

**TECHNOSUP**



Supélec

# Commande numérique des systèmes

Approches fréquentielle et polynomiale

Emmanuel GODOY    Éric OSTERTAG

ellipses

# TABLE DES MATIERES

<b>Chapitre I ECHANTILLONNAGE D'UN SIGNAL - TRANSFORMATION EN <math>z</math>.....</b>		<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Echantillonnage d'un signal .....</b>	<b>9</b>
1.1	Position du problème .....	9
1.2	Opérateur d'échantillonnage et expression dans le domaine temporel.....	10
1.3	Propriétés spectrales d'un signal échantillonné .....	11
1.4	Reconstitution du signal continu .....	15
1.5	Approximation continue de l'échantillonnage-blocage .....	17
1.6	Aspects pratiques de l'échantillonnage.....	18
<b>2</b>	<b>Transformée en <math>z</math> .....</b>	<b>20</b>
2.1	Définition.....	20
2.2	Exemples .....	21
2.3	Transformée en $z$ inverse .....	23
2.4	Propriétés de la transformée en $z$ .....	27
2.5	Relation entre les transformées de Laplace et en $z$ .....	32
<b>3</b>	<b>Transformée en <math>z</math> modifiée.....</b>	<b>37</b>
<b>4</b>	<b>Exercices .....</b>	<b>38</b>
4.1	Exercices corrigés.....	38
4.2	Exercices non corrigés.....	40
<b>5</b>	<b>Table de paires de transformées de Laplace et de transformées en <math>z</math>.....</b>	<b>43</b>
<b>Chapitre II REPRESENTATION DES SYSTEMES DISCRETS.....</b>		<b>45</b>
<b>1</b>	<b>Définitions .....</b>	<b>45</b>
<b>2</b>	<b>Représentation par réponse impulsionnelle .....</b>	<b>46</b>
<b>3</b>	<b>Représentation par fonction de transfert .....</b>	<b>48</b>
<b>4</b>	<b>Représentation par équation aux différences.....</b>	<b>49</b>
4.1	Cas général : première formulation .....	49
4.2	Deuxième formulation .....	50
4.3	Opérateurs de décalage.....	50
<b>5</b>	<b>Systèmes à temps continu pilotés par ordinateur .....</b>	<b>52</b>
5.1	Modélisation .....	52
5.2	Application à des structures de commande.....	55
5.3	Cas des systèmes à retard .....	58
<b>6</b>	<b>Pôles et zéros dans le plan « <math>z</math> » : relations avec les systèmes à temps continu .....</b>	<b>60</b>
6.1	Emplacement des pôles dans le plan « $z$ » .....	61
6.2	Emplacement des zéros dans le plan « $z$ » .....	63
<b>7</b>	<b>Exercices .....</b>	<b>64</b>
7.1	Exercices corrigés.....	64
7.2	Exercices non corrigés.....	67



<b>Chapitre III ANALYSE DES SYSTEMES DISCRETS .....</b>	<b>69</b>
<b>1 Stabilité.....</b>	<b>69</b>
1.1 Définition et propriétés .....	69
1.2 Conséquences de la stabilité sur la fonction de transfert .....	71
1.3 Méthodes algébriques d'étude de la stabilité.....	73
<b>2 Réponse fréquentielle d'un système discret .....</b>	<b>75</b>
<b>3 Transformée en « w » .....</b>	<b>79</b>
3.1 Définition et propriétés .....	79
3.2 Application à l'étude de la stabilité .....	80
3.3 Application à l'étude de la réponse fréquentielle .....	81
<b>4 Comportement en régime transitoire.....</b>	<b>82</b>
4.1 Influence des pôles sur le régime transitoire.....	82
4.2 Etude des systèmes du 2 <sup>ème</sup> ordre comportant un zéro.....	85
<b>5 Exercices.....</b>	<b>91</b>
 <b>Chapitre IV ANALYSE DES SYSTEMES DISCRETS BOUCLES .....</b>	 <b>95</b>
<b>1 Structure d'un système commandé par ordinateur .....</b>	<b>95</b>
<b>2 Stabilité des systèmes discrets bouclés.....</b>	<b>96</b>
2.1 Condition générale de stabilité « EB-SB » .....	96
2.2 Critère de Nyquist.....	96
2.3 Marges de stabilité. Autres diagrammes harmoniques .....	103
2.4 Méthodes algébriques d'étude de la stabilité.....	107
2.5 Stabilité interne.....	108
<b>3 Méthode du lieu des racines.....</b>	<b>108</b>
3.1 Définition.....	108
3.2 Construction pratique du lieu d'Evans.....	109
3.3 Exemple.....	114
3.4 Applications du lieu d'Evans.....	116
<b>4 Précision des systèmes discrets asservis.....</b>	<b>117</b>
4.1 Précision vis-à-vis de consignes polynomiales.....	117
4.2 Précision vis-à-vis d'une consigne harmonique .....	121
4.3 Ecart dû aux perturbations .....	122
4.4 Compléments.....	125
<b>5 Exercices.....</b>	<b>126</b>
5.1 Exercices corrigés.....	126
5.2 Exercices non corrigés.....	132
<b>6 Problème non corrigé.....</b>	<b>135</b>
 <b>Chapitre V CALCUL DES CORRECTEURS NUMERIQUES PAR TRANSPOSITION .....</b>	 <b>139</b>
<b>1 Principe des méthodes de transposition à partir du continu .....</b>	<b>139</b>
<b>2 Méthodes usuelles de transposition.....</b>	<b>140</b>
2.1 Transformation d'Euler .....	140
2.2 Transformation homographique (ou bilinéaire).....	141
2.3 Comparaison des transformations d'Euler et homographique .....	142
2.4 Autres méthodes d'approximation.....	144
2.5 Exemples .....	147
2.6 Tableau récapitulatif.....	149



<b>3</b>	<b>Cas du régulateur PID .....</b>	<b>149</b>
3.1	Correcteur PID continu (PID idéal) .....	149
3.2	Discretisation .....	150
3.3	Dispositif d'anti-emballement du terme intégral (version améliorée du précédent) .....	152
3.4	Réponses fréquentielles. Influence de la période d'échantillonnage .....	155
<b>4</b>	<b>Aspects pratiques .....</b>	<b>157</b>
4.1	Choix de la période d'échantillonnage .....	157
4.2	Compléments sur la structure du régulateur PID .....	158
<b>5</b>	<b>Exercices .....</b>	<b>159</b>

## **Chapitre VI SYNTHÈSE DES CORRECTEURS NUMÉRIQUES..... 165**

<b>1</b>	<b>Synthèse d'un correcteur numérique série par méthodes fréquentielles .....</b>	<b>165</b>
1.1	Structure d'un asservissement échantillonné .....	165
1.2	Synthèse par méthodes fréquentielles .....	166
<b>2</b>	<b>Correction par placement de pôles : le régulateur RST.....</b>	<b>167</b>
2.1	Formulation du problème .....	167
2.2	Equations du système bouclé .....	168
2.3	Synthèse de la loi de commande RST .....	169
2.4	Choix de la fonction de transfert modèle : $F_m(z^{-1}) = \frac{B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})}$ .....	176
2.5	Cas particuliers de la structure RST .....	180
2.6	Version RST du correcteur PID numérique .....	181
<b>3</b>	<b>Exemples.....</b>	<b>183</b>
3.1	Exemple 1 : commande à temps d'établissement fini d'un double intégrateur .....	183
3.2	Exemple 2 : régulation d'un onduleur à découpage .....	187
<b>4</b>	<b>Problème corrigé : étude d'un pilotage automatique de bateau (énoncé) .....</b>	<b>194</b>
4.1	Architecture de la loi de commande .....	195
4.2	Étude de l'asservissement de l'angle du gouvernail .....	196
4.3	Modélisation de la boucle externe .....	197
4.4	Synthèse du correcteur de la boucle de cap .....	198
4.5	Correction par anticipation .....	198
<b>5</b>	<b>Problème corrigé : solution.....</b>	<b>199</b>
5.1	Architecture de la loi de commande .....	199
5.2	Étude de l'asservissement de l'angle du gouvernail .....	200
5.3	Modélisation de la boucle externe .....	203
5.4	Synthèse du correcteur de la boucle de cap .....	207
5.5	Correction par anticipation .....	211
5.6	Compléments sur la correction .....	213
<b>6</b>	<b>Problèmes non corrigés .....</b>	<b>216</b>

## **Chapitre VII REALISATION PRATIQUE DES CORRECTEURS NUMÉRIQUES. 223**

<b>1</b>	<b>Effets de la quantification d'amplitude .....</b>	<b>223</b>
1.1	Effet d'arrondi d'un C.A.N. ....	223
1.2	Analyse stochastique .....	224
1.3	Analyse déterministe (non linéaire) .....	227
<b>2</b>	<b>Sensibilité aux paramètres .....</b>	<b>231</b>
2.1	Sensibilité des pôles aux coefficients de l'équation caractéristique .....	231
2.2	Généralisation : fonction de sensibilité .....	232



<b>3</b>	<b>Programmation des correcteurs numériques.....</b>	<b>233</b>
3.1	Obtention d'un algorithme récursif à partir de $C(z)$ .....	233
3.2	Cas particulier du correcteur PID numérique .....	234

**Annexe A COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUES : DISTRIBUTIONS -  
TRANSFORMEE DE FOURIER ..... 235**

<b>1</b>	<b>Distributions. Impulsion de Dirac.....</b>	<b>235</b>
1.1	Concept de distribution.....	235
1.2	Principales propriétés des distributions .....	236
1.3	Impulsion de Dirac .....	237
1.4	Produits de convolution .....	239
<b>2</b>	<b>Transformée de Fourier des signaux à temps continu : rappels .....</b>	<b>240</b>
2.1	Définitions et symboles .....	240
2.2	Propriétés principales .....	240
2.3	Théorèmes de convolution.....	241
2.4	Exemples de base.....	241
2.5	Fonctions périodiques.....	241
2.6	Relation entre transformée de Fourier et transformée de Laplace bilatérale .....	243
<b>3</b>	<b>Transformée de Fourier des signaux à temps discret.....</b>	<b>244</b>
3.1	Définition.....	244
3.2	Autre expression de la transformée .....	245
3.3	Quelques exemples .....	246
3.4	Relation entre transformée de Fourier des signaux à temps discret et transformée en $z$ bilatérale	246

**Annexe B PROPRIETES DES EQUATIONS DIOPHANTIENNES ..... 247**