

études en mécanique des matériaux et des structures

Stabilité et mécanique non linéaire

Quoc-Son Nguyen

 hermes

Table des matières

Avant-propos	15
Chapitre 1. Statique et dynamique des systèmes mécaniques	19
1.1. Systèmes discrets	19
1.1.1. Système mécanique discret	20
1.1.2. Loi fondamentale de la dynamique	20
1.1.3. Nécessité de relations supplémentaires	22
1.1.4. Formalisme lagrangien	22
1.2. Systèmes continus	24
1.2.1. Transformation d'un milieu continu	24
1.2.2. Loi fondamentale de la dynamique	27
1.2.3. Equations du mouvement en description eulérienne	30
1.2.4. Equations du mouvement en description lagrangienne	33
1.2.5. Transformations usuelles	36
Chapitre 2. Thermodynamique et loi de comportement	37
2.1. Rappels de thermodynamique	37
2.1.1. Equilibre thermodynamique	37
2.1.2. Transformation réversible ou irréversible	38
2.1.3. Premier principe	38
2.1.4. Second principe	39
2.2. Variables d'état et fonctions thermodynamiques usuelles	42
2.2.1. Variables d'état	43
2.2.2. Energie libre et équation de l'énergie	44
2.2.3. Equation d'état	45
2.3. Analyse des irréversibilités	45
2.3.1. Force thermodynamique et flux	45
2.3.2. Réciprocité d'Onsager	47
2.3.3. Potentiel de dissipation	47
2.3.4. Exemples	48
2.4. Thermodynamique des milieux continus	51
2.4.1. Postulat de l'état local	51

2.4.2.	Premier principe	52
2.4.3.	Second principe	52
2.4.4.	Analyse des irréversibilités	54
2.5.	Lois de comportement usuelles	55
2.5.1.	Modèles usuels de fluide	55
2.5.2.	Modèles usuels de solide	56
2.5.3.	Matériaux standard généralisés	60
2.6.	Evolution thermo-mécanique	61
2.6.1.	Couplage thermo-mécanique	61
2.6.2.	Equations d'évolution thermo-mécanique	63

Chapitre 3. Quelques rappels mathématiques 65

3.1.	Dérivée directionnelle et dérivée	65
3.2.	Espaces de fonctions usuels	66
3.3.	Calcul des variations	68
3.3.1.	Stationnarité d'une fonctionnelle	68
3.3.2.	Exemples	69
3.3.3.	Minimum local et seconde variation	71
3.4.	Analyse convexe	72
3.4.1.	Ensemble convexe, fonction convexe	72
3.4.2.	Transformation de Legendre-Fenchel et sous-gradient	73
3.4.3.	Minimisation de fonction convexe	74
3.5.	Inéquation variationnelle et problème de complémentarité	75
3.5.1.	Inéquation variationnelle quadratique	75
3.5.2.	Problème de complémentarité linéaire	76
3.6.	Problème aux valeurs propres généralisé	78
3.7.	Théorème de fonction implicite	79

Chapitre 4. Problèmes d'élasticité en petite transformation 81

4.1.	Comportement élastique	81
4.1.1.	Elasticité linéaire	81
4.1.2.	Elasticité non linéaire	83
4.2.	Equilibre statique et dynamique d'un solide élastique	83
4.2.1.	Equations dynamiques	84
4.2.2.	Equilibre statique	85
4.3.	Principes du minimum associés au problème statique	86
4.3.1.	Définitions préliminaires	86
4.3.2.	Principe du minimum de l'énergie potentielle totale	86
4.3.3.	Principe du minimum de l'énergie complémentaire	87
4.3.4.	Principe mixte	87
4.3.5.	Exemple d'illustration	88
4.4.	Existence et unicité	90
4.4.1.	Unicité	90

4.4.2. Existence	91
4.5. Solides élastiques en contact unilatéral	92
Chapitre 5. Problèmes de plasticité en petite transformation	97
5.1. Comportement élasto-plastique	97
5.1.1. Plasticité parfaite	98
5.1.2. Plasticité avec écrouissage	102
5.2. Réponse statique et dynamique d'un solide élasto-plastique . .	108
5.2.1. Equations d'évolution dynamique ou quasi-statique . . .	108
5.2.2. Exemple : flexion d'une poutre élasto-plastique	109
5.3. Quelques résultats généraux sur l'évolution élasto-plastique . .	112
5.3.1. Unicité	112
5.3.2. Adaptation	115
5.4. Problèmes en vitesses quasi-statique	120
5.4.1. Compléments sur la loi incrémentale	120
5.4.2. Problème en vitesses	122
Chapitre 6. Stabilité d'un équilibre	125
6.1. Evolution et stabilité	125
6.1.1. Equilibre d'un système évolutif	125
6.1.2. Stabilité d'un équilibre	126
6.1.3. Fonctionnelle de Liapunov	127
6.2. Méthode de linéarisation	127
6.2.1. Théorème de Liapunov	127
6.2.2. Equation de mouvement linéarisée	130
6.2.3. Equilibres dépendant d'un paramètre de charge	131
6.3. Cas des systèmes mécaniques conservatifs	132
6.3.1. Théorème de Lejeune-Dirichlet	133
6.3.2. Critère de seconde variation	133
6.4. Exemples	136
6.4.1. Système bi-barre sous charge suivieuse	136
6.4.2. Système bi-barre sous charge conservative	137
6.4.3. Equilibre d'une tige flexible et inextensible	138
6.4.4. Exercice : stabilité d'un système de deux ballons	141
Chapitre 7. Bifurcation statique ou dynamique	143
7.1. Courbes d'équilibre d'un système évolutif	143
7.2. Point de bifurcation et point limite	144
7.2.1. Point de bifurcation	144
7.2.2. Problème en vitesses	145
7.2.3. Point limite	145
7.3. Détermination des courbes d'équilibre passant par un point . .	147

7.3.1.	Cas d'un point régulier	148
7.3.2.	Cas d'un point singulier	148
7.3.3.	Echange de stabilité	150
7.4.	Bifurcation statique en mécanique	151
7.4.1.	Cas des systèmes mécaniques	151
7.4.2.	Exemples	152
7.5.	Bifurcation dynamique	155
7.5.1.	Bifurcation de Hopf	155
7.5.2.	Analyse post-critique de la bifurcation de Hopf	157
7.5.3.	Echange de stabilité	161
7.6.	Exemples	162
7.6.1.	Exemple élémentaire	162
7.6.2.	Oscillateur de van der Pol	162
7.6.3.	Charge suiveuse	164
Chapitre 8.	Bifurcation des systèmes conservatifs	167
8.1.	Analyse de bifurcation d'une courbe	167
8.1.1.	Détection des points de bifurcation	168
8.1.2.	Méthode de Liapunov-Schmidt	168
8.1.3.	Niveaux d'énergie	172
8.1.4.	Echange de stabilité	173
8.2.	Exemples d'illustration	174
8.2.1.	Flambage du système bi-barre	174
8.2.2.	Flambage d'une tige flexible et inextensible	175
8.3.	Mode multiple	176
8.3.1.	Analyse de bifurcation en mode multiple	176
8.3.2.	Analyse de stabilité en mode multiple	179
8.4.	Flambage d'un cadre triangulaire	180
Chapitre 9.	Flambage des structures élastiques	185
9.1.	Structures élastiques	185
9.1.1.	Hypothèse petite déformation-grand déplacement	185
9.1.2.	Analyse de bifurcation	186
9.2.	Poutre droite sous compression axiale	187
9.3.	Plaques et coques	190
9.3.1.	Coques surbaissées	190
9.3.2.	Flambage d'une plaque sous compression	191
9.4.	Solides tridimensionnels	194
9.4.1.	Lois de comportement élastique en transformation finie	194
9.4.2.	Problème d'équilibre	196
9.5.	Flambage sous pression	198
9.5.1.	Contribution de la pression à la rigidité tangente	198
9.5.2.	Exemple	199

9.6. Stabilité d'un équilibre thermo-élastique	201
9.6.1. Evolution thermo-élastique	201
9.6.2. Critère du minimum de l'énergie	202
Chapitre 10. Compléments sur les systèmes conservatifs	205
10.1. Influence des imperfections	205
10.1.1. Exemple d'imperfection géométrique	205
10.1.2. Courbe d'équilibre avec imperfection	207
10.1.3. Illustration	211
10.1.4. Cas du mode multiple	212
10.1.5. Imperfection du chargement	213
10.1.6. Eléments de la théorie des catastrophes	213
10.1.7. Exercice : pression critique de cavitation	216
10.2. Systèmes sous liaisons parfaites	219
10.2.1. Liaisons parfaites	220
10.2.2. Équilibre d'un système conservatif sous liaisons parfaites	222
10.2.3. Stabilité sous liaisons parfaites	223
Chapitre 11. Flambage plastique des poutres	227
11.1. Modèle de Shanley	227
11.1.1. Modèle discret	227
11.1.2. Modèle continu	230
11.2. Flambage des poutres élasto-plastiques	234
11.2.1. Equations du problème	234
11.2.2. Bifurcation à la charge critique du module tangent . . .	237
11.2.3. Bifurcation à la charge critique du module réduit	240
11.2.4. Bifurcation à une charge critique intermédiaire	242
Chapitre 12. Problème en vitesses et critères de Hill	245
12.1. Plasticité standard en transformation finie	245
12.2. Evolution quasi-statique en transformation finie	248
12.2.1. Equations d'évolution quasi-statique	248
12.2.2. Problème en vitesses	249
12.2.3. Unicité en vitesses	250
12.3. Analyse de bifurcation	251
12.3.1. Critère de non-bifurcation	251
12.3.2. Notion d'énergie dépensée	253
12.3.3. Niveaux d'énergie après bifurcation	253
12.4. Analyse de stabilité	255
12.4.1. Critère de stabilité	255
12.4.2. Exemple d'illustration	256
12.4.3. Justification du critère de stabilité	257

Chapitre 13. Bifurcation plastique	261
13.1. Analyse de bifurcation d'une courbe	261
13.1.1. Point critique et point régulier	261
13.1.2. Bifurcation sous charge croissante	262
13.2. Bifurcation à la charge critique du module tangent	263
13.2.1. Hypothèses	263
13.2.2. Analyse post bifurcation de Hutchinson	265
13.2.3. Comparaison de l'énergie dépensée	271
13.3. Bifurcation tangente	275
13.3.1. Exemple de Triantafyllidis	275
13.3.2. Remarques	279
Chapitre 14. Matériaux et structures en transformation finie	281
14.1. Grande déformation plastique	282
14.1.1. Description eulérienne ou lagrangienne actualisée	282
14.1.2. Lois de comportement élasto-plastique usuelles	283
14.1.3. Modèle à configuration relâchée	284
14.1.4. Problème en vitesses et symétrie majeure	287
14.2. Problème de localisation de déformation	288
14.2.1. Déformation localisée	288
14.2.2. Bifurcation par localisation	288
14.2.3. Exemple de plaque sous traction biaxiale	291
14.2.4. Instabilité par localisation	297
14.3. Flambage des structures élasto-plastiques	299
14.3.1. Modules incrémentaux usuels	299
14.3.2. Flambage sous compression simple	302
Chapitre 15. Systèmes dissipatifs standard	307
15.1. Systèmes dissipatifs standard	308
15.1.1. Equation de Biot et modèle standard généralisé	308
15.1.2. Propriété d'invariance	309
15.1.3. Systèmes dissipatifs standard	309
15.2. Comportement non visqueux	312
15.3. Problème en vitesses	313
15.3.1. Equations en vitesses	313
15.3.2. Résultats généraux	315
15.4. Analyse de stabilité et de bifurcation	316
15.4.1. Critère de stabilité d'un équilibre	316
15.4.2. Critère de non-bifurcation	318
15.5. Illustrations	318
15.5.1. Retour au modèle de Shanley	318
15.5.2. Plasticité à potentiel plastique multiple	320

15.6. Quelques résultats mathématiques	322
15.6.1. Méthode de régularisation visco-plastique	323
15.6.2. Continuité et unicité globale	327
Chapitre 16. Stabilité d'une évolution visqueuse ou plastique	329
16.1. Stabilité d'une évolution	330
16.1.1. Stabilité de la solution d'une équation non autonome	330
16.1.2. Méthode de linéarisation	330
16.2. Evolution visco-élastique en quasi-statique	332
16.2.1. Tige de Shanley visco-élastique	332
16.2.2. Solides visco-élastiques	335
16.2.3. Stabilité asymptotique d'une évolution quasi-statique	337
16.3. Evolution visco-plastique ou élasto-plastique en quasi-statique	338
16.3.1. Solides visco-plastiques	338
16.3.2. Stabilité d'une évolution visco-plastique	339
16.3.3. Stabilité d'une évolution élasto-plastique	341
16.4. Critère de seconde variation de l'énergie libre	342
16.4.1. Module limite	342
16.4.2. Module tangent et module limite	343
Chapitre 17. Fissuration et stabilité	345
17.1. Propagation d'un système de fissures rectilignes	346
17.1.1. Equation d'évolution, stabilité, bifurcation	346
17.1.2. Exemple	349
17.2. Expressions du taux de restitution de l'énergie	351
17.2.1. Méthode du changement de variable géométrique	351
17.2.2. Intégrales J et G_θ	352
17.3. Variations de G et dérivées secondes de l'énergie	354
17.3.1. Variations de G par rapport au domaine	354
17.3.2. Dérivées secondes de l'énergie	356
17.4. Aspects numériques	359
17.4.1. Détermination numérique de G en élasticité plane	359
17.4.2. Calcul des dérivées secondes de l'énergie	360
17.5. Aspects thermo-mécaniques	364
17.6. Problème de la fissure courbe	369
17.6.1. Quelques résultats analytiques	369
17.6.2. Critère de mode I pur	372
17.6.3. Critère de restitution maximale	373
Chapitre 18. Fissures planes	375
18.1. Fissures planes de contour quelconque	375
18.2. Loi de propagation de type fragile	378

18.3. Décohésion d'une membrane	380
18.3.1. Membrane collée sur un substrat rigide	380
18.3.2. Stabilité d'une fissure circulaire	381
18.3.3. Stabilité de configuration d'une fissure tunnel	383
18.4. Loi de propagation de type visqueux	385
18.5. Fissure de délaminage	387
18.5.1. Un problème de plaque collée	387
18.5.2. Expression de G dans le délaminage des plaques	389
18.5.3. Exercice	392
18.6. Fissures planes en milieu tridimensionnel	393
18.6.1. Expression de G	393
18.6.2. Exemples	394
Chapitre 19. Contact et frottement	397
19.1. Frottement sec de Coulomb	397
19.2. Problèmes quasi-statiques	398
19.3. Problèmes en vitesses	401
19.3.1. Relations en vitesses	401
19.3.2. Formulation variationnelle du problème en vitesses	402
19.3.3. Equations réduites	403
19.3.4. Exemple de Klarbring	404
19.4. Cas particuliers importants	406
19.4.1. Petite transformation	406
19.4.2. Contact partout effectif	407
19.5. Problèmes dynamiques	409
19.5.1. Contact avec rebonds d'un système discret	409
19.5.2. Vibration stick-slip d'un système masse-ressort	411
19.5.3. Sur l'évolution dynamique	412
19.6. Equilibre d'un solide en contact avec un obstacle mobile	416
19.6.1. Equilibre d'un solide élastique en contact avec un demi-espace rigide et mobile	416
19.6.2. Stabilité de l'équilibre	417
19.6.3. Instabilité du glissement stationnaire	419
Chapitre 20. Calcul non linéaire des structures	423
20.1. Réponse statique des structures élastiques	424
20.1.1. Méthode incrémentale	424
20.1.2. Méthode asymptotique	425
20.1.3. Franchissement des points critiques	426
20.2. Réponse statique des structures plastiques ou visqueuses	429
20.2.1. Méthode incrémentale implicite ou explicite	429
20.2.2. Solides élasto-plastiques	430
20.2.3. Solides visqueux	434

20.2.4. Méthode à grand incrément de temps	436
20.2.5. Remarques sur les réponses stationnaires	437
20.2.6. Illustrations en plasticité cyclique	438
20.3. Problème aux valeurs propres	441
20.3.1. Cas symétrique	441
20.3.2. Cas non symétrique	444
Bibliographie	445
Index	457