259

Troisième partie

Méthodes et modèles mathématiques pour l'étude des risques alimentaires

Chapitre 9

Modèles statistiques pour les risques microbiologiques (Catherine Dervin).....	265
1. Microbiologie prévisionnelle	265
2. Facteurs environnementaux	266
3. Classification des modèles	266
3.1. Modèles de croissance	268
3.2. Modèles de survie/inactivation/décroissance	268
4. Modèles prédictifs probabilistes	269

5. Modèles prédictifs de croissance.....	269
5.1. Modèles prédictifs de germination ou de production de toxines ...	269
5.2. Cinétique de croissance.....	270
5.3. Modèles primaires.....	272
5.4. Modèles secondaires.....	275
5.4.1. Modèles polynomiaux.....	275
5.4.2. Modèles progressifs.....	276
6. Modèles de décroissance/inactivation.....	280
6.1. Modèles primaires.....	280
6.2. Modèles secondaires.....	282
7. Validation des modèles.....	282
Références bibliographiques.....	283

Chapitre 10

Méthodes statistiques en épidémiologie (Sanaa Moez).....	285
1. Introduction.....	285
2. Échantillonnage dans les enquêtes descriptives.....	286
2.1. Définition de la population.....	287
2.2. Méthodes d'échantillonnage.....	289
2.2.1. Sondage aléatoire simple.....	289
2.2.2. Sondage aléatoire stratifié.....	290
2.2.3. Sondage en grappe et sondage à plusieurs degrés.....	291
2.3. Choix d'une méthode de sondage.....	292
2.3.1. Objectifs de l'enquête.....	292
2.3.2. Budget disponible.....	292
2.3.3. Outils d'observation.....	293
2.4. Taille de l'échantillon.....	293
2.4.1. Estimation de la prévalence cheptel.....	294
2.5. Qualification d'un élevage ou d'une région.....	301
2.5.1. Qualification d'un élevage.....	301
2.5.2. Qualification d'une région.....	307
3. Analyse statistique des enquêtes analytiques.....	307
3.1. Mesure et test de l'association entre exposition et maladie.....	308
3.1.1. Mesure d'association.....	309
3.1.2. Test de l'association.....	314
3.1.3. Calcul de l'intervalle de confiance de la mesure d'association.....	316
3.2. Interaction et facteur de confusion.....	317
3.2.1. Effet d'interaction.....	317
3.2.2. Facteur de confusion.....	319
3.3. Modèles statistiques utilisés en épidémiologie.....	325
3.3.1. Modèle linéaire.....	325
3.3.2. Modèle logistique.....	326
3.3.3. Modèles de survie.....	327
3.4. Prise en compte de l'effet élevage.....	327
3.5. Conclusion.....	328

4. Analyse des risques	329
4.1. Identification du danger	329
4.2. Appréciation de l'exposition	330
4.3. Appréciation de la relation dose-effet	331
4.3.1. Modèle exponentiel	332
4.3.2. Modèle Weibull Gamma	332
4.3.3. Modèle Bêta-Poisson	332
4.3.4. Estimation des risques	333
Références bibliographiques	334

Quatrième partie

Modèles pour les écoulements, les transferts et les procédés

Chapitre 11

Réseaux de neurones (<i>Éric Latrille, Christian Trelea</i>)	339
1. Introduction	339
2. Présentation des différents type de modèles	340
2.1. Forme mathématique des modèles dynamiques	340
2.2. Identification des paramètres inconnus d'un modèle	340
2.3. Formalisme des schémas réactionnels pour la modélisation des bioprocédés	342
2.3.1. Modèle fonctionnel	342
2.3.2. Schéma réactionnel	343
2.3.3. Exemple de la production de levure	344
2.4. Réseaux de neurones artificiels	345
2.4.1. Propriétés mathématiques du perceptron multi-couches ...	346
2.4.2. Équations du perceptron à trois couches	347
2.4.3. Modèles statiques et dynamiques à base de réseaux de neurones artificiels – Réseaux statiques et réseaux récurrents	348
2.5. Modèles mixtes – Représentation sous forme de réseau de neurones mixte	349
2.5.1. Structure et fonctionnement d'un réseau de neurones mixte	350
2.5.2. Exemple de réseau de neurones mixte	350
3. Mise en œuvre pratique	352
3.1. Perceptron multicouches	352
3.1.1. Apprentissage – Identification de la structure et des paramètres	352
3.1.2. Étape préliminaire à l'identification des poids – Rétropropagation de l'erreur	352
3.1.3. Identification des poids – Algorithmes de minimisation de l'erreur	354
3.1.4. Sur-apprentissage et sur-paramétrage	355

3.2.	Modes d'apprentissage des réseaux de neurones récurrents	357
3.3.	Mise en œuvre des réseaux de neurones mixtes	358
4.	Exemples d'application	360
4.1.	Simulation d'un procédé de microfiltration tangentielle	360
4.1.1.	Introduction	360
4.1.2.	Modèle de connaissance ou mécanistique	361
4.1.3.	Modèle dynamique avec un réseau de neurones récurrent	362
4.1.4.	Modèle mixte – Estimation des paramètres du modèle physique par des réseaux de neurones	364
4.2.	Conduite de la production de levains de tirage de champagne	366
4.2.1.	Introduction	366
4.2.2.	Principe de la production de levains de tirage	367
4.2.3.	Structure des modèles	367
4.2.4.	Application du modèle neuronal et du modèle de corrélation pour la prédiction des concentrations en levures, en sucre et en éthanol	368
4.2.5.	Détermination des températures de cultures et de leur profil – Contrôle en boucle ouverte	370
4.3.	Commande optimale d'un procédé de séchage de céréales	371
4.3.1.	Objectifs de la commande automatique	371
4.3.2.	Modèle interne du procédé	372
4.3.3.	Algorithme d'optimisation	373
4.3.4.	Résultats expérimentaux en conditions nominales	374
4.3.5.	Résultats expérimentaux avec perturbations mesurées et non mesurées	375
4.3.6.	Conclusion	376
	Références bibliographiques	376

Chapitre 12

Modèles à compartiments (Élisabeth Pommès)	379
1. Introduction	379
1.1. Définitions	380
1.1.1. Systèmes à compartiments	380
1.1.2. Transferts entre compartiments	381
1.1.3. Variables du système	381
1.1.4. Traceurs	382
1.1.5. Activité spécifique	382
1.2. Exemples	382
1.2.1. Diffusion du sucre des betteraves	382
1.2.2. Ultrafiltration du lait	383
1.2.3. Concentration du lait par chauffage et évaporation	383
1.2.4. Estérification-hydrolyse	384
1.2.5. Transit digestif	384
1.2.6. Évolution d'une population	384

2.	Étude d'un modèle à compartiments	385
2.1.	Notations	385
2.2.	Modèle mathématique	386
2.2.1.	Caractérisation des équations	386
2.2.2.	Matrice de transfert F	387
2.2.3.	Écriture matricielle du système	387
2.3.	Résolution du système d'équations	389
2.3.1.	Solution générale du système	389
2.3.2.	Solution générale du système homogène	391
2.4.	Comportement asymptotique de la solution	394
2.4.1.	Caractérisation des valeurs propres d'une matrice de transfert	394
2.4.2.	Étude asymptotique	394
3.	Estimation	395
3.1.	Estimation des paramètres	395
3.1.1.	Cas d'un système non stationnaire	395
3.1.2.	Cas d'un système stationnaire	396
3.1.3.	Qualité des estimations	396
4.	Un modèle pour la lysine	397
4.1.	Objectif et intérêt de l'étude	397
4.2.	Schéma expérimental	397
4.3.	Modèle	398
4.3.1.	Notations et hypothèses	398
4.3.2.	Transferts	399
4.3.3.	Hypothèses	399
4.3.4.	Équations différentielles	399
4.3.5.	Solution du système d'équations différentielles	400
4.4.	Estimation des paramètres	401
4.4.1.	Estimation des taux de transfert	401
4.4.2.	Estimation des tailles des pools	402
4.5.	Interprétation des résultats	403
4.5.1.	Taux de transfert	403
4.5.2.	Tailles des pools	404
4.5.3.	Représentations graphiques des concentrations de lysine radioactive	404
5.	Annexe A – Outils mathématiques	405
5.1.	Rappels matriciels	405
5.1.1.	Matrice transposée	405
5.1.2.	Déterminant	405
5.1.3.	Matrice inverse	405
5.1.4.	Matrice à diagonale dominante	405
5.1.5.	Valeurs et vecteurs propres	405
5.1.6.	Matrice diagonalisable	407
5.1.7.	Disques et région de Gersghörin	407
5.2.	Système d'équations différentielles linéaires	408
5.2.1.	Solution générale	408
5.2.2.	Résolution du système homogène	409

6. Annexe B : Démonstrations	411
6.1. Méthode de la variation de la constante	411
6.1.1. Exemple 1 (cas $f_{21} \neq f_{02}$)	411
6.1.2. Exemple 1 (cas $f_{21} = f_{02} = f$)	412
6.2. Résolution matricielle du système homogène	414
6.2.1. Exemple 1 (cas $f_{21} \neq f_{02}$)	414
6.2.2. Exemple 1 (cas $f_{21} = f_{02} = f$)	415
6.2.3. Valeurs propres d'une matrice de transfert	416
6.3. Modèle de compartimentation de la lysine	417
6.3.1. Modèle mathématique	417
6.3.2. Résolution du système	417
6.3.3. Expression de $f(t)$ et de $\varepsilon_4(t)$	419
Références bibliographiques	420

Chapitre 13

Transferts dans les solides (Christophe Doursat, Denis Flick)	421
1. Introduction	421
2. Conduction dans une plaque infinie	422
2.1. Formulation du problème	422
2.1.1. Bilan d'énergie interne	424
2.1.2. Équation d'état	425
2.1.3. Loi de transfert	425
2.1.4. Combinaison des équations	425
2.1.5. Condition initiale	425
2.1.6. Conditions aux limites	425
2.2. Résolution analytique	426
2.3. Résolution numérique	428
2.3.1. Généralités	428
2.3.2. Bilan sur un élément de volume	430
2.3.3. Méthode explicite	432
2.3.4. Méthode implicite	435
2.3.5. Méthode de Crank-Nicholson	438
3. Extension à une géométrie bi- ou tridimensionnelle et à d'autres conditions aux limites	440
3.1. Formulation du problème	440
3.1.1. Rappels mathématiques	441
3.1.2. Bilan d'énergie interne	442
3.1.3. Équation d'état	443
3.1.4. Loi de transfert	443
3.1.5. Combinaison des équations	443
3.1.6. Condition initiale	443
3.1.7. Conditions aux limites	444
3.2. Résolution analytique	445
3.3. Résolution numérique	446
3.3.1. Discrétisation de l'espace	446

3.3.2.	Bilan sur un élément de volume.....	446
3.3.3.	Conditions aux limites : mailles fictives.....	447
3.3.4.	Méthode explicite.....	449
3.3.5.	Méthode implicite.....	450
3.3.6.	Méthode semi-implicite à direction alternée (ADI).....	451
4.	Extension à des problèmes plus complexes.....	453
4.1.	Géométrie complexe.....	453
4.2.	Propriétés thermophysiques non constantes.....	454
4.3.	Couplages entre plusieurs transferts.....	455
5.	Annexe : formules de quadrature et schémas aux différences.....	455
5.1.	Approximation d'intégrales d'une fonction d'une variable.....	455
5.1.1.	Préliminaires.....	455
5.1.2.	Formule des rectangles à gauche.....	456
5.1.3.	Formule des rectangles à droite.....	457
5.1.4.	Formule des trapèzes.....	457
5.1.5.	Formule du point milieu.....	458
5.2.	Approximation d'intégrales pour les équations de bilan.....	459
5.2.1.	Formule des rectangles à gauche.....	459
5.2.2.	Formule des rectangles à droite.....	460
5.2.3.	Formule des trapèzes.....	460
5.2.4.	Formule du point milieu.....	460
5.3.	Schémas aux différences.....	460
5.3.1.	Dérivée première.....	460
5.3.2.	Dérivée seconde.....	462

Chapitre 14

Transferts dans les fluides en écoulement

	<i>(Christophe Doursat, Denis Flick)</i>	463
1.	Écoulement laminaire et transferts thermiques en régime établi dans un tube (à propriétés thermophysiques constantes) – Résolution analytique.....	463
1.1.	Formulation du problème.....	463
1.2.	Résolution des équations du mouvement.....	465
1.3.	Résolution de l'équation de transfert.....	466
2.	Écoulement laminaire et transferts thermiques dans une géométrie cartésienne bidimensionnelle – Résolution numérique.....	467
2.1.	Formulation du problème.....	467
2.2.	Discretisation du problème.....	468
2.2.1.	Objectif.....	468
2.2.2.	Maillage principal.....	468
2.2.3.	Conservation de la masse - Maillages décalés.....	469
2.3.	Généralités sur les équations de bilan.....	472
2.3.1.	Bilan des flux convectifs et diffusifs dans un cas monodimensionnel.....	473

2.3.2.	Bilan des flux convectifs et diffusifs sur un élément de volume	476
2.3.3.	Terme source	477
2.4.	Conservation de l'énergie	477
2.4.1.	Bilan des flux convectifs et diffusifs sur un élément de volume	477
2.4.2.	Conditions aux limites	478
2.4.3.	Résolution numérique	480
2.5.	Conservation de la quantité de mouvement	482
2.5.1.	Bilan des flux convectifs et diffusifs sur un élément de volume	483
2.5.2.	Conditions aux limites	485
2.5.3.	Résolution du système linéarisé et relaxation	486
2.6.	Conservation de la masse – Correction de pression	487
2.6.1.	Relation entre vitesse et pression	487
2.6.2.	Correction du champ de pression	489
2.6.3.	Résolution du système linéaire et relaxation	489
2.7.	Algorithme général	490
3.	Extension à des problèmes plus complexes	491
3.1.	Géométrie complexe	491
3.2.	Propriétés thermophysiques non constantes	492
3.3.	Écoulement turbulent	493
3.4.	Couplages	496
	Index	497