

UNIVERSITE DE BLIDA 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THESE DE DOCTORAT

En mathématiques

Spécialité : RECHERCHE OPERATIONNELLE

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE QUELQUES
PROBLEMES DE DOMINATION DANS
LES GRAPHERS**

Par

MIMOUNI Malika

Devant le jury composé de :

M. CHELLALI	Professeur, Univ. de Blida1	Président
N. IKHLEF ESCHOUF	Professeur, Univ. de Médéa	Directeur de thèse
M. BENDRAOUCHE	Professeur, Univ. de Blida1	Co- Directeur de thèse
I. BOUCHEMAKH	Professeur, USTHB. Alger	Examinatrice
A. BOUCHOU	Maître de Conférences A, Univ. de Médéa	Examineur
N. MEDDAH	Maître de Conférences A, Univ. de Blida1	Examinatrice

Blida 25 octobre 2023

RÉSUMÉ

Notre travail dans cette thèse porte sur l'étude de la domination localisatrice dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, où V est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble des arêtes. Un sous-ensemble S de V est dit ensemble dominant de G si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S . Si, de plus, pour toute paire de sommets u et v dans $V - S$, les ensembles $N(u) \cap S$ et $N(v) \cap S$ sont distincts, alors S est appelé ensemble dominant localisateur de G . Nous notons par $\gamma_L(G)$ (respectivement, $\Gamma_L(G)$) le cardinal minimum (respectivement, maximum) d'un ensemble dominant localisateur (respectivement, dominant localisateur minimal) de G .

La contraction d'une arête uv dans un graphe G consiste à supprimer les sommets u et v de G en les remplaçant par un nouveau sommet noté par \overline{uv} , et en attachant \overline{uv} à tous les sommets qui sont adjacents à u ou v dans G . Le graphe obtenu à partir de G en contractant l'arête uv est noté par G_{uv} . Un graphe G est dit γ_L -point-critique si $\gamma_L(G_{uv}) < \gamma_L(G)$ pour toute arête uv dans E . Etant donné un entier $k > 0$, un graphe G est défini comme étant k - γ_L -point-critique si $\gamma_L(G) = k$ et G est un graphe γ_L -point-critique.

Notre contribution dans cette thèse est divisée en deux parties distinctes. Dans la première partie, nous caractérisons tous les graphes connexes 3- γ_L -point-critiques. Dans la deuxième partie, notre attention est portée sur le nombre de domination localisatrice supérieur en donnant quelques résultats intermédiaires avant de caractériser tous les graphes connexes d'ordre $n \geq 4$ tels que $\Gamma_L(G) = n - 2$.

ABSTRACT

In this thesis, our work focuses on the study of locating-domination in graphs. Let $G = (V, E)$ be a simple graph, where V is the set of vertices and E is the set of edges. A subset S of V is said to be a dominating set of G if every vertex in $V - S$ is adjacent to at least one vertex in S . If, moreover, for every pair of vertices u and v in $V - S$, the sets $N(u) \cap S$ and $N(v) \cap S$ are distinct, then S is called a locating-dominating set of G . The locating-domination number (the upper locating-domination number, respectively), denoted $\gamma_L(G)$ ($\Gamma_L(G)$, respectively) is the minimum (maximum, respectively) cardinality of a locating-dominating set (minimal locating-dominating set, respectively) of G .

The contraction of an edge uv of a graph G consists in removing the vertices u and v from G and replacing them with a new vertex denoted by \overline{uv} , and attaching \overline{uv} to all vertices that are adjacent to u or v in G . The graph obtained from G by contracting the edge uv is denoted by G_{uv} . A graph G is said to be γ_L -dot-critical if $\gamma_L(G_{uv}) < \gamma_L(G)$ for any edge uv in E . Given an integer $k > 0$, a graph G is defined to be k - γ_L -dot-critical if $\gamma_L(G) = k$ and G is a γ_L -dot-critical graph.

This thesis is structured in two distinct parts. In the first part, we characterize all connected 3- γ_L -dot-critical graphs. In the second part, our attention is directed towards the upper locating-domination number, giving some intermediate results before characterizing all connected graphs of order $n \geq 4$ such that $\Gamma_L(G) = n - 2$.

ملخص

ينصب اهتمامنا في هذه الأطروحة على دراسة السيطرة الموضعية في البيانات. ليكن $G = (V, E)$ بيانا بسيط حيث V تمثل مجموعة رؤوس البيان و E مجموعة أضلاعه. نقول عن مجموعة جزئية S من المجموعة V أنها مسيطرة على البيان G إذا كان كل رأس من $V-S$ مجاور لرأس على الأقل من المجموعة S . نقول عن مجموعة مسيطرة S أنها موضعية إذا كان من أجل كل زوج من الرؤوس u و v من $V-S$ فإن المجموعتين $N(u) \cap S$ و $N(v) \cap S$ مختلفتان و غير فارغتان. عدد السيطرة الموضعية للبيان G والذي نرمز له $\gamma_L(G)$ هو الأصلي الأدنى للمجموعة المسيطرة الموضعية للبيان G ، وعدد السيطرة الموضعية الأعلى والذي نرمز له $\Gamma_L(G)$ هو الأصلي الأعلى للمجموعة المسيطرة الموضعية الصغرى (حسب مفهوم الاحتواء) للبيان G .

تتمثل عملية تقلص الضلع uv في إزالة الرأسين u و v من G و استبدالهما برأس جديد يدعى \overline{uv} و ربط \overline{uv} بجميع الرؤوس المجاورة لكل من u أو v في G . البيان الحاصل عن G بعد عملية تقلص الضلع uv يرمز له G_{uv} . نقول أن البيان G هو γ_L -نقطة-حرج إذا كان $\gamma_L(G_{uv}) < \gamma_L(G)$ من أجل جميع الأضلاع uv في E . علاوة على ذلك، إذا كان $k > 0$ عدد طبيعي، نقول عن البيان G أنه k -نقطة-حرج إذا كان $\gamma_L(G) = k$.

مساهمتنا في هذه الأطروحة تنقسم إلى جزئين متميزين. في الجزء الأول، نقدم عملا يتيح لنا إيجاد البيانات المتصلة التي تكون 3 -نقطة-حرج. في الجزء الثاني نركز اهتمامنا على وسيط السيطرة الموضعية Γ_L بتقديم بعض النتائج التي تسمح لنا بتمييز بعض البيانات المتصلة التي تحقق $\Gamma_L(G) = n - 2$.

REMÉRCIEMENTS

Je remercie avant tout "ALLAH" le tout puissant pour m'avoir accordé Sa grâce et de m'avoir donné la foi et la persévérance nécessaires pour mener à bien mon travail.

Je rends également un hommage particulier à mon défunt père, qui a toujours été un soutien indéfectible dans ma vie, en particulier dans mes études. Bien qu'il ne soit plus avec moi pour partager ces moments précieux, je prie pour qu'ALLAH l'accueille dans Son vaste paradis.

Je souhaite exprimer mes sincères remerciements envers mon directeur de thèse, Monsieur Ikhlef Eschouf Noureddine, Professeur à l'Université de Médéa, pour sa rigueur et pour ses précieux conseils qui m'ont beaucoup aidé dans l'accomplissement de cette thèse. Ses commentaires constructifs ont été d'une grande aide durant la réalisation de cette thèse. Je suis également reconnaissante envers Monsieur Bendraouche Mohamed, Professeur à l'Université de Blida 1, qui a généreusement accepté d'être mon Co-directeur de thèse. Aussi, je remercie Monsieur Zamime Mohamed, Maître de conférence B à l'Université de Médéa, et Monsieur Ouldrabah Lyès, Maître de conférence A à l'Université de Médéa, pour leurs précieuses contributions à mes travaux.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Chellali Mustapha, Professeur à l'Université de Blida 1 pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers Madame Bouchemakh Isma, Professeur à l'Université de Houari Boumedienne, Monsieur Bouchou Ahmed, Maître de Conférences A à l'Université de Médéa, Madame Meddah Nacéra, Maître de Conférences A à l'Université de Blida 1, pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse, ainsi que pour leur intérêt marqué envers mes travaux.

Je tiens à remercier du fond du cœur ma mère bien-aimée pour tout ce qu'elle fait pour moi. Sans elle, je n'aurai jamais pu accomplir tout cela, et les mots me manquent toujours pour exprimer toute ma gratitude envers elle. Je suis également reconnaissante envers tous les membres de ma famille qui m'ont soutenu tout au long de la réalisation de cette thèse.

A la mémoire de mon père.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	i
ABSTRACT	
RÉSUMÉ EN ARABE	
REMERCEMENTS	ii
TABLE DES MATIÈRES	iii
LISTE DES FIGURES	iv
INTRODUCTION	9
CHAPITRE 1. NOTIONS DE BASE ET NOTATIONS SUR LES GRAPHS	12
1.1. Définitions de base et notations	12
1.1.1. Graphes et sous-graphes	12
1.1.2. Voisinages et degrés	13
1.1.3. Chaîne et cycle	14
1.1.4. Maille, excentricité et diamètre	14
1.1.5. Graphes particuliers	14
1.1.6. Quelques invariants de graphes	16
1.2. Domination dans les graphes	16
1.2.1. Définitions	17
1.2.2. Quelques paramètres de domination	18
1.3. Domination localisatrice	19
1.4. Graphes μ -point-critiques	23
CHAPITRE 2. ÉTAT DE L'ART SUR LA DOMINATION LOCALISATRICE	26
2.1. Nombre de domination localisatrice	26
2.1.1. Nombre de domination localisatrice inférieur	26
2.1.2. Bornes pour le nombre de domination localisatrice	28

2.1.3.	Relation entre γ_L , et les paramètres β_0 , γ_2 et ρ	32
2.1.4.	Nombre de domination localisatrice supérieur	36
2.2.	Graphes critiques	38
2.2.1.	Graphes γ -point-critiques	38
2.2.2.	Graphes μ -critiques avec $\mu \in \{\gamma_L, \gamma_L^t\}$	39
2.2.3.	Graphes arête-critiques	39
2.2.4.	Graphes sommet-critiques	42
2.2.5.	Quelques résultats sur les graphes γ_L -point-critiques	43
 CHAPITRE 3. GRAPHES POINT-CRITIQUES PAR RAPPORT À LA DOMINA- TION LOCALISATRICE		47
3.1.	Définitions et premières propriétés	47
3.2.	Caractérisation des graphes $3\text{-}\gamma_L$ -point-critiques	50
3.3.	Preuve du Théorème 3.5	52
 CHAPITRE 4. NOMBRE DE DOMINATION LOCALISATRICE SUPERIEUR . . .		62
4.1.	Familles spéciales de graphes.	62
4.2.	Définitions et observations	66
4.3.	Lemmes préliminaires	67
4.4.	Preuve du Théorème 4.1	70
 CONCLUSION ET PERSPECTIVES		77

LISTE DES FIGURES

FIGURE 1.1.	Un graphe G tel que $\gamma(G) = 2$.	18
FIGURE 1.2.	La chaîne P_6 telle que $\gamma_L(P_6) = 3$, et $\Gamma_L(P_6) = 4$.	21
FIGURE 1.3.	Graphe G et le graphe $G_{v_3v_5}$ obtenu par la contraction de l'arête v_3v_5	24
FIGURE 2.1.	Arbre T tel que $\gamma_L(T) = \frac{n}{2}$.	31
FIGURE 2.2.	Le graphe K_5 où $i(K_5) < \gamma_L(K_5)$.	35
FIGURE 2.3.	Un graphe G_3 tel que $i(G_3) > \gamma_L(G_3)$.	35
FIGURE 2.4.	L'arbre T_t	37
FIGURE 2.5.	Un graphe de \mathcal{G} .	41
FIGURE 2.6.	Un graphe de \mathcal{H} , les sommets en noir représentent l'ensemble X et en blanc l'ensemble Y .	42
FIGURE 2.7.	Graphe G avec $\gamma_L(G) = 3$ et $\gamma_L(G_e) = 6 = 2^{\gamma_L-1} + \gamma_L - 1$.	44
FIGURE 3.1.	Graphe H_0	50
FIGURE 3.2.	Famille \mathcal{G} des graphes connexes $3\text{-}\gamma_L\text{-point-critiques}$, où l'EDL est représenté par des sommets en gras.	51
FIGURE 4.1.	Graphe G	63
FIGURE 4.2.	Famille \mathcal{F}_1	64
FIGURE 4.3.	Famille \mathcal{F}_2	65
FIGURE 4.4.	Famille \mathcal{F}_3 .	65

INTRODUCTION

La théorie des graphes, apparue vraisemblablement au XVIII^e siècle, est une branche des mathématiques qui s'intéresse à modéliser et à résoudre des problèmes réels issus de différents domaines de la vie courante, tels que les réseaux de transport, de communication, d'informatique et d'autres domaines tels que la chimie, la biologie et les sciences sociales. Cette discipline a connu un essor considérable qui a fait apparaître plusieurs thèmes de recherche, notamment la domination qui constitue le champ de recherche de notre thèse. L'origine de la domination remonte à l'Inde du 16^{ème} siècle, mais n'a connu sa véritable expansion qu'à compter des années soixante. D'abord avec les travaux de Berge [2] en 1958, le concept du nombre de domination a été défini sous l'appellation "coefficient de stabilité externe", puis grâce aux travaux de Ore [81] en 1962, où les termes "ensemble dominant" et "nombre de domination" ont été utilisés pour la première fois. En 1977, Cockayne et Hedetniemi [26] ont publié un article dans lequel ils ont regroupé tous les travaux effectués et les résultats obtenus sur le concept de la domination, et ont donné une nouvelle notation au nombre de domination. Dans la littérature plusieurs définitions de la domination ont été avancées, nous citons ici celle que nous jugeons la plus utilisée. Un sous-ensemble D de sommets dans un graphe G est dit dominant de G si tout sommet de G est ou bien dans D ou bien adjacent à un sommet de D . Le nombre de domination du graphe G , noté $\gamma(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G .

Grâce à sa capacité de traiter diverses problèmes théoriques et pratiques, la domination est devenue un thème central de la théorie des graphes. En effet, au cours de ces dernières décennies, le nombre de travaux réalisés sur ce concept a été fortement multiplié. Dans ce contexte, de nouveaux concepts liés à la domination ont été développés donnant naissance à de nouveaux paramètres de la domination tels que les nombres de la domination totale, de la k -domination, de la domination double et de la domination localisatrice qui fera l'objet de notre étude dans cette thèse. Pour plus de détails sur la domination et ses variantes dans les graphes, le lecteur peut se reporter aux ouvrages de Haynes et al. [52, 53, 54, 55, 56].

L'objectif de cette thèse est d'étudier certains aspects de la domination localisatrice,

une variante de la domination introduite et définie par Slater [89, 90] en 1987. Un ensemble dominant D de sommets dans un graphe G est dit dominant localisateur de G si chaque deux sommets distincts en dehors de D ont des voisins distincts dans D . Le nombre de domination localisatrice inférieur, noté $\gamma_L(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant localisateur de G , et le nombre de domination localisatrice supérieur, noté $\Gamma_L(G)$, est le cardinal maximum d'un dominant localisateur minimal de G . Ce thème a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs conduisant à une multitude d'articles qui présentent plusieurs invariants de la domination localisatrice obtenus en rajoutant des conditions au graphe considéré. Pour de plus amples détails sur le sujet, voir [8, 21, 41, 77, 79, 87].

Ce manuscrit est présenté comme suit :

Chapitre 1 : Définitions de base et notations

Ce chapitre est consacré aux définitions et concepts de base relatifs à la théorie des graphes dont on aura besoin le long de ce travail. Les termes spécifiques à un chapitre seront définis à l'intérieur du chapitre en question.

Chapitre 2 : Etat de l'art sur la domination localisatrice

Dans ce chapitre, nous présentons les derniers développements concernant la domination localisatrice en fournissant un aperçu de l'état actuel de la recherche. En effet, dans la première partie, nous exposons quelques principaux résultats sur le nombre de domination localisatrice inférieur. Ensuite ceux concernant le nombre de domination localisatrice supérieur $\Gamma_L(G)$, où nous allons présenter des bornes supérieures ainsi que des valeurs exactes pour ce paramètre dans des classes particulières de graphes telles que les arbres et les cycles. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous récapitulons les résultats obtenus sur les graphes dits $\mu(G)$ -critiques où $\mu \in \{\gamma, \gamma_L, \gamma_L^t\}$. Il s'agit de graphes pour lesquels toute modification, telle que la suppression d'un sommet quelconque, l'ajout, la suppression ou la contraction d'une arête quelconque a un impact sur $\mu(G)$.

Chapitre 3 : Domination localisatrice dans les graphes

Ce chapitre marque le début de notre première contribution sur les graphes γ_L -point-critiques. Nous commençons d'abord par établir des définitions et observations fondamentales, ainsi que des résultats qui seront utilisés dans cette partie de notre travail. Nous caractérisons par la suite les graphes 3- γ_L -point-critiques.

Chapitre 4 : Nombre de domination localisatrice supérieur

Ce dernier chapitre est dédié à notre deuxième contribution. En effet, après avoir donné quelques notations et définitions utiles, nous caractérisons les graphes d'ordre $n \geq 4$ pour lesquels $\Gamma_L(G) = n - 2$.

Nous terminons cette thèse par une conclusion et quelques perspectives pour les travaux futurs dans ce domaine de recherche.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE ET NOTATIONS SUR LES GRAPHERS

Dans la première partie de ce chapitre, nous introduisons les notions et terminologie utilisées dans l'ensemble de ce document. Nous rappelons d'abord quelques définitions de base de la théorie des graphes ensuite nous citons quelques invariants de graphes liés à notre thème. Ces définitions peuvent être vu de façon bien détaillée en se référant aux ouvrages de C. Berge [2], U. Murty [11] et R. Diestel [34]. Dans la deuxième partie, nous abordons le thème de la domination, incluant une brève rétrospective de l'histoire de la domination et de quelques-unes de ses variantes. Dans la troisième partie, nous nous focalisons sur la domination localisatrice et fournissons une description succincte de ce sujet ainsi que de certains de ses domaines d'application. Enfin, dans la dernière partie, nous examinons la notion de graphes μ -point-critiques.

1.1 Définitions de base et notations

1.1.1 Graphes et sous-graphes

Un *graphe* G est la donnée d'un couple (V, E) où V est un ensemble fini non vide dit ensemble de *sommets* et E est l'ensemble des paires de sommets appelées *arêtes*. Le nombre des sommets de G , appelé *ordre* de G , est noté par n et le nombre des arêtes de G , appelé *taille* de G , est noté par m . Une arête dans G reliant deux sommets u et v est généralement notée par uv . Dans ce cas, les sommets u et v sont dits *adjacents* (ou *voisins*) et sont appelés les *extrémités* de l'arête uv . Si e désigne l'arête uv , alors on dit que e est *incidente* aux sommets u et v . Par ailleurs, e est dite *boucle* si ses deux extrémités sont confondues (c'est à dire $u = v$), et elle est dite *multiple* s'il existe au moins une arête $e' \neq e$ telle que e et e' ont les mêmes extrémités. Un graphe avec un unique sommet et aucune arête est dit *trivial* et un graphe sans boucles et sans arêtes multiples est dit graphe *simple*. Il est à noter que tous les graphes considérés dans cette thèse sont non orientés simples et finis.

Deux graphes G et H sont dits *isomorphes* s'il existe une bijection f de l'ensemble des sommets de G sur l'ensemble des sommets de H telle que pour tous sommets u et v de G , u et v sont adjacents dans G si et seulement si $f(u)$ et $f(v)$ sont adjacents dans H . En d'autres termes, la fonction f est une correspondance entre les sommets de G et ceux de H qui préserve les relations d'adjacence entre les sommets. Plus formellement, on écrit:

$$\forall u, v \in V(G), uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(H).$$

Un *sous-graphe* d'un graphe G est un graphe qui peut être obtenu en supprimant certains sommets et certaines arêtes de G . Plus formellement, un graphe $H = (V_H, E_H)$ est un sous-graphe de $G = (V, E)$ si $V_H \subseteq V$ et $E_H \subseteq E$. Un *sous-graphe induit* de G est un sous-graphe qui est obtenu en sélectionnant un sous-ensemble de sommets de G et toutes les arêtes qui relient ces sommets dans G . Plus précisément, si $G = (V, E)$ est un graphe et $A \subseteq V$ est un sous-ensemble de sommets, le sous-graphe induit par A , noté $G[A]$, est le graphe (A, E_A) tel que $E_A = \{uv \in E : u, v \in A\}$. Un graphe H est appelé *graphe partiel* de G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Un graphe G est dit *H-libre* s'il ne contient pas de sous-graphe induit isomorphe à H .

1.1.2 Voisinages et degrés

Soit $G = (V, E)$, pour un sommet v de G , le *voisinage ouvert* de v est défini par l'ensemble $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$, le *voisinage fermé* de v est désigné par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Etant donné un sous-ensemble $S \subseteq V$, les ensembles $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ et $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ désignent respectivement le voisinage ouvert et fermé de S .

Le *degré* d'un sommet v de G , noté $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v . Un sommet *isolé* est un sommet de degré 0, un sommet *pendant* appelé aussi *feuille* est un sommet de degré 1 et un sommet *universel* est un sommet de degré $n - 1$. Les paramètres $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ désignent respectivement les degrés maximum et minimum de G .

Le voisin d'un sommet pendant est dit *sommet support* et une arête incidente à un sommet pendant est dite *arête pendante*. Les ensembles des sommets supports et des sommets pendants de G sont respectivement désignés par $S(G)$ et $L(G)$ avec $|L(G)| = l(G)$ et $|S(G)| = s(G)$. L'ensemble des sommets pendants adjacents à un

sommet support v est noté par $L_v(G)$. Si $|L_v(G)| > 1$, alors v sera dit *support fort*. S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous utilisons simplement l , s et L_v au lieu de $l(G)$, $s(G)$ et $L_v(G)$.

1.1.3 Chaîne et cycle

Dans un graphe $G = (V, E)$, une *chaîne* P est définie comme étant une séquence finie de sommets, notée u_1, u_2, \dots, u_k telle que pour tout entier i compris entre 1 et $k - 1$, $u_i u_{i+1} \in E$. La *longueur* de la chaîne P est déterminée par le nombre de ses arêtes. Les sommets u_1 et u_k sont appelés respectivement l'extrémité *initiale* et *finale* de la chaîne P . Une chaîne est dite *simple* si elle ne passe pas deux fois par la même arête, et *élémentaire* si elle ne passe pas deux fois par le même sommet. Une *corde* est définie comme étant une arête qui relie deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne élémentaire sans corde induite par n sommets est notée P_n .

Un *cycle* dans un graphe G correspond à une chaîne dont les extrémités initiale et finale sont confondues. Un cycle *élémentaire* induit par n sommets est noté par C_n . Un graphe qui ne contient qu'un seul cycle est appelé *unicycle*, tandis qu'un graphe qui n'a pas de cycle est appelé *acyclique*.

1.1.4 Maille, excentricité et diamètre

La *maille* d'un graphe G , notée par $g(G)$ est la longueur du plus petit cycle dans G . La *distance* entre deux sommets u et v d'un graphe G , notée $d_G(u, v)$ est la longueur de la plus courte chaîne entre u et v . L'*excentricité* d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ est $exc(v) = \max \{d(v, w) : w \in V\}$. Le *diamètre* du graphe G est $diam(G) = \max_{v \in V} \{exc(v) : v \in V\}$.

1.1.5 Graphes particuliers

Un graphe G est dit *connexe* si pour chaque paire de sommets distincts u et v de G , il existe une chaîne joignant u à v . Une *composante connexe* de G est un sous-graphe connexe maximal de G . Un *sommet d'articulation* est un sommet tel que sa suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe. Un *isthme* est une arête e de G telle que $G - e$ contient plus de composantes connexes que G .

Le graphe *complémentaire* d'un graphe G , noté \overline{G} , est un graphe défini sur le même ensemble de sommets que G , c'est à dire $V(\overline{G}) = V(G)$. Il est construit en ajoutant une arête entre deux sommets seulement si aucune arête ne relie ces deux sommets dans G . En d'autres termes, les arêtes du graphe complémentaire consistent en toutes les arêtes qui ne sont pas présentes dans G .

Un graphe *complet* d'ordre n , noté K_n , est un graphe simple où chaque sommet est de degré $n - 1$.

Un graphe *régulier* est un graphe où tous les sommets ont le même degré. Un graphe G est dit *d -régulier* si G est régulier tel que le degré de chaque sommet de G est égal à d . En particulier, si $d = 3$, alors G est appelé aussi graphe *cubique*.

Un graphe *multiparti* est un graphe dont l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en k sous ensembles disjoints V_1, V_2, \dots, V_k de sorte que chaque arête relie une paire de sommets qui appartient à deux ensembles différents. Pour $k = 2$, G est dit graphe *biparti*. Un graphe *biparti complet* est un graphe biparti d'ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ tel que tous les sommets de V_1 sont reliés à tous les sommets de V_2 . Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet sera noté $K_{p,q}$.

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycles ayant exactement $n - 1$ arêtes. Une *étoile* d'ordre $q \geq 1$ est le graphe biparti complet $K_{1,q}$ et une *étoile subdivisée*, notée SS_p ($p \geq 1$), est un arbre qui est obtenu à partir d'une étoile en subdivisant chaque arête exactement une fois. Une *étoile double*, notée $S_{p,q}$ ($p \geq 1$ et $q \geq 1$) est un arbre T qui contient exactement deux sommets supports adjacents, l'un ayant p feuilles et l'autre q feuilles.

La *couronne* d'un graphe G , noté $G \circ K_1$ (ou *cor* (G)), est un graphe obtenu par une copie de G où chaque sommet de G est attaché à un nouveau sommet. Ainsi $|V(G \circ K_1)| = 2 |V(G)|$ et $|E(G \circ K_1)| = |E(G)| + |V(G)|$.

Un *bloc* dans un graphe est un sous-graphe connexe maximal qui ne contient pas de sommets d'articulation. Un *graphe bloc* est un graphe dont tous les blocs sont des sous-graphes complets. Un *graphe cactus* est un graphe où chaque arête appartient à au plus un cycle.

1.1.6 Quelques invariants de graphes

Une *clique* dans un graphe G est un sous-ensemble A de sommets de G tel que chaque paire de sommets distincts dans A est reliée par une arête dans G . Le nombre de sommets de la clique est appelé taille de la clique. Une clique de taille maximum est dite *clique maximum*. Le cardinal d'une clique maximum dans G est noté par $\omega(G)$.

Un *ensemble indépendant* (appelé aussi *stable*) d'un graphe G est un sous-ensemble de sommets qui ne sont pas reliés entre eux par une arête. La taille d'un stable est égale au nombre de ses sommets. Un stable de G est maximum s'il est de taille maximale dans G . Le cardinal d'un stable maximum de G est appelé le *nombre de stabilité* de G et est noté $\beta_0(G)$.

Un *couplage* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble M d'arêtes de E qui sont deux à deux non-adjacentes. Si, de plus tout sommet de V est extrémité d'une arête de M alors M est dit *couplage parfait*.

Un *transversal* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $T \subseteq V$ de sommets tel que toutes les arêtes de G ont au moins une extrémité dans T .

Une *coloration propre* d'un graphe $G = (V, E)$ est une application de V dans \mathbb{N} telle que si deux sommets x et y sont adjacents, alors leurs couleurs correspondantes sont différentes. Ainsi, une classe de couleur i est un stable de V coloré avec la même couleur i .

Le *nombre chromatique*, noté $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G possède une coloration propre utilisant k couleurs.

1.2 Domination dans les graphes

L'idée de la domination dans les graphes provient des jeux des échecs, remontant à l'Inde [61] du XVIe siècle. En 1862, De Jaenish [31] avait posé le problème de trouver le nombre minimum de reines à placer sur un échiquier de telle sorte à ce que toutes les cases de l'échiquier $n \times n$ soient couvertes ou dominées par l'une des reines. Par exemple, le nombre minimum de reines pour couvrir un échiquier 8×8 est 5, mais le problème du nombre minimum de reines a été résolu jusqu'à $n = 31$, où ce nombre est égal à 17.

En 1958, Claude Berge [2] a été le premier à introduire le nombre de domination

d'un graphe orienté sous le nom de "coefficient de stabilité externe". Deux ans plus tard, Ore [81] a utilisé pour la première fois les termes "ensemble dominant", "nombre de domination" dans son livre "Graph Theory" en désignant le nombre de domination par $d(G)$. En 1977, Cockayne et Hedetniemi [26] ont publié un article remarquable sur la domination, qui a regroupé tous les travaux de recherche sur ce sujet, ils ont été les premiers à désigner le nombre de domination par $\gamma(G)$, une notation qui est restée inchangée jusqu'à aujourd'hui. Les résultats obtenus dans cet article ont stimulé les chercheurs à explorer en profondeur le concept de la domination en raison de son intérêt théorique et pratique. Depuis nouveaux paramètres de domination ont vu le jour en rajoutant des propriétés supplémentaires au graphe concerné. Parmi les ouvrages consacrés à cette notion figurent ceux de Haynes, Hedetniemi et Slater [52, 53] et les plus récents sont de Haynes, Hedetniemi et Henning [54, 55, 56].

1.2.1 Définitions

Le problème du nombre minimum de reines dans un échiquier $n \times n$ est modélisé par le graphe $G = (V, E)$ appelé aussi "Graphe des reines", où un sommet $v \in V$ représente une case de l'échiquier, et uv est une arête de $E(G)$ si la reine se déplace de la case u vers la case v . Un tel problème est résolu par la détermination d'un ensemble dominant minimum dans le graphe G .

Rappelons qu'un sous ensemble A de V est dit ensemble dominant *minimal* s'il n'existe pas d'ensemble dominant B tel que $B \subseteq A$.

Définition 1.1. *Soit un graphe $G = (V, E)$. Un sous ensemble de sommets S de V est dit dominant de G si tout sommet v de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S . Le cardinal minimum (respectivement, maximum) d'un ensemble dominant minimal de G , noté $\gamma(G)$ (respectivement, $\Gamma(G)$), est appelé le nombre de domination inférieur (respectivement, supérieur) de G .*

Pour simplifier, on peut omettre le terme "inférieur" et on dira le nombre de *domination*. Un ensemble dominant de G de cardinalité $\gamma(G)$ est appelé un $\gamma(G)$ -ensemble.

Le nombre de domination du graphe de la Figure 1.1 est égal à deux. Les sommets en gras représentent un $\gamma(G)$ -ensemble.

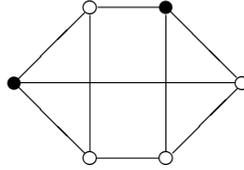


FIGURE 1.1. Un graphe G tel que $\gamma(G) = 2$.

1.2.2 Quelques paramètres de domination

La diversité des applications de la domination dans les graphes a nécessité une évolution constante de son étude. Dans de nombreuses situations, la notion simple de la domination ne suffit pas pour fournir une représentation complète du problème. Dans ce sens, d'autres paramètres de domination ont été définis en ajoutant des conditions supplémentaires qui peuvent être internes ou externes à l'ensemble dominant. En conséquence, plusieurs variantes de la domination ont vu le jour, en voici quelques exemples.

Domination stable: *Un sous ensemble S de V est dit dominant stable de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S ne contient pas d'arête. Le cardinal minimum (respectivement, maximum) d'un stable maximal de G , noté $i(G)$ (respectivement, $\beta_0(G)$), est appelé le nombre de domination stable (respectivement, le nombre de stabilité) de G .*

L'idée d'indépendance est apparue avant celle de la domination. Ce concept a été introduit par Cockayne et Hedetniemi [27].

Domination totale: *Un sous ensemble S de V est dit dominant total de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S ne contient pas de sommet isolé. Le cardinal minimum d'un dominant total de G , noté $\gamma_t(G)$, est appelé le nombre de domination totale de G .*

La domination totale a été introduite par Cockayne, Dawes et Hedetniemi [25].

Pour une vue plus détaillée sur ces deux dernières variantes de la domination, le lecteur peut consulter le livre de Haynes et al. [56].

k -domination: *Un sous ensemble S de V est dit k -dominant de G pour un entier $k \geq 1$, si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins k sommets de S . Le nombre de k -domination, noté par $\gamma_k(G)$, est le cardinal minimum d'un k -dominant de G .*

La k -domination a été introduite par Fink et Jacobson [42]. Pour plus de détails,

nous référons le lecteur au livre [54], chapter book des auteurs Hansberg et Volkmann.

Domination paire (couplée): *Un sous ensemble S de V est dit dominant pair (couplé) de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S contient un couplage parfait. Le cardinal minimum d'un dominant pair de G , noté $\gamma_{pr}(G)$, est appelé le nombre de domination paire de G .*

La domination paire a été introduite par Haynes et Slater [57].

Domination double: *Un sous ensemble S de V est dit dominant double de G si tout sommet de V satisfait la condition suivante: Si $x \in V - S$, alors x a au moins deux voisins dans S et si $x \in S$ alors x a au moins un voisin dans S . Le nombre de domination double, noté par $\gamma_{\times 2}(G)$, est la taille minimale d'un ensemble dominant double de G .*

La domination double a été introduite par Harary et Haynes [51]. A voir aussi la référence [54].

Dans la section suivante, nous allons définir un autre type de domination, appelé domination localisatrice, qui est l'objet de notre étude dans cette thèse.

1.3 Domination localisatrice

Le concept de la *domination localisatrice* a été défini et introduit par Slater [89] en 1987. La motivation qui l'animait était de résoudre le problème de la mise en place d'appareils de surveillance dans un système donné de façon à pouvoir détecter la présence d'un incendie ou d'un intrus, qu'il s'agisse d'un voleur, d'un saboteur etc ..., ou d'un processeur défectueux dans le cas d'un système de multiprocesseurs. L'ensemble des appareils installés pour détecter tout dysfonctionnement dans le système, représente un ensemble dominant, tandis qu'une localisation précise et unique exige que cet ensemble soit un localisateur. L'octroi de ces appareils peut s'avérer onéreux, d'où la nécessité de réduire leur nombre pour minimiser le coût d'achat et les frais d'installation. Cette installation peut-être modélisée par un graphe où un sommet représente une pièce, un hall, un escalier, etc..., et chaque arête peut relier deux emplacements qui sont adjacents. L'ensemble dominant localisateur représente l'ensemble d'appareils indispensables pour garantir la sécurité du système. Chaque appareil de détection localisé dans un sommet:

- détecte l'incendie qui se déclenche dans la pièce où il est installé.
- détecte tous les incendies qui se déclenchent dans toutes les pièces adjacentes (voisines) à celle où il est installé.
- distingue entre un incendie qui se déclenche dans la pièce où il est installé de celui qui se déclenche dans la pièce voisine.

Dans ce qui suit, nous allons définir l'ensemble localisateur et l'ensemble dominant localisateur d'un graphe G .

Définition 1.2. Soit $G = (V, E)$ un graphe, $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un sous-ensemble de sommets de V et $v \in V$. On appelle k -vecteur de v par rapport à S (ou S -localisation de v), noté $C_S(v)$, le vecteur défini par: $C_S(v) = (d_G(v, v_1), d_G(v, v_2), \dots, d_G(v, v_k))$. L'ensemble S est dit localisateur de G si pour tout sommet $v \in V$, les k -vecteurs $C_S(v)$ sont distincts (ou la S -localisation de v est unique). Le nombre de localisation noté par $R(G)$ est la cardinalité minimum d'un ensemble localisateur de G .

Notons que dans le cas du graphe complet K_n ($n \geq 2$), il est facile de voir que tout ensemble localisateur de K_n est de taille au moins $n - 1$. D'où $R(K_n) = n - 1$. D'autre part, il est clair que pour les chaînes P_n et les cycles C_n , le nombre de localisation est égal à 1.

Définition 1.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe, pour u et v dans V , on pose $d_1(u, v) = \min(2, d(v, w))$. Pour les k -vecteur $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ et v dans V soit:

$$f_1(v) = (d_1(v, v_1), d_1(v, v_2), \dots, d_1(v, v_k)),$$

alors $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ est un ensemble dominant localisateur de G si pour toute paire de sommets distincts u, v dans V , on a $f_1(u) \neq f_1(v)$ et pour tout $u \in V$, $f_1(u) \neq (2, 2, \dots, 2)$.

Observons aussi qu'un ensemble dominant localisateur est un ensemble dominant et un ensemble localisateur mais la réciproque est fautive, c-a-d qu'un ensemble qui est un dominant et un localisateur n'est pas forcément un ensemble dominant localisateur. Il suffit de considérer la chaîne P_6 où $V(P_6) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, l'ensemble $S = \{x_1, x_2, x_5\}$ est un ensemble dominant et un ensemble localisateur de P_6 mais d'après

la Définition 1.3, S n'est pas un ensemble dominant localisateur du fait que $f_1(x_4) = f_1(x_6) = (2, 2, 1)$.

La définition suivante est équivalente à la Définition 1.3 qui est plus utilisée étant donné que l'on peut facilement vérifier qu'un ensemble est un ensemble dominant localisateur ou pas.

Définition 1.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble S de V est dit ensemble dominant localisateur de G , noté EDL, si S est un ensemble dominant et de plus, pour toute paire de sommets u et v de $V - S$, les voisinages ouverts de u et v dans S sont distincts. Plus formellement, $\forall u, v \in V - S$, $N_G(u) \cap S \neq N_G(v) \cap S$. Le nombre de domination localisatrice inférieur (respectivement, nombre de domination localisatrice supérieur) d'un graphe G , noté $\gamma_L(G)$ (respectivement, $\Gamma_L(G)$), est le cardinal minimum (respectivement, maximum) d'un ensemble dominant localisateur (respectivement, dominant localisateur minimal) de G . Un EDL de G de cardinal minimum est dit $\gamma_L(G)$ -ensemble et un EDL minimal de G de cardinal maximum est dit $\Gamma_L(G)$ -ensemble de G .

La Figure 1.2 illustre un exemple d'une chaîne d'ordre 6 dont le nombre de domination localisatrice inférieur est égal à 3 et le nombre de domination localisatrice supérieur est égal à 4. Également, il est facile de voir que l'ensemble $S = \{x_2, x_3, x_5\}$ est un $\gamma_L(G)$ -ensemble et $S' = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$ est un $\Gamma_L(G)$ -ensemble de G .

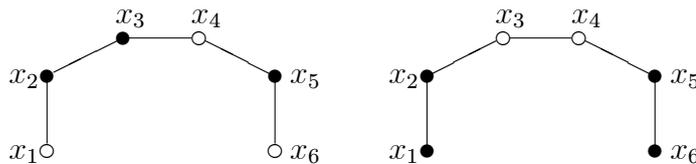


FIGURE 1.2. La chaîne P_6 telle que $\gamma_L(P_6) = 3$, et $\Gamma_L(P_6) = 4$.

D'autres variantes de la domination localisatrice ont été proposées dans la littérature, qui intègrent des critères additionnels à l'ensemble dominant ou à l'ensemble localisateur pour résoudre des problèmes pouvant être modélisés par ce concept. Voici quelques types de la domination localisatrice ainsi que des exemples d'applications de chacune d'elles:

- La condition rajoutée exige que l'ensemble dominant S soit un dominant total. La *domination localisatrice totale* a été introduite en 2006 par Haynes, Henning

et Howard [58]. Le nombre de domination localisatrice totale noté $\gamma_L^t(G)$ désigne la taille minimale d'un dominant localisateur total de G . Pour plus de détails, voir [20, 69, 70]. Les appareils de surveillance (détecteurs d'incendie, caméras, alarmes, ...) dans un bâtiment sont placés de telle sorte à ce que chaque emplacement (pièce, hall, etc...) du bâtiment (les appareils y compris) est adjacent à un autre muni d'un appareil. Au cas de panne ou de défaillance de l'un des appareils, l'appareil voisin suffira pour protéger la pièce. Donc, l'ensemble de ces appareils est un dominant localisateur total de G

- La condition rajoutée exige que l'ensemble dominant localisateur S vérifie que pour toute paire de sommets u et v de V , $N[u] \cap S \neq N[v] \cap S$, S ainsi défini est appelé ensemble identifiant ou code identifiant. La taille minimale d'un code identifiant de G est notée par $\gamma_D(G)$. La notion de *code identifiant* a été introduite en 1998 par Karpovsky, Chakrabarty et Levitin [75]. Le diagnostic d'une panne ou d'une défaillance dans les réseaux multiprocesseurs implique souvent la représentation du système par un graphe ce qui facilite l'analyse de l'état de chaque processeur ainsi que celui de ses voisins. Par exemple, le signal 0 indique la présence d'une panne sur un processeur x (sommets) ou sur un de ses voisins et 1 sinon. S'il y a au plus un processeur qui soit défectueux alors le problème à modéliser consiste à déterminer un ensemble X de processeurs qui après le test donne:

- Si au moins un des processeurs de X affiche le résultat 0, alors il y a un unique processeur défectueux dans le réseau identifiable par X .
- Si tous les processeurs affichent le résultat 1, alors cela indique le bon fonctionnement des multiprocesseurs.

De ce fait, l'ensemble X dont il est question est en réalité un code identifiant. Pour plus d'informations sur les codes identifiants on peut consulter par exemple les références [3, 76, 80, 86].

- La condition rajoutée sur l'ensemble dominant S est qu'il soit un dominant pair (couplé), c'est à dire le sous graphe induit par les sommets de S contient un couplage parfait. La *domination localisatrice paire* a été introduite en 2009 par

Henning et McCoy [64]. Le nombre de domination localisatrice paire noté $\gamma_{pr}^L(G)$ représente la taille minimale d'un dominant localisateur pair de G . Un autre problème consiste à assurer la sécurité d'un bâtiment par un groupe de gardiens représenté par un ensemble S , dans lequel chaque gardien est chargé de protéger son voisinage tout en étant jumelé avec un autre gardien sur le même site pour une protection mutuelle.

Il est clair que tout ensemble dominant localisateur avec une condition supplémentaire ϕ est un ensemble dominant localisateur. Ainsi, $\gamma_L(G) \leq \gamma_L^\phi(G)$.

1.4 Graphes μ -point-critiques

Un graphe G est dit *graphe critique* par rapport à un paramètre $\mu(G)$ si sa valeur est affecté sous l'effet d'une opération telle que la suppression d'un sommet ou d'une arête, l'ajout ou la contraction d'une arête. Cette opération peut entraîner soit une diminution soit une augmentation de $\mu(G)$. De plus, si G est un graphe critique avec $\mu(G) = k$, alors G est dit *k-critique*. Le cas où $\mu(G)$ ne change pas, alors G sera dit *stable*. Aussi, un sommet v d'un graphe G est dit *sommet critique* par rapport un paramètre μ si la valeur de μ change après la suppression du sommet v .

Dans notre thèse, nous nous focalisons sur l'effet de la contraction d'une arête sur le nombre de domination localisatrice.

Définition 1.5. *Soient u et v deux sommets adjacents dans un graphe G . La contraction de l'arête uv dans G consiste à supprimer les sommets u et v de G , à ajouter un nouveau sommet noté \bar{uv} à G , et à relier \bar{uv} aux voisins de u et de v dans G . La contraction de l'arête uv dans G donne un nouveau graphe noté G_{uv} .*

Dans la Figure 1.3, nous donnons une illustration d'un graphe G qui subit une modification sous l'effet de l'opération de contraction de l'arête v_3v_5 .

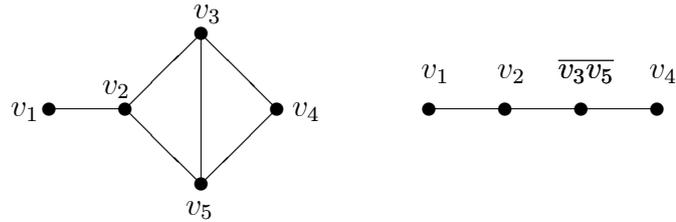


FIGURE 1.3. Graphe G et le graphe $G_{v_3v_5}$ obtenu par la contraction de l'arête v_3v_5

On définit un graphe G selon les types de criticité par rapport à un paramètre de domination μ sous l'effet des opérations citées ci-dessous comme suit:

1. G est μ^- -sommet-critique si $\mu(G - v) < \mu(G)$, pour tout sommet $v \in V(G)$.
2. G est μ^+ -sommet-critique si $\mu(G - v) > \mu(G)$, pour tout sommet $v \in V(G)$.
3. G est μ^- -arête supprimée-critique si $\mu(G - e) < \mu(G)$, pour toute arête $e \in E(G)$.
4. G est μ^+ -arête supprimée-critique si $\mu(G - e) > \mu(G)$, pour toute arête $e \in E(G)$.
5. G est μ^- -arête ajoutée-critique si $\mu(G + e) < \mu(G)$, pour toute arête $e \in E(\overline{G})$.
6. G est μ^+ -arête ajoutée-critique si $\mu(G + e) > \mu(G)$, pour toute arête $e \in E(\overline{G})$.
7. G est μ^- -point-critique si $\mu(G_e) < \mu(G)$, pour toute arête $e \in E(G)$.
8. G est μ^+ -point-critique si $\mu(G_e) > \mu(G)$, pour toute arête $e \in E(G)$.

L'identification de sommets u et v consiste soit en la contraction d'arête uv telle que u et v sont deux sommets adjacents ou soit en identifiant le sommet u au sommet v tel que u et v sont deux sommets non-adjacents, et dans ce cas nous obtenons un graphe semblable à celui obtenu après la contraction de l'arête uv .

L'importance de la criticité se révèle fondamentale pour de nombreux paramètres, ce qui a engendré un grand nombre de travaux de recherche sur la notion des graphes critiques, en explorant davantage les propriétés des graphes μ -critiques, ainsi que quelques-unes des caractérisations de ces derniers.

Cette notion a été introduite dans un premier temps en 1951 par Dirac [35], qui a traité à cette époque le nombre chromatique $\chi(G)$, sous l'effet de la suppression de

sommets. Ce n'est qu'en 1979, Walikar et Acharya l'ont introduite pour la domination, en donnant la caractérisation des graphes γ^+ -arête supprimée-critiques. Suivi en 1983 par Sumner et Blich [92], qui eux ont étudié les graphes γ^- -arête ajoutée-critiques. Brigham, Chinn et Dutton [13] en 1988 ont traités les graphes γ^+ -sommet-critiques. Pour plus de détails sur la notion des graphes γ -critiques, nous orientons le lecteur à consulter quelques articles [1, 12, 13, 17, 24, 47, 48, 52, 68, 85, 92].

La recherche sur les graphes critiques s'est étendue à d'autres variantes de la domination, comme la domination totale [22, 32, 33, 67, 68, 71, 84], le code identifiant [46], la domination paire [36, 38, 64, 66, 72], la domination double [7, 59, 73, 74, 93, 95] et la domination localisatrice [4, 20, 28, 29, 30, 78, 82].

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART SUR LA DOMINATION LOCALISATRICE

Dans ce chapitre, nous passons en revue quelques principaux travaux de recherche qui ont été effectués sur la domination localisatrice. Plus précisément, nous allons d'abord établir une synthèse des résultats relatifs aux nombres de domination localisatrice inférieur et supérieur. Ensuite, nous abordons le concept des graphes μ -critiques où $\mu \in \{\gamma, \gamma_L, \gamma_L^t\}$, qui sont des graphes pour lesquels la suppression d'un sommet ou d'une arête quelconque, l'ajout ou la contraction d'une arête quelconque entraîne un changement du paramètre μ . Dans ce sens, nous allons exposer les différents résultats obtenus sur les graphes γ -point-critiques et les graphes μ -sommet-critiques et μ -arête-critiques.

2.1 Nombre de domination localisatrice

Nous commençons par rappeler la définition du nombre de domination localisatrice inférieur et supérieur.

Définition 2.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe et S un sous-ensemble de V . On dit que S est un ensemble dominant localisateur de G , noté EDL, si S est un ensemble dominant et de plus, pour toute paire de sommets u et v de $V - S$, $N_G(u) \cap S \neq N_G(v) \cap S$. Le nombre de domination localisatrice inférieur (respectivement, supérieur) d'un graphe G , noté $\gamma_L(G)$ (respectivement, $\Gamma_L(G)$), est le cardinal minimum (respectivement, maximum) d'un ensemble dominant localisateur (respectivement, dominant localisateur minimal) de G . Un EDL de G de cardinal minimum est dit $\gamma_L(G)$ -ensemble et un EDL minimal de G de cardinal maximum est dit $\Gamma_L(G)$ -ensemble de G .

2.1.1 Nombre de domination localisatrice inférieur

Dans la suite, pour alléger on peut omettre le terme "inférieur".

Observation 2.2. *Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$, il existe un $\gamma_L(G)$ -ensemble qui contient l'ensemble des sommets supports $S(G)$, et pour tout sommet support v , chaque $\gamma_L(G)$ -ensemble contient au moins $|L_v|$ sommets de $\{v\} \cup L_v$.*

Dans [89, 90], Slater a déterminé les valeurs exactes du nombre de domination localisatrice pour certaines classes simples de graphes.

Théorème 2.3 (Slater [89, 90], 1988). *Pour tout graphe G on a,*

1. $\gamma_L(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$.
2. $\gamma_L(G) = n - 1$ si et seulement si $G = K_n$ où $G = K_{1,n-1}$.
3. Pour toute chaîne P_n et cycle C_n d'ordre n , on a,

$$\gamma_L(C_n) = \gamma_L(P_n) = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 5k \\ 2k + 1 & \text{si } n = 5k + 1 \text{ ou } 5k + 2 \\ 2k + 2 & \text{si } n = 5k + 3 \text{ ou } 5k + 4 \end{cases}$$

4. Si G_1, G_2, \dots, G_k sont les composantes connexes d'un graphe G , alors on a

$$\gamma_L(G) = \gamma_L(G_1) + \gamma_L(G_2) + \dots + \gamma_L(G_k).$$

5. Si $2 \leq p \leq q$, alors

$$\gamma_L(K_{p,q}) = p + q - 2.$$

6. Si $p = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ où $2 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$, alors on a

$$\gamma_L(K_{p_1, p_2, \dots, p_k}) = p - k.$$

Slater [90] a donné également une relation entre le nombre de domination localisatrice d'un graphe G et le degré maximum et l'ordre de G .

Théorème 2.4 (Slater [90], 1988). *Si pour un graphe G d'ordre n , $\gamma_L(G) = h$, alors*

$$n \leq h + 2^h - 1.$$

Théorème 2.5 (Slater [90], 1988). *Si pour un graphe G d'ordre n et de degré maximum Δ , $\gamma_L(G) = h$, alors*

$$n \leq h + \sum_{i=1}^{\Delta} \binom{h}{i}.$$

2.1.2 Bornes pour le nombre de domination localisatrice

Slater a montré [90] que tout arbre d'ordre n vérifie $\gamma_L(T) > \frac{n}{3}$.

Cette borne a été améliorée par Blidia et al. [10] comme suit.

Théorème 2.6 (Blidia et al. [10], 2007). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_L(T) \geq \frac{(n + l - s + 1)}{3}.$$

Cette borne est atteinte pour les arbres vérifiant $s = l$. Un exemple d'arbres atteignant cette borne est la chenille (l'arbre dont la suppression des sommets supports donne une chaîne) avec $l = s = k \geq 2$ où la distance entre deux sommets supports consécutifs de la chenille est deux (le plus petit arbre vérifiant cela est la chaîne P_5).

Les auteurs de [10] ont donné une caractérisation de la famille \mathcal{Q} des arbres T pour lesquels $\gamma_L(T) = \gamma(T)$. La famille \mathcal{Q} peut être obtenue à partir de la séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) telle que T_1 est une chaîne $P_2 = x-y$ et $T = T_k$. Si $k \geq 2$, alors T_{i+1} peut être obtenu à partir de T_i par une des trois opérations O_i définies ci-dessous. Soient $x \in S(T_i)$, et $y \in L(T_i)$.

- **Opération \mathcal{O}_1** : Ajouter à T_i une chaîne $P_2 = u-v$ en attachant par l'arête uz à un support z de T_i .
- **Opération \mathcal{O}_2** : Ajouter à T_i une étoile subdivisée $H = SS_p$, avec $p \geq 2$ centrée en a , en attachant par l'arête ab à un sommet quelconque b de T_i .
- **Opération \mathcal{O}_3** : Ajouter à T_i une chaîne $P_3 = u-v-w$ en attachant par l'arête uc à un sommet c appartenant à un $\gamma_L(T_i)$ -ensemble.

Théorème 2.7 (Blidia et al. [10], 2007). *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$. Alors $\gamma_L(T) = \gamma(T)$ si et seulement si $T \in \mathcal{Q}$.*

Blidia et al. [10] ont aussi trouvé une borne supérieure sur γ_L pour les arbres, et ont caractérisé la famille des arbres \mathcal{F} atteignant cette borne qui peut-être obtenue à

partir de la séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) telle que T_1 est une chaîne $P_3 = x-y-t$ ou une chaîne P_4 , $T = T_k$, et si $k \geq 2$ et $i < k$, alors T_{i+1} peut être obtenu à partir de T_i par une des cinq opérations définies ci-dessous. De plus, si $T_1 = P_3$, alors $D(T_1) = \{x, y\}$, et si $T_1 = P_4$, alors $D(T_1) = S(P_4)$.

- **Opération \mathcal{F}_1 :** Ajouter à T_i un sommet w en attachant par l'arête wx à un support x de T_i à w . Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{w\}$.
- **Opération \mathcal{F}_2 :** Ajouter à T_i une chaîne $P_2 = u-v$ en attachant par l'arête uz à un support z de T_i . Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{u\}$.
- **Opération \mathcal{F}_3 :** Ajouter à T_i une étoile subdivisée H d'ordre au moins 5 centrée en a , en attachant par l'arête ab' un sommet pendant b' d'un support fort de T_i . Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup S(H)$.
- **Opération \mathcal{F}_4 :** Ajouter à T_i une chaîne $P_3 = b-c-d$ et $p \geq 0$ chaînes $P_2 = u_i - v_i$ en attachant par les arêtes df et $u_i f$ pour chaque i , un sommet pendant f de $D(T_i)$ où f est un sommet pendant d'un support fort de T_i . Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{c, u_1, \dots, u_p\}$.
- **Opération \mathcal{F}_5 :** Ajouter à T_i une chaîne $P_4 = a-b-c-d$ et $p \geq 0$ chaînes $P_2 = u_i - v_i$ en attachant par les arêtes dy et $u_i d$ pour chaque i , un sommet y de T_i qui n'est pas un support et pour lequel $\gamma_L(T_i - y) = \gamma_L(T_i)$. Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{b, d, u_1, \dots, u_p\}$.

Théorème 2.8 (Blidia et al. [10], 2007). *Si T est un arbre d'ordre n , avec l sommets pendants et s sommets supports, alors*

$$\gamma_L(T) \leq \frac{(n + l - s)}{2},$$

avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.

Dans [19], Chellali, Mimouni et Slater ont étendu la borne supérieure du Théorème 2.8 aux graphes bipartis connexes sans C_4 .

Théorème 2.9 (Chellali, Mimouni et Slater [19], 2010). *Si G est un graphe biparti connexe, sans sommets isolés et sans cycles C_4 , alors*

$$\gamma_L(G) \leq \frac{n+l-s}{2} \leq \Gamma_L(G).$$

Les mêmes auteurs de [19] ont établi une borne supérieure pour le nombre de domination localisatrice dans la classe des unicycles. Aussi, nous donnons la borne inférieure obtenu par Mimouni et Chellali dans [79] qui est une extension de celle du Théorème 2.6.

Théorème 2.10 (Chellali, Mimouni et Slater [19], 2010). *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$, ayant au plus un cycle, alors*

$$\gamma_L(G) \leq (n+l-s+1)/2.$$

Théorème 2.11 (Mimouni [79], 2009). *Si $G = (V, E)$ est un unicycle connexe d'ordre n , alors*

$$\gamma_L(G) \geq \frac{(n+l-s+1)}{3}.$$

Les auteurs de [79] ont établi une borne supérieure sur le nombre de domination localisatrice pour les graphes cactus contenant n_0 cycles C_4 .

Théorème 2.12 (Mimouni [79], 2009). *Si G est un graphe cactus sans sommets isolés, alors*

$$\gamma_L(G) \leq \frac{n+l-s+n_0(G)}{2},$$

où $n_0(G)$ est le nombre de cycles C_4 .

Par conséquent, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 2.13 (Mimouni [79], 2009). *Si G est un unicycle connexe ne contenant pas de cycles C_4 , alors*

$$\gamma_L(G) \leq \frac{n+l-s}{2}.$$

Deux sommets distincts u et v dans un graphe G sont dits *vrais jumeaux* (respectivement, *faux jumeaux*) si $N[u] = N[v]$ (respectivement, $N(u) = N(v)$).

Dans [49], Garijo et al. ont conjecturé que l'absence de sommets jumeaux dans un graphe G , implique que $\gamma_L(G) \leq \frac{n}{2}$. Autrement dit, le résultat classique d'Ore [81] qui stipule que tout graphe sans sommets isolés possède un ensemble dominant de cardinal au plus la moitié de son ordre, reste vrai pour le nombre de domination localisatrice. Ces auteurs ont aussi montré le résultat suivant.

Proposition 2.14 (Garijo et al. [49], 2014). *Si G est un graphe sans jumeaux et sans sommets isolés, alors tout transversal de G est un ensemble dominant localisateur de G .*

Motivés par les travaux de Garijo et al., Foucaud et al. [45], ont prouvé les résultats suivants.

Théorème 2.15 (Foucaud et al. [45], 2016). *Si G est un graphe sans jumeaux d'ordre n , alors*

$$\gamma_L(G) \leq \frac{2n}{3}.$$

Soit \mathcal{N} la famille d'arbres T possédant un couplage parfait M dont chaque arête de M a une extrémité de couleur blanche et l'autre extrémité de couleur noire et chaque sommet de couleur blanche est soit une feuille ou bien il est de degré deux et possède un voisin de couleur noire qui est lui même voisin d'une feuille de couleur blanche. (voir Figure 2.1)

Il est à noter qu'un arbre T ayant l feuilles et s supports est sans faux jumeaux signifie que $l = s$.

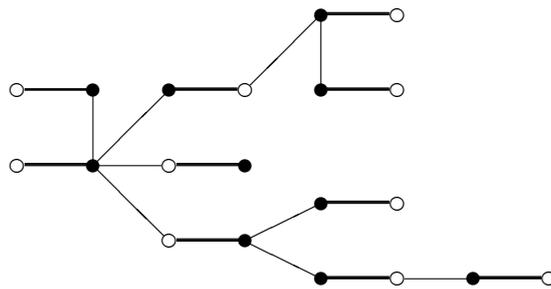


FIGURE 2.1. Arbre T tel que $\gamma_L(T) = \frac{n}{2}$.

Théorème 2.16 (Foucaud et al. [45], 2016). *Soit T un arbre d'ordre n , sans faux jumeaux. On a*

$$\gamma_L(T) = \frac{n}{2} \text{ si et seulement si } T \in \mathcal{N}.$$

Un graphe *scindé* est un graphe dont l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en une clique et un stable. Un graphe *co-biparti* est un graphe dont l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux cliques. Un graphe *représentatif des arêtes* (ou *adjoint*) d'un graphe G , est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des arêtes de G , et deux sommets de ce graphe sont adjacents si les deux arêtes qui leur correspondent dans G sont adjacentes.

Théorème 2.17 ([44, 45, 49, 63]). *Si G est un graphe sans jumeaux d'ordre n satisfaisant une des propriétés citées ci-dessous, alors $\gamma_L(G) \leq \frac{n}{2}$.*

1. [49] G ne contient pas de cycle C_4 .
2. [49] $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$.
3. [49] $\omega(G) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.
4. [49] $\Gamma(G) \geq \frac{n}{2}$ ou $\Gamma(\overline{G}) \geq \frac{n}{2} + 1$.
5. [49] $\chi(G) \geq \frac{3n}{4}$ ou $\chi(\overline{G}) \geq \frac{3n}{4} + 1$.
6. [45] G est un graphe scindé ou un graphe co-biparti.
7. [44] G est l'adjoint d'un graphe.
8. [63] G est un graphe cubique.

2.1.3 Relation entre γ_L , et les paramètres β_0 , γ_2 et ρ

Définition 2.18 (Blidia et al. [9]). *Un arbre T est une pseudocouronne si son noyau $C(T) = V(T) \setminus S(T) \cup L(T)$ est vide.*

D'autres travaux concernant la relation entre le nombre de domination localisatrice et le nombre de stabilité ont été fournis dans [9, 19].

Théorème 2.19 (Blidia et al. [9], 2007). *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$ on a,*

$$\beta_0(T) + \gamma_L(T) \leq n + l(T) - s(T).$$

La borne est atteinte pour la famille \mathcal{J} des pseudocouronnes des arbres.

Proposition 2.20 (Chellali, Mimouni et Slater [19], 2010). *Si G est un graphe bloc avec $\delta \geq 2$, alors*

$$\gamma_L(G) + \beta_0(G) \leq n,$$

cette borne est atteinte pour le graphe G_k formé à partir de k triangles partageant le même sommet.

Dans [19], les auteurs ont montré le résultat suivant.

Théorème 2.21 (Chellali, Mimouni et Slater [19], 2010). *Si G est un graphe avec $g(G) \geq 5$, alors tout ensemble indépendant maximum S de G est un dominant localisateur minimal de G . De plus, si $\delta(G) \geq 2$, alors $V - S$ est un dominant localisateur.*

Du Théorème 2.21 découle les deux corollaires suivants.

Corollaire 2.22 (Chellali, Mimouni et Slater [19], 2010). *Si G est un graphe avec $g(G) \geq 5$, alors*

$$\gamma_L(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma_L(G).$$

Corollaire 2.23 (Chellali, Mimouni et Slater [19], 2010). *Si G est un graphe d'ordre n , avec $\delta \geq 2$ et $g(G) \geq 5$, alors*

$$\gamma_L(G) \leq \frac{n}{2}.$$

Dans [5, 6], Blidia et al. ont présenté deux résultats qui établissent une relation entre γ_L , β_0 et γ_2 dans la classe des arbres.

Théorème 2.24 (Blidia, Chellali, et Favaron, [5], 2005). *Pour tout arbre T , on a*

$$\gamma_2(T) \geq \beta_0(T).$$

Blidia et al. [6] ont donné une borne inférieure du nombre de stabilité pour tout graphe G biparti connexe d'ordre n , avec l sommets pendants et s sommets supports, cette borne est celle du Théorème 2.8.

Un corollaire immédiat de ce théorème.

Corollaire 2.25 (Blidia et al. [9], 2007). *Pour tout arbre T , on a*

$$\gamma_L(T) \leq \frac{n+l-s}{2} \leq \beta_0(T) \leq \gamma_2(T).$$

Un ensemble $X \subseteq V(G)$ est dit *2-stable* dans un graphe G si pour deux sommets quelconques x et y de X on a $N[x] \cap N[y] = \emptyset$. Le cardinal maximum d'un ensemble *2-stable* de G , noté $\rho(G)$, est appelé *le nombre de 2-stabilité*.

Dans [19], Chellali et al. ont montré que $\gamma_L(G)$ est borné supérieurement par $n - \rho(G)$.

Proposition 2.26 (Chellali, Mimouni et Slater [19], 2010). *Pour tout graphe connexe non trivial G , on a $\gamma_L(G) \leq n - \rho(G)$.*

Un graphe est dit *triangulé* [50, 83], si tout cycle de longueur au moins quatre admet une corde. Un graphe est dit *fortement triangulé* si tous ses cycles pairs de longueur au moins six ont une corde reliant deux sommets à distance impaire dans le cycle.

Dans [40], Farber a prouvé également que le nombre de domination et le nombre de 2-stabilité sont égaux pour tout graphe fortement triangulé, incluant ainsi la classe des arbres. Le corollaire suivant est une conséquence directe de la Proposition 2.26.

Corollaire 2.27 (Chellali et al. [19], 2010). *Pour tout arbre non trivial T , on a*

$$\gamma_L(T) + \gamma(T) \leq n.$$

La borne est atteinte si et seulement si T est un arbre d'ordre $l + s$.

Blidia et al. ont prouvé dans [9] que $\gamma_2(T) \geq \gamma_L(T)$ pour tout arbre T . Ensuite, Chellali et al. [19] ont montré que cette inégalité reste valide même pour les graphes de maille au moins cinq.

Théorème 2.28 (Chellali et al. [19], 2010). *Si G est un graphe connexe, avec $g(G) \geq 5$, alors*

$$\gamma_L(G) \leq \gamma_2(G).$$

Les mêmes auteurs de [19] ont montré que le nombre de domination localisatrice et le nombre de domination stable sont en général incomparables. La comparaison entre

ces deux paramètres a été posée en premier lieu par Slater [88]. Notons que pour les graphes sans griffes, la relation $i(G) \leq \gamma_L(G)$ est vérifiée puisque $i(G) = \gamma_L(G)$. De plus, il existe d'autres graphes qui satisfont l'inégalité $i(G) \leq \gamma_L(G)$, comme par exemple pour les deux graphes K_n et $K_{n,n}$. On a $i(K_n) = 1 < n - 1 = \gamma_L(K_n)$, pour $n \geq 2$. De même, $i(K_{n,n}) = n < 2n - 2 = \gamma_L(K_{n,n})$, pour $n \geq 3$. Dans la Figure 2.2, il est clair que $S = \{a\}$ est un $i(K_5)$ -ensemble et $D = \{a, b, c, d\}$ est un $\gamma_L(K_5)$ -ensemble, d'où $i(K_5) = 1 < 4 = \gamma_L(K_5)$.

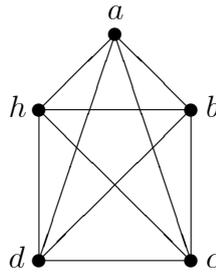


FIGURE 2.2. Le graphe K_5 où $i(K_5) < \gamma_L(K_5)$.

D'autre part, soient G_j un graphe avec $|V(G_j)| = j + 2^j - 1$ et $X = \{v_1, v_2, \dots, v_j\}$ tel que $v_r v_t \in E(G_j)$, pour $1 \leq r \leq t \leq j$. Chacun des $2^j - 1$ sous-ensembles non vide W de X , ajouter un sommet w à $V(G_j)$, avec $N(w) = W$. L'unique ensemble indépendant maximal U vérifiant $U \cap X = \emptyset$ est $U = V(G_j) - X$ de cardinalité $2^j - 1$. Un ensemble indépendant maximal contenant exactement un sommet de X est de cardinalité 2^{j-1} . Ainsi, $\gamma_L(G_j) = j < 2^{j-1} = i(G_j)$, pour $j \geq 3$. Considérons le graphe G_3 de la Figure 2.3, pour $j = 3$, on a $X = \{v_1, v_2, v_3\}$. Il est facile de voir que X est un $\gamma_L(G_3)$ -ensemble, $U = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\}$, et l'ensemble indépendant maximal Y contenant un seul sommet v_1 de X est $\{v_1, w_3, w_4, w_5\}$, où $|Y| = i(G_3) + 4 > 3 = \gamma_L(G_3)$.

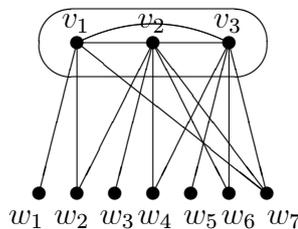


FIGURE 2.3. Un graphe G_3 tel que $i(G_3) > \gamma_L(G_3)$.

Cependant, ces deux paramètres sont comparables dans les cas des arbres et les unicycles connexes

Théorème 2.29 (Chellali, Mimouni et Slater [19], 2010). *Si T est un arbre, alors*

$$\gamma_L(T) \geq i(T).$$

Théorème 2.30 (Mimouni [79], 2009). *Si $G = (V, E)$ est un unicycle connexe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$i(G) \leq \gamma_L(G).$$

En se basant sur le Corollaire 2.22 et le Théorème 2.29, les auteurs de [19] ont réussi à établir une série d'inégalités reliant les paramètres de domination localisatrice et ceux de la stabilité pour tout arbre T .

$$i(T) \leq \gamma_L(T) \leq \beta_0(T) \leq \Gamma_L(T).$$

2.1.4 Nombre de domination localisatrice supérieur

La plupart des travaux de recherche sur la domination localisatrice se sont largement concentrés sur le nombre de domination localisatrice, contrairement au nombre de domination localisatrice supérieur qui fait l'objet d'une très maigre littérature. Ceci pourrait être due à la difficulté liée à la minimalité de l'ensemble dominant localisateur. Ce paramètre a été introduit dans le cadre de notre travail de Magister qui a abouti en 2010 à la publication d'un article [19] en collaboration avec Slater dans le journal *Discussiones Mathematicae*. Dans la suite de cette section, nous allons présenter les quelques travaux que nous avons réalisés en Magister concernant ce paramètre. Le premier résultat donne la valeur exacte du nombre de domination localisatrice supérieur d'une chaîne d'ordre n .

Théorème 2.31 (Chellali, Mimouni et Slater [19], 2010). *Pour toute chaîne P_n , on a*

$$\Gamma_L(P_n) = \begin{cases} 4k & \text{si } n = 7k \\ 4k + 1 & \text{si } n = 7k + 1 \text{ ou } n = 7k + 2 \\ 4k + 2 & \text{si } n = 7k + 3 \text{ ou } n = 7k + 4 \\ 4k + 3 & \text{si } n = 7k + 5 \\ 4k + 4 & \text{si } n = 7k + 6 \end{cases}$$

Les mêmes auteurs ont présenté une borne supérieure pour le nombre de domination localisatrice supérieur d'un graphe non trivial connexe, ensuite ils ont caractérisé les

graphes extrémaux atteignant cette borne.

Théorème 2.32 (Chellali et Mimouni [19], 2010). *Tout graphe non trivial connexe G d'ordre n satisfait $\Gamma_L(G) \leq n - 1$. La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet ou bien une étoile.*

Ils ont également proposé une borne supérieure pour Γ_L d'un arbre T , en fonction de l'ordre et du nombre de feuilles de T , pour le nombre de domination localisatrice supérieur.

Théorème 2.33 (Chellali et Mimouni [19], 2010). *Si T est un arbre non trivial d'ordre n , avec l feuilles, alors*

$$\Gamma_L(T) \leq \frac{2n + l - 2}{3}.$$

D'après le Corollaire 2.22, $\Gamma_L(T) \geq \beta_0(T)$. En effet, la différence $\Gamma_L(G) - \beta_0(G)$ peut-être arbitrairement large même quand il s'agit d'une structure simple comme les arbres. Pour illustrer celà, considérons un arbre T_t (Figure 2.4) obtenu à partir de $t \geq 1$ copies d'une chaîne P_6 tel que la première chaîne P_6 est notée $P_{6,1} = x_{1,1}-x_{2,1}-\dots-x_{6,1}$ et la t -ième chaîne P_6 est notée $P_{6,t} = x_{1,t}-x_{2,t}-\dots-x_{6,t}$ où $x_{4,i-1}x_{3,i} \in E(T_t)$, pour $2 \leq i \leq t$. Il est facile de voir que l'ensemble des supports ainsi l'ensemble des feuilles forment un $\Gamma_L(T_t)$ -ensemble de cardinalité $4t$, tandis que $\beta_0(T_t) = 3t$.

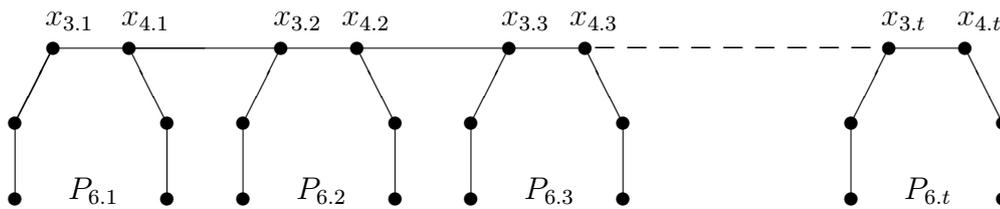


FIGURE 2.4. L'arbre T_t

Dans [96], Zahao et al. ont eux aussi donné une valeur exacte du nombre de domination localisatrice supérieur pour les cycles d'ordre n .

Théorème 2.34 (Zahao et al. [96], 2011). *Si G est un cycle d'ordre n , alors*

$$\Gamma_L(G) = \begin{cases} 4k & \text{si } n = 7k \text{ ou } 7k + 1 \\ 4k + 1 & \text{si } n = 7k + 2 \text{ ou } 7k + 3 \\ 4k + 2 & \text{si } n = 7k + 4 \text{ ou } 7k + 5 \\ 4k + 3 & \text{si } n = 7k + 6 \end{cases}$$

2.2 Graphes critiques

2.2.1 Graphes γ -point-critiques

Nous débutons cette section en rappelant la définition d'un graphe γ -point-critique.

Définition 2.35. *Un graphe G est dit γ -point-critique si $\gamma(G_{uv}) < \gamma(G)$, pour toute arête uv dans G .*

En 2006, Burton et Sumner [15] ont initié l'étude des graphes γ -point-critiques. Dans cette section, nous allons présenter leurs premiers résultats sur ce sujet. En commençant d'abord par donner les deux définitions suivantes.

Définition 2.36. *G est un graphe k - γ -point-critique si $\gamma(G) = k$ et $\gamma(G_{uv}) = k - 1$, pour toute arête $e = uv$ dans G , avec u et v deux sommets adjacents dans G .*

Les auteurs de [15] ont défini les graphes totalement k - γ -point-critique comme étant ceux dont le nombre de domination diminue sous l'effet de l'identification de quelques sommets u et v de ces graphes.

Définition 2.37. *Un graphe G est totalement k - γ -point-critique si $\gamma(G) = k$ et $\gamma(G_{uv}) = k - 1$, pour tous sommets u et v dans G .*

Burton et Sumner [15] ont noté que si un graphe G est totalement γ -point-critique, alors il est γ -point-critique.

Proposition 2.38 (Burton et Sumner [15]). *Si G est un graphe ayant $\gamma(G) = k \geq 2$, alors G est γ -point-critique (respectivement, totalement γ -point-critique) si et seulement si tout couple de sommets adjacents non critiques appartient au même $\gamma(G)$ -ensemble.*

Les caractérisations des graphes 2- γ -point-critiques, totalement 2- γ -point-critiques et 3- γ -point-critiques respectivement ont été données par ces mêmes auteurs.

Théorème 2.39 (Burton et Sumner [15], 2006). *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 4$. Alors G est un graphe 2- γ -point-critique si et seulement si \overline{G} n'est pas un graphe complet et toute composante connexe de \overline{G} est soit un graphe complet K_m ($m \geq 2$) ou bien une couronne d'un graphe connexe.*

Théorème 2.40 (Burton et Sumner [15]). *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$. Alors G est totalement 2 - γ -point-critique si et seulement si toute composante de \overline{G} est une couronne d'un graphe connexe.*

Théorème 2.41 (Burton et Sumner [15]). *Un graphe connexe 3 - γ -point-critique sans sommets critiques possède un diamètre au plus égal à deux.*

Chengye et al. ont donné dans [24] une réponse positive au problème ouvert posé par Burton et Sumner dans [15] sur l'existence d'un graphe totalement k - γ -point-critique sans sommets critiques, pour tout entier $k \geq 4$.

Théorème 2.42 (Chengye et al [24], 2008). *Il existe un graphe totalement k - γ -point-critique, sans sommets critiques, pour tout entier $k \geq 4$.*

Ils ont aussi prouvé qu'un graphe 4 - γ -point-critique connexe sans sommets critiques possède un diamètre au plus égal à cinq.

Théorème 2.43 (Chengye et al [24], 2008). *Un graphe connexe 4 - γ -point-critique sans sommets critiques possède un diamètre au plus égal à cinq.*

Comme conséquence du Théorème 2.43 on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.44 (Chengye et al [24], 2008). *Un graphe connexe totalement 4 - γ -point-critique sans sommets critiques possède un diamètre au plus égal à cinq.*

2.2.2 Graphes μ -critiques avec $\mu \in \{\gamma_L, \gamma_L^t\}$

Les premières études sur les graphes critiques pour la domination localisatrice et la domination localisatrice totale ont été menées en 2009 par Chellali et Rad [20, 82]. Leurs recherches ont porté sur les effets de la suppression d'un sommet ou d'une arête sur les paramètres γ_L et γ_L^t d'un graphe G . Par la suite, Blidia et Dali [28, 30] ont élargi ces recherches en examinant les effets de l'ajout et la suppression d'une arête sur ces mêmes paramètres.

2.2.3 Graphes arête-critiques

Afin d'alléger les notations μ -arête supprimée-critique et μ -arête ajoutée-critique où $\mu \in \{\gamma_L, \gamma_L^t\}$, nous utilisons au lieu de cela les termes μ -as-critique et μ -aa-critique. Les premiers résultats sur les graphes γ_L^t -as-critiques sont dus à Chellali et Rad [20].

Définition 2.45. *Un graphe G est dit γ_L^t -as-critique, si pour toute arête non-pendante e , $\gamma_L^t(G - e) < \gamma_L^t(G)$.*

Théorème 2.46 (Chellali et Rad [20], 2009). *Pour toute arête non pendante e dans G , $\gamma_L^t(G) - 1 \leq \gamma_L^t(G - e) \leq \gamma_L^t(G) + 2$.*

Théorème 2.47 (Chellali et Rad [20]). *Toute arête non pendante dans un graphe γ_L^t -as-critique appartient à un C_4 non nécessairement induit.*

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 2.47.

Corollaire 2.48 ([20]). *Un arbre T est γ_L^t -as-critique si et seulement si T est une étoile.*

Théorème 2.49 (Chellali et Rad [20]). *Les unicycles ne sont pas des graphes γ_L^t -as-critiques.*

Le résultat suivant donne une caractérisation des graphes $3\text{-}\gamma_L^t$ -as-critiques.

Théorème 2.50 (Chellali et Rad [20]). *Un graphe G est $3\text{-}\gamma_L^t$ -as-critique si et seulement si $G \in \{K_4, K_{1,3}\}$.*

Ils ont également fourni le résultat suivant.

Théorème 2.51 (Chellali et Rad [20]). *Soit G (respectivement, H) un graphe $k\text{-}\gamma_L^t$ -as-critique (respectivement, $k'\text{-}\gamma_L^t$ -as-critique). Soit F un graphe formé en identifiant une arête non pendante de G avec une arête non pendante de H . Si $\gamma_L^t(F) = k + k' - 1$, alors F est un graphe γ_L^t -as-critique.*

Dans [28], Blidia et Dali ont montré que si l'on supprime une arête quelconque d'un graphe γ_L -as-critique, alors le nombre de domination localisatrice augmente d'une unité.

Proposition 2.52 (Blidia et Dali [28]). *Si G est un graphe γ_L^+ -as-critique, alors pour toute arête e de G , $\gamma_L(G - e) = \gamma_L(G) + 1$.*

Par la suite, ils ont caractérisé les graphes G qui sont γ_L^+ -as-critiques.

Soit $G = (X \cup Y, E)$ un graphe biparti connexe tel que pour tout sommet w dans Y et pour tout sous ensemble non vide $X' \subseteq N(w)$, il existe un unique sommet $w' \in Y$ tel que $N(w') = X'$.

Soit \mathcal{G} l'ensemble de tous les graphes définis ci-dessus. La Figure 2.5 représente un graphe de \mathcal{G} .

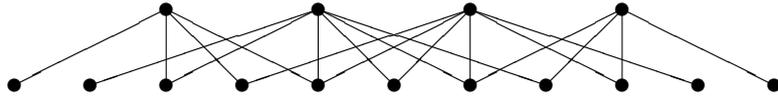


FIGURE 2.5. Un graphe de \mathcal{G} .

Théorème 2.53 (Blidia et Dali [28]). *Un graphe connexe non-trivial $G = (V, E)$ est γ_L^+ -as-critique si et seulement si $G \in \mathcal{H}$.*

Ces auteurs ont prouvé dans [29] le résultat suivant concernant les graphes γ_L^{t+} -as-critiques.

Rappelons qu'une *galaxie* est une forêt où chaque composante est une étoile.

Soit $H = (V, E)$ un graphe connexe satisfaisant les propriétés suivantes:

1. $V = X \cup Y$.
2. $G[X]$ est une galaxie et Y est un stable.
3. Pour tout $y \in Y$ et pour tout sous ensemble non vide $X' \subseteq N(y)$, il existe un unique $y' \in Y$ tel que $N(y') = X'$.
4. Si $H \neq P_2$, alors tout sommet support x dans X vérifie $N(x) \cap Y \neq \emptyset$.

Soit \mathcal{H} la famille de tous les graphes H définie ci-dessus.

Théorème 2.54 (Blidia et Dali [29], 2011). *Un graphe connexe non-trivial G est γ_L^{t+} -as-critique si et seulement si $G \in \mathcal{H}$.*

Ces mêmes auteurs [30] ont obtenu des résultats sur les graphes γ_L^+ -aa-critiques.

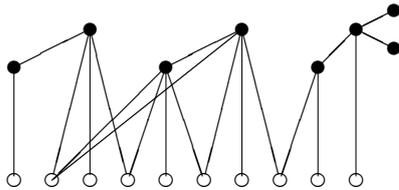


FIGURE 2.6. Un graphe de \mathcal{H} , les sommets en noir représentent l'ensemble X et en blanc l'ensemble Y .

Proposition 2.55 (Blidia et Dali [30], 2014). *Soit $G = (V, E)$ un graphe γ_L^+ -aa-critique et S un $\gamma_L(G)$ -ensemble. Alors les sous graphes induits par S et $V - S$ sont des cliques.*

Proposition 2.56 (Blidia et Dali [30]). *Si G est un graphe γ_L^+ -aa-critique alors $\delta(G) \geq 2$ et $\text{diam}(G) \leq 2$.*

Un corollaire immédiat des propositions précédentes est le suivant.

Corollaire 2.57 (Blidia et Dali [30]). *Il n'existe aucun arbre γ_L^+ -aa-critique.*

Dans [30], ils ont défini la famille de graphes \mathcal{K} pour caractériser les graphes γ_L^+ -aa-critiques.

Soit $G = (V, E)$ dont l'ensemble de ses sommets peut-être partitionné en deux cliques disjointes K' et K'' tel que pour tout sommet $v \in K''$ satisfait:

- $N_G(v) \cap K' \neq \emptyset$.
- Pour tout sommet $w \in K''$ ($w \neq v$), $N_G(w) \neq N_G(v)$.
- Pour tout sommet $u \in K'$ non adjacent à v , il existe un unique sommet $w \in K''$ tel que $N_G(w) = N_G(v) \cup \{u\}$.
- K' est un dominant localisateur de G et K'' contient un unique sommet universel.

Théorème 2.58 (Blidia et Dali [30]). *G est un graphe γ_L^+ -aa-critique si et seulement si $G \in \mathcal{K}$.*

2.2.4 Graphes sommet-critiques

Dans [20], Chellali et Rad ont montré que la suppression d'un sommet v d'un graphe G tel que $G - v$ ne contient pas de sommets isolés peut réduire le nombre de domination localisatrice total de G d'au plus un.

Définition 2.59. *Si $v \in S(G)$, alors v appartient à tout $\gamma_L^t(G)$ -ensemble, et de plus, tout $\gamma_L^t(G)$ -ensemble contient toutes les feuilles de v ou bien toutes les feuilles de v sauf une.*

Théorème 2.60 (Chellali et Rad [20], 2009). *Si G' est le graphe obtenu à partir de G en supprimant un sommet $x \in V - S(G)$, alors $\gamma_L^t(G) - 1 \leq \gamma_L^t(G')$.*

Ils ont aussi présenté quelques classes simples des graphes γ_L^t -sommet-critiques. En particulier, il ont caractérisé les graphes 3 - γ_L^t -sommet-critiques et les arbres γ_L^t -sommet-critiques.

Proposition 2.61 (Chellali et Rad [20], 2009). *Soient P_n , K_n , C_n et $K_{m,n}$, respectivement, chaîne, graphe complet, cycle et graphe biparti complet. Alors,*

1. *si P_n est une chaîne d'ordre au moins trois, alors P_n n'est pas γ_L^t -sommet-critique.*
2. *K_n est un graphe γ_L^t -sommet-critique si et seulement si $n \geq 4$.*
3. *C_n est un graphe γ_L^t -sommet-critique si et seulement si $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$.*
4. *$K_{m,n}$ est un graphe γ_L^t -sommet-critique si et seulement si ou bien $\min(m, n) \geq 3$ ou bien $\min(m, n) = 1$ et $\max(m, n) \geq 3$.*
5. *G est 3 - γ_L^t -sommet-critique si et seulement si $G \in \{K_4, K_{1,3}, cor(C_3)\}$.*

Soit \mathcal{J} la famille des arbres T où tout sommet de T est soit une feuille soit un support, et tout sommet support est de degré au moins trois.

Théorème 2.62 (Chellali et Rad [20]). *Un arbre T est γ_L^t -sommet-critique si et seulement si $G \in \mathcal{J}$.*

2.2.5 Quelques résultats sur les graphes γ_L -point-critiques

Dans cette section, nous allons exposer quelques résultats obtenus en 2018 par Blidia et Chellali dans leur article [4] qu'ils ont dédié à la mémoire de l'initiateur et le pionnier de la domination localisatrice le professeur P. Slater décédé en 2016. Cet article porte sur l'étude des graphes critiques pour le nombre de la domination localisatrice sous l'effet de la contraction d'arêtes.

Blidia et Chellali [4] ont montré que la contraction d'une arête peut diminuer le nombre de domination localisatrice par au plus deux par contre elle peut l'augmenter de manière significative.

Proposition 2.63 (Blidia et Chellali [4], 2018). *Pour tout graphe non-trivial G et toute arête $e \in E(G)$, on a $\gamma_L(G) - 2 \leq \gamma_L(G_e) \leq 2^{\gamma_L(G)-1} + \gamma_L(G) - 1$.*

Notons que chacune des bornes de la Proposition 2.63 est atteinte. Pour la borne inférieure, on peut considérer le graphe $K_{3,3}$ où $\gamma_L(K_{3,3}) = 4$ et $\gamma_L((K_{3,3})_e) = 2$, pour toute arête $e \in E(K_{3,3})$. Quant à la borne supérieure, prenons le graphe G de la Figure ?? où $\gamma_L(G) = 3$ et $\gamma_L(G_e) = 6 = 2^{\gamma_L(G)-1} + \gamma_L(G) - 1$.

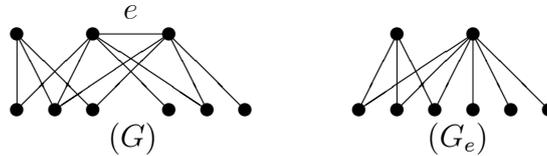


FIGURE 2.7. Graphe G avec $\gamma_L(G) = 3$ et $\gamma_L(G_e) = 6 = 2^{\gamma_L(G)-1} + \gamma_L(G) - 1$.

Dans [4], ils ont donné les définitions des graphes γ_L -point-critiques.

Définition 2.64. *Un graphe G est dit γ_L^- -point-critique (respectivement, γ_L^+ -point-critique) si $\gamma_L(G_{uv}) < \gamma_L(G)$ (respectivement, $\gamma_L(G_{uv}) > \gamma_L(G)$) pour toute arête uv dans G .*

Définition 2.65. *Si G est un graphe γ_L^- -point-critique (respectivement, γ_L^+ -point-critique) avec $\gamma_L(G) = k$, alors G est appelé graphe $k-\gamma_L^-$ -point-critique (respectivement, $k-\gamma_L^+$ -point-critique).*

Dans la suite de cette section, s'il n'y a pas de confusion, nous adopterons la notation γ_L -point-critique (respectivement, $k-\gamma_L$ -point-critique) au lieu de γ_L^- -point-critique (respectivement, $k-\gamma_L^-$ -point-critique).

Ils ont aussi prouvé qu'aucun graphe n'est γ_L^+ -point-critique.

Théorème 2.66 (Blidia et Chellali [4], 2018). *Aucun graphe n'est γ_L^+ -point-critique.*

Les auteurs de [4] ont étudié l'effet de la contraction d'arêtes sur les chaînes et les cycles.

Proposition 2.67 ([4]). *Si G est une chaîne non-triviale P_n ou un cycle C_n d'ordre n , alors G est γ_L -point-critique si et seulement si $n \equiv 1$ ou $3 \pmod{5}$.*

Ils ont aussi établi quelques propriétés des graphes γ_L -point-critiques dans ce qui suit.

Proposition 2.68 ([4]). *Si G est un graphe γ_L -point-critique, alors G ne contient pas deux sommets supports adjacents.*

Proposition 2.69 ([4]). *Si G est un graphe γ_L -point-critique avec $g(G) \geq 5$, alors tout sommet de G appartient à un $\gamma_L(G)$ -ensemble. De plus, $\gamma_L(G) = \gamma_L(G_e) + 1$, pour toute arête $e \in E(G)$.*

Ils ont remarqué que la Proposition 2.69 n'est pas vraie pour tout graphe G . En effet, si $G = K_{3,3}$, alors $\gamma_L(K_{3,3}) = 4 = \gamma_L((K_{3,3})_e) + 2$ pour toute arête $e \in E(K_{3,3})$.

Proposition 2.70 ([4]). *Pour tout arbre non-trivial T et tout sommet x de T , on a*

$$\gamma_L(T) - 1 \leq \gamma_L(T - x).$$

De plus, si T est un arbre γ_L -point-critique, alors pour toute feuille x de T ,

$$\gamma_L(T - x) = \gamma_L(T) - 1.$$

Voici quelques définitions introduites dans [4].

Définition 2.71. *Soit $G = (V, E)$, $S \subseteq V$, $v \in S$ et $w \in V - S$. Si $N(w) \cap S = \{v\}$, alors w est dit S -voisin-privé externe de v . On note par $epn(v, S)$ l'ensemble de tous les S -voisins-privés externes de v dans $V - S$.*

Définition 2.72. *Soit S un $\gamma_L(G)$ -ensemble, $A = \{v \in S : epn(v, S) = \emptyset\}$ et $B = S - A$. On dit qu'un sommet x est de Type-A (respectivement, Type-B) si x est dans A (respectivement, dans B).*

Définition 2.73. *Un sommet x appartient à une chaîne pendante de longueur $k \geq 2$ si $G - x$ a une composante qui est une chaîne P d'ordre k et P est attachée à un sommet x de G par une de ses feuilles.*

Blidia et Chellali ont donné dans [4] une caractérisation constructive de la famille d'arbres \mathcal{F} qui sont γ_L -point-critiques obtenue à partir de la séquence d'arbres T_1, T_2, \dots ,

T_p ($p \geq 1$) telle que $T_1 = P_3$ ou P_6 , et $T = T_p$. Si $p \geq 2$, alors T_{i+1} est obtenu à partir de T_i par une des sept opérations citées ci-dessous.

O_1 : Ajouter à T_i un sommet w attaché par une arête wx à un support x de T_i .

O_2 : Ajouter à T_i une étoile subdivisée R_t d'ordre $2t + 1 \geq 5$ de centre a attaché par une arête az à un sommet z de T_i , tel que z est un sommet de Type-A dans un $\gamma_L(T_i)$ -ensemble et qui est adjacent à un sommet de Type-B.

O_3 : Ajouter p ($p \geq 1$) copies de chaînes P_2 à T_i en attachant une feuille de chaque chaîne P_2 à un sommet $z \in T_i$ tel que $d_{T_i}(z) = 2$ et z appartient à une chaîne pendante de longueur 3.

O_4 : Ajouter à T_i une chaîne P_4 en attachant une de ses feuilles à un sommet $z \in T_i$ tel que $d_{T_i}(z) \geq 3$ et $\gamma_L(T_i - z) \geq \gamma_L(T_i)$.

O_5 : Ajouter à T_i une chaîne P_4 en attachant une de ses feuilles à un sommet $z \in T_i$ tel que $d_{T_i}(z) = 2$ et z est soit un support ou bien il appartient à une chaîne pendante de longueur 3 ou 4.

O_6 : Ajouter à T_i une chaîne P_5 en attachant une de ses feuilles à un sommet $z \in T_i$ tel que $\gamma_L(T_i - z) = \gamma_L(T_i) - 1$.

O_7 : Ajouter à T_i une chaîne $P_7 = u_1-u_2-\dots-u_7$ en attachant u_5 à un sommet $z \in T_i$ tel que z est de Type-A appartenant à un $\gamma_L(T_i)$ -ensemble et qui est adjacent à un sommet de Type-B.

Théorème 2.74 (Blidia et Chellali [4], 2018). *T est un arbre γ_L -point-critique si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

CHAPITRE 3

GRAPHES POINT-CRITIQUES PAR RAPPORT À LA DOMINATION LOCALISATRICE

Nous allons présenter dans ce chapitre notre première contribution, qui consiste à examiner les graphes dont la contraction d'une arête quelconque entraîne une réduction de leur nombre de domination localisatrice. Plus précisément, nous allons caractériser les graphes connexes $3\text{-}\gamma_L$ -point-critiques.

Il est à noter que les résultats issus de cette étude ont été publiés dans le journal "Bulletin of the Iranian Mathematical Society" [78].

3.1 Définitions et premières propriétés

Dans cette section, nous allons commencer par donner les définitions des graphes γ_L -point-critiques et des graphes $k\text{-}\gamma_L$ -point-critiques, en nous concentrant plus particulièrement sur celles des graphes $3\text{-}\gamma_L$ -point-critiques. Nous allons ensuite exposer les propriétés qui caractérisent les graphes G pour lesquels $\gamma_L(G) = 2$.

Définition 3.1. *Un graphe G est dit γ_L -point-critique, si $\gamma_L(G_{uv}) < \gamma_L(G)$ pour toute arête uv dans G . De plus, si $\gamma_L(G) = k$, alors G est appelé graphe $k\text{-}\gamma_L$ -point-critique.*

Blidia et Chellali ont montré dans [4] que la contraction d'une arête quelconque de tout graphe peut diminuer le nombre de la domination localisatrice par au plus deux. Ainsi, nous pouvons exprimer la définition précédente comme suit.

Définition 3.2. *Soit $k \geq 3$ un entier. Un graphe G est dit $k\text{-}\gamma_L$ -point-critique si $\gamma_L(G) = k$ et pour toute arête uv , $k - 2 \leq \gamma_L(G_{uv}) \leq k - 1$.*

Nous avons remarqué que si G est un graphe tel que $\gamma_L(G_{uv}) = 1$ pour une arête uv de G , alors G appartient à $\{P_2, P_3, K_3\}$. Ainsi, par le Théoreme 2.3, nous avons constaté que $\gamma_L(G) \leq 2$. Par conséquent, pour $k = 3$, la définition 3.2 peut-être formulée comme suit.

Définition 3.3. *Un graphe G est $3\text{-}\gamma_L$ -point-critique si $\gamma_L(G) = 3$ et $\gamma_L(G_{uv}) = 2$ sont vérifiées pour toute arête uv de G .*

La proposition suivante est une caractérisation des graphes connexes dont le nombre de domination localisatrice est égal à 2.

Proposition 3.4. *Soit G un graphe connexe d'ordre n . On a $\gamma_L(G) = 2$ si et seulement si G satisfait les propriétés suivantes*

- (i) $3 \leq n \leq 5$.
- (ii) $G \notin \{G_1, G_2, G_3, G_4, K_{1,4}, K_5, H_0\}$, où H_0 est l'étoile double $S_{2,1}$ représentée dans la Figure 3.1, et les graphes G_1, G_2, G_3 et G_4 sont les quatres premiers graphes de la famille \mathcal{G} illustrés dans la Figure 3.2.
- (iii) G ne contient ni deux sommets de degré quatre ni de sommet support de degré quatre.

Preuve. Soit G un graphe connexe et S un γ_L -ensemble de G . Commençons d'abord par montrer la condition nécessaire. D'après l'hypothèse $|S| = \gamma_L(G) = 2$.

(i) Si $V - S = \emptyset$, alors $G = P_2$ et donc $\gamma_L(G) = 1$, ce qui contredit notre hypothèse. D'où $V - S \neq \emptyset$ et donc $n \geq 3$. Si $n \geq 6$, alors $|V - S| \geq 4$. Dans ce cas, le principe des tiroirs implique qu'au moins deux sommets dans $V - S$ doivent avoir un voisinage commun dans S , ce qui contredit le fait que S est un EDL de G . Par conséquent $n \leq 5$ et donc (i) est vraie.

(ii) Supposons que (ii) n'est pas vraie. Si $G \in \{G_1, G_2, G_3, K_{1,4}, K_5\}$, alors d'après le Théorème 2.3, on a $\gamma_L(G) \in \{3, 4\}$, mais ceci contredit notre hypothèse. Maintenant, considérons le cas où G appartient à $\{G_4, H_0\}$ et supposons que S satisfait les propriétés citées dans l'Observation 2.2. Si $G = G_4$ (voir Figure 3.2), alors posons $V(G) = \{x, a, b, c, d\}$ tel que x est un sommet support, c sa feuille et $N_G(x) = \{a, b, c\}$. D'après le choix de S , $x \in S$. Si a et b ne sont pas dans S , alors ces deux sommets possèdent un voisinage commun dans S , contradiction. Donc par symétrie, on peut supposer que $a \in S$ et par conséquent, un sommet parmi b, c, d est dans S . Dans ce cas, S contient trois sommets, impliquant que $|S| = \gamma_L(G) = 3$, contradiction. Si $G = H_0$ (voir Figure 3.1), alors encore une fois, d'après le choix de S , S contient trois sommets, ce qui conduit à une contradiction.

(iii) Il est clair que (iii) est valide pour $n \in \{3, 4\}$. Supposons alors que $n = 5$ et posons $S = \{x, y\}$ et $V - S = \{a, b, c\}$. D'après la définition de S et sans perte de généralité, on peut mettre $N_G(a) \cap S = \{x\}$, $N_G(b) \cap S = \{x, y\}$ et $N_G(c) \cap S = \{y\}$. Puisque chaque sommet différent de b est de degré au plus trois et b n'est pas un sommet support, alors (iii) est satisfait.

Montrons à présent la condition suffisante. Supposons $|S| \neq 2$. Alors soit $|S| = 1$ ou bien $|S| \geq 3$. Si $|S| = 1$, alors $G = P_1$ ou P_2 , mais ceci contredit (i). Ainsi $|S| \geq 3$ et donc, d'après (i), on a $|V - S| \leq 2$. Comme G est un graphe connexe non trivial, alors $|S| \leq n - 1$ et donc $|V - S| \geq 1$. Ceci implique que $n \in \{4, 5\}$ (puisque $|S| \geq 3$). Si $|V - S| = 1$, alors il est clair que $|S| = n - 1$. Dans ce cas, d'après le Théorème 2.3, G est l'un des graphes suivants $K_4, K_{1,3}, K_5, K_{1,4}$ (selon que l'ordre n est égal 4 ou 5), mais ceci contredit (ii). Si $|V - S| = 2$, alors $|S| = 3$ et $n = 5$. Dans ce cas, on distingue trois cas selon la valeur de $\Delta(G)$.

Cas 1. $\Delta(G) = 2$.

Alors $G = P_5$ ou C_5 , d'où $\gamma_L(G) = 2$, contradiction.

Cas 2. $\Delta(G) = 3$.

Soit x un sommet de degré $\Delta(G)$, a, b, c ses trois voisins dans G et y le sommet restant dans G . Etant donné que G est connexe, alors y possède au moins un voisin dans $\{a, b, c\}$. Supposons d'abord que y est de degré trois. Alors, il est clair que $N_G(y) = \{a, b, c\}$. Puisque $G \neq G_3$, alors l'ensemble $\{a, b, c\}$ n'est pas un ensemble indépendant dans G . Par symétrie, on peut supposer que $ab \in E(G)$. Comme $\Delta(G) = 3$, et $ac, bc \notin E(G)$, alors $\{x, a\}$ est un EDL de G de cardinalité inférieure à celle de S , mais ceci contredit la minimalité de S (vu que $\gamma_L(G) = 3$). Maintenant, supposons que y est de degré deux. Par symétrie, posons $N_G(y) = \{a, b\}$. Si au moins une parmi cb, ca est une arête de G , disons cb alors $ab \notin E(G)$ du fait que $\Delta(G) = 3$. Ce qui implique que $\{x, a\}$ ou $\{x, b\}$ est un EDL de G , contradiction. Par conséquent, $cb, ca \notin E(G)$ et donc $ab \in E(G)$ puisque $G \neq G_4$. Mais dans ce cas, $\{x, a\}$ est un EDL de G , contradiction. Enfin, supposons que y est une feuille. Par symétrie, posons $N_G(y) = \{a\}$. Si une parmi ab, ac est une arête de G , disons ab , alors $ac \notin E(G)$ (car $\Delta(G) = 3$). Mais, là encore on a une contradiction étant donné que l'ensemble $\{x, a\}$ est un EDL de G . D'où $ab, ac \notin E(G)$ et donc $bc \in E(G)$ puisque $G \neq H_0$. En conséquence, $\{a, b\}$ est un EDL de G , contradiction.

Case 3. $\Delta(G) = 4$.

Soient x un sommet de degré $\Delta(G)$ et a, b, c, d ses quatre voisins dans G . D'après (iii), tous les voisins de x sont de degré deux ou trois. Supposons que l'un d'entre eux est de degré trois, disons a . Sans perte de généralité, on peut supposer que b et c sont des voisins de a . Sachant que $ad \notin E(G)$ et d'après (iii), au moins une parmi dc, db , disons dc , est une arête de G . Comme $\Delta(G) = 3$ ceci implique que $bc \notin E(G)$. Mais alors $\{a, c\}$ est un EDL de G , contradiction avec le fait que $\gamma_L(G) = 3$. Ainsi, tous les voisins de x sont de degré deux, ce qui entraîne la présence de deux arêtes indépendantes disons ab et cd (par symétrie). Dans ce cas, $\{a, d\}$ est aussi un EDL de G , contradiction. Ceci achève la preuve de la Proposition 3.4. \square

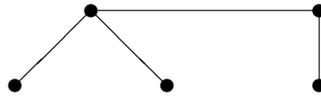


FIGURE 3.1. Graphe H_0

3.2 Caractérisation des graphes 3- γ_L -point-critiques

Dans cette section, nous allons présenter notre résultat principal qui consiste à caractériser les graphes connexes 3- γ_L -point-critiques.

Théorème 3.5. *Un graphe connexe G est 3- γ_L -point-critique si et seulement si $G \in \mathcal{G}$, où \mathcal{G} est la famille des graphes illustrée dans la Figure 3.2*

Lemme 3.6. *Si $G \in \mathcal{G}$, alors G est un graphe 3- γ_L -point-critique.*

Preuve. Soit $G \in \mathcal{G}$. Puisque que $G \notin \{P_1, P_2\}$, alors $\gamma_L(G) \geq 2$. Commençons d'abord par prouver que $\gamma_L(G) = 3$. D'après le Théorème 2.3 ceci est vrai pour G_1, G_2 et G_3 . Supposons donc que $G \notin \{G_1, G_2, G_3\}$. Un EDL de cardinalité trois de chaque graphe de \mathcal{G} est désigné par des sommets en noir dans la Figure 3.2. Il est clair que $\gamma_L(G) \leq 3$. Aussi, il est à noter que si $G \in \{G_i, 4 \leq i \leq 20\}$, alors d'après les itemes (ii), (iii) ou (i) de la Proposition 3.4, respectivement (dans cet ordre) ne sont pas satisfaits. Dans ce cas, $\gamma_L(G) \neq 2$, ceci implique que $\gamma_L(G) \geq 3$. D'où, on déduit le résultat.

Maintenant, soit G_e le graphe obtenu à partir de G en contractant une quelconque arête e de G . Il est facile de vérifier que le graphe G_e satisfait toutes les propriétés de la Proposition 3.4. Alors $\gamma_L(G_e) = 2$ et donc G est un graphe $3\text{-}\gamma_L$ -point-critique. Ce qui achève la preuve du Lemme 3.6.

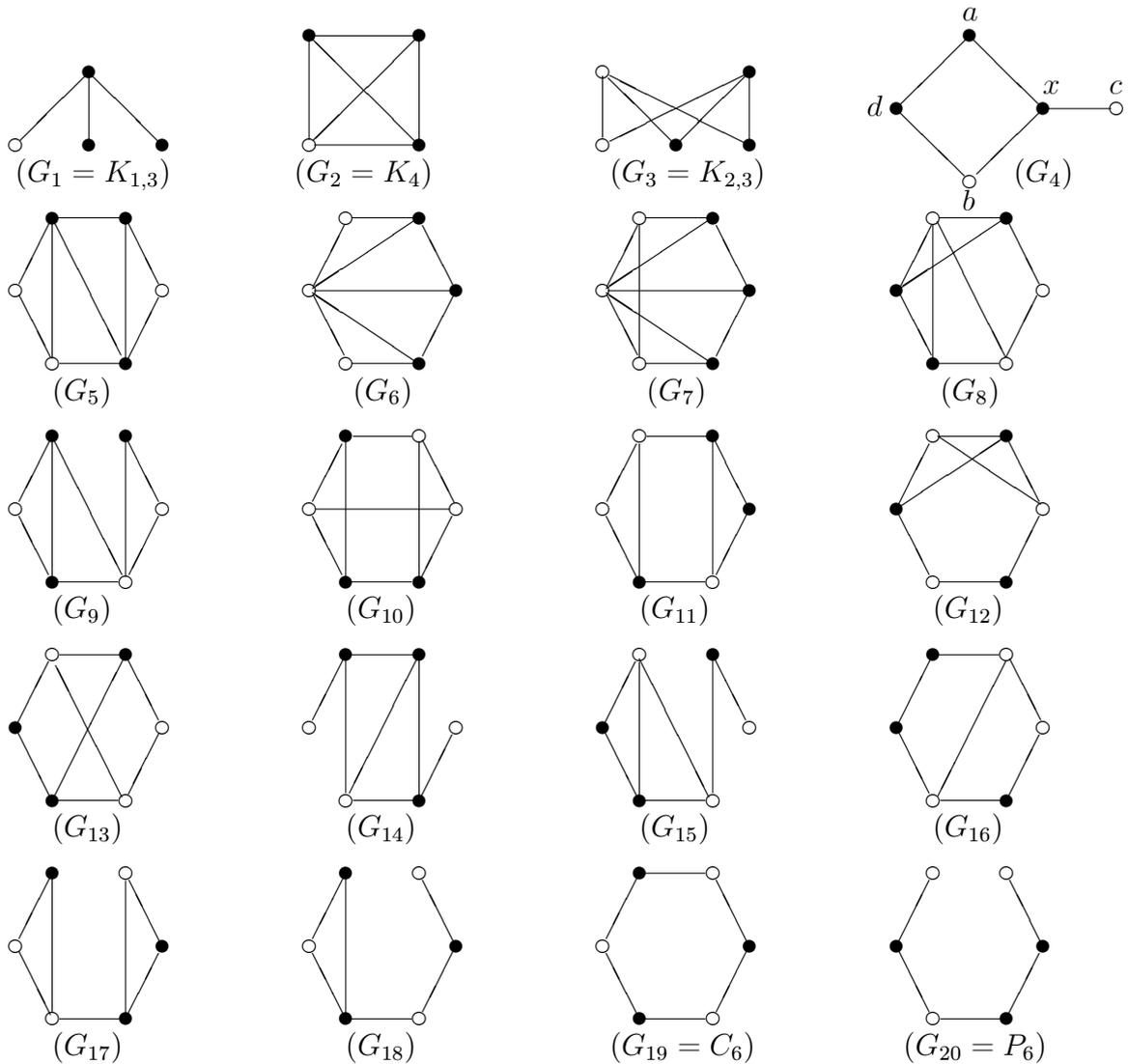


FIGURE 3.2. Famille \mathcal{G} des graphes connexes $3\text{-}\gamma_L$ -point-critiques, où l' EDL est représenté par des sommets en gras.

□

3.3 Preuve du Théorème 3.5

Preuve. Si $G \in \mathcal{G}$, alors d'après le Lemme 3.6, G est un graphe $3\text{-}\gamma_L$ -point-critique. A présent montrons l'inverse. Soit G un graphe $3\text{-}\gamma_L$ -point-critique d'ordre n . Alors $\gamma_L(G) = 3$ et $\gamma_L(G_{uv}) = 2$, où G_{uv} est le graphe obtenu à partir de G en contractant une quelconque arête uv de G . La Proposition 3.4-(i) montre que $3 \leq |V(G_{uv})| \leq 5$. Par conséquent, on a

$$4 \leq n \leq 6. \quad (3.1)$$

Désignons par X_i l'ensemble de tous les sommets de degré i dans G . On voit clairement que $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Nous énonçons maintenant quatre faits qui seront utiles à notre preuve.

Fait 1: Si $|X_4| \neq 0$, alors X_4 est une clique et $\delta(G) \geq 2$.

Puisque $|X_4| \neq 0$, alors selon (3.1), on a $n \in \{5, 6\}$. Commençons par montrer que X_4 est une clique. Puisque le cas $|X_4| = 1$ est trivial, on peut supposer que $|X_4| \geq 2$ et donc $n = 6$. Soient $x, y \in X_4$ et notons par a, b, c, d les sommets restants de G . Si x et y ne sont pas adjacents dans G , alors x et y doivent être adjacents aux sommets a, b, c, d . Mais alors les sommets \overline{ax} et y seront de degré quatre dans G_{ax} , ce qui contredit la Proposition 3.4 (iii). De ce fait, on conclut que x et y sont adjacents dans G et par symétrie X_4 est une clique.

Supposons au contraire que $\delta(G) \leq 1$. Comme G est connexe, alors $\delta(G) = 1$ impliquant que $|X_1| \neq 0$. Soit $x \in X_1$ et a, b, c, d ses quatre voisins dans G . Nous allons montrer que x n'est pas un sommet support dans G . Supposons le contraire. Par symétrie, on peut considérer que $a \in X_1$. Prenons d'abord $n = 5$. Alors $V(G) = \{x, a, b, c, d\}$ et dans ce cas, $\{b, c, d\}$ ne peut pas être une clique dans G , autrement $G_{ax} = K_4 = G_2$, ce qui contredit la Proposition 3.4-(ii). D'un autre côté, on peut supposer par symétrie que $bc \notin E(G)$. Mais dans ce cas, on a encore fois une contradiction avec la Proposition 3.4-(ii) puisque $G_{dx} = K_{1,3} = G_1$. Prenons maintenant $n = 6$ et désignons par z le sommet restant dans G . Comme G est connexe, alors z doit être adjacent à au moins un des sommets b, c, d , disons b . Cependant, il en résulte que x serait un support de degré quatre dans G_{be} , contradiction avec la Proposition 3.4-(iii). Donc x n'est pas un

support dans G . Notons que dans le cas $n = 6$, z n'appartient pas à X_1 autrement le sommet \overline{bx} serait un support de degré quatre dans G_{bx} , contradiction. Ainsi, tous les sommets de G sont de degré au moins deux. Ceci termine la preuve du Fait 1.

Fait 2. $|X_5| \leq 1$.

Supposons au contraire que X_5 contient au moins deux sommets, disons x, y . Dans ce cas, le graphe G a exactement six sommets où les sommets x et y sont adjacents aux quatre sommets restants dans G . Il s'ensuit que la contraction d'une quelconque arête uv différente de xy donne le graphe G_{uv} où x et y sont de degré quatre dans G_{uv} , ce qui contredit la Proposition 3.4-(iii). D'où $|X_5| \leq 1$.

Fait 3. Si $|X_5| = 1$, alors $|X_4| = |X_1| = 0$ et $|X_3| = 3$ ou 5 .

Soit x l'unique sommet de X_5 et a, b, c, d, z ses cinq voisins. Supposons que $|X_4| \neq 0$. Il s'ensuit alors que l'un des sommets a, b, c, d, z , disons a doit appartenir à X_4 . Par symétrie, on peut supposer que $N_G(a) = \{x, b, c, d\}$. Mais dans ce cas, les sommets \overline{ax} et a sont de degré quatre dans G_{ax} , contradiction avec la Proposition 3.4-(iii). Maintenant, supposons que $|X_1| \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a \in X_1$. Ceci conduit également à une contradiction puisque le sommet \overline{ab} est un sommet support de degré quatre dans G_{ab} . En conséquence, $|X_1| = |X_4| = 0$. D'autre part, étant donné que $|X_5| = 1$ et du fait aussi que le nombre de sommets de degré impair dans un graphe est égal à un nombre pair ceci implique que $|X_3| \in \{1, 3, 5\}$. Ainsi, pour montrer la deuxième partie il suffit de prouver que $|X_3| \neq 1$. Supposons que $|X_3| = 1$. Par symétrie, supposons aussi que a est l'unique sommet de X_3 et x, b, c sont ses trois voisins dans G . Alors $b, c, d, z \in X_2$. De ce fait, il n'y a aucune arête entre $\{z, d\}$ et $\{a, b, c\}$ (vu que a est de degré trois et b et c sont de degré deux). Comme $|X_1| = 0$, alors d doit être adjacent à z . Dans ce cas, x est un sommet support de degré quatre dans G_{de} , contradiction. En conséquence $|X_3| \neq 1$, et donc $|X_3| = 3$ ou 5 .

Fait 4. Si $n = 5$, alors $|X_4| = 0$ et $|X_3| = 1$ ou 2 et si $n = 6$, alors $|X_4| \leq 2$.

Considérons le cas $n = 5$ et montrons d'abord que $|X_4| = 0$. Supposons le contraire. Alors d'après le Fait 1, on a $\delta(G) \geq 2$. Prenons un sommet quelconque x dans X_4 , avec a, b, c, d ses quatre voisins dans G et S un ensemble indépendant maximum dans G . D'après la Proposition 3.4-(ii), $G_{uv} \notin \{K_4, K_{1,3}\}$ pour toute arête uv dans G . Donc $G \notin \{K_5, K_{1,4}\}$, impliquant que $|S| \notin \{1, 4\}$. Cela signifie que $|S| \in \{2, 3\}$, d'où $x \notin S$. Si $|S| = 3$, alors l'un des sommets a, b, c, d , disons d n'appartient pas à S . Ceci implique

que $S = \{a, b, c\}$, d'où $G_{dx} = K_{1,3}$, contradiction. Dans ce cas, $|S| = 2$ et sans perte de généralité, on peut supposer que $S = \{a, b\}$. La définition de S implique que

$$\text{chaque sommet dans } \{c, d\} \text{ possède un voisin dans } S. \quad (3.2)$$

De même, vu que $\delta(G) \geq 2$, il s'ensuit que

$$\text{chaque sommet dans } \{a, b\} \text{ a un voisin dans } \{c, d\}. \quad (3.3)$$

Si c et d n'ont pas un voisin commun dans $\{a, b\}$, alors suite aux (3.2) et (3.3), il est clair que l'ensemble $\{a, b\}$ est un EDL de G , contradiction. Donc c et d ont un voisin commun parmi les sommets a, b , disons a . Selon (3.3), b doit être adjacent à au moins un sommet parmi c, d , disons d . Si $cd \in E(G)$, alors $G_{bx} = K_4$, contradiction. D'où $cd \notin E(G)$; mais dans ce cas $\{a, d\}$ est un EDL de G , contradiction. En conséquence $|X_4| = 0$.

Prouvons maintenant que $|X_3| = 1$ ou 2 . Supposons le contraire, alors soit $|X_3| = 0$ ou bien $|X_3| \geq 3$. Si $|X_3| = 0$, alors chaque sommet dans G est de degré au plus deux. Comme G est connexe, ceci implique que G est soit une chaîne P_5 ou bien un cycle C_5 . Mais dans ce cas, le nombre de domination localisatrice de G est égal à deux, contradiction, d'où $|X_3| \neq 0$. Supposons maintenant que $|X_3| \geq 3$ et soient $x, y, z \in X_3$ et a, b les sommets restants dans G . Supposons que $xy \notin E(G)$. Il est facile de voir que toutes les arêtes entre $\{x, y\}$ et $\{z, a, b\}$ existent. Pour que le sommet z ait un degré égal à trois, z doit être adjacent à l'un des sommets a, b (disons a). Par conséquent, zb et ab ne sont pas des arêtes de G puisque chacun des sommets z et a a un degré au plus trois. Ce qui implique que $\{x, z\}$ est un EDL de G , contradiction. Donc $xy \in E(G)$ et par symétrie $\{x, y, z\}$ est une clique. Dans ce cas, chacun des sommets x, y et z est adjacent à exactement un sommet dans $\{a, b\}$. D'après le principe des tiroirs, deux sommets parmi x, y, z , disons x et y doivent avoir un voisin commun, disons a dans $\{a, b\}$. Il est clair que $bx, by \notin E(G)$. De ce fait $za \notin E(G)$, autrement b serait un sommet isolé dans G (vu que tous les autres sommets sont de degré trois). Puisque $d_G(z) = 3$, alors z doit être adjacent à b . Mais dans ce cas, $\{x, z\}$ est un EDL de G , contradiction. En conséquence, puisque $|X_3| \neq 0$, alors $|X_3| \in \{1, 2\}$.

Considérons à présent le cas $n = 6$ et supposons que $|X_4| \geq 3$. Alors en vertu du

Fait 1, on a $\delta(G) \geq 2$. Soient $x, y, z \in X_4$ et a, b, c les autres sommets de G . Selon le Fait 1, $\{x, y, z\}$ est une clique, ce qui nous permet d'affirmer que

$$\text{chaque sommet dans } \{a, b, c\} \text{ a exactement deux voisins dans } \{x, y, z\}. \quad (3.4)$$

Pour montrer (3.4), supposons d'abord que l'un des sommets a, b, c , disons a a au plus un voisin dans $\{x, y, z\}$. Par symétrie, on peut supposer que xa, ya ne sont pas des arêtes de G . Sachant que $x, y \in X_4$, alors toutes les arêtes entre $\{x, y\}$ et $\{b, c\}$ existent. Par ailleurs, comme $\delta(G) \geq 2$, alors a doit avoir au moins un voisin dans $\{b, c\}$, disons b . Mais dans ce cas, les sommets x et y maintiennent chacun un degré de quatre dans G_{ab} , ce qui contredit la Proposition 3.4-(iii). Ainsi, chaque sommet dans $\{a, b, c\}$ possède au moins deux voisins dans $\{x, y, z\}$. Par conséquent, comme chaque sommet dans $\{x, y, z\}$ doit posséder exactement deux voisins dans $\{a, b, c\}$, ceci implique (3.4).

Etant donné que $x, y, z \in X_4$ et du fait de (3.4), alors sans perte de généralité, on peut supposer que toutes les arêtes entre $\{x, y, z\}$ et $\{a, b, c\}$ sont présentes (sauf ax, by, cz). Si $ab \in E(G)$, alors en contractant l'arête ab on obtient un graphe G_{ab} tel que x et y sont de degré quatre dans G_{ab} , contradiction. Donc $ab \notin E(G)$ et par symétrie $\{a, b, c\}$ est un ensemble indépendant. Mais cela conduit à une contradiction avec le fait qu'en contractant l'arête xy on obtient un graphe G_{xy} tel que \overline{xy} est un sommet support de degré quatre dans G_{xy} . D'où $|X_4| \leq 2$. Ceci complète la preuve du Fait 4.

Par la suite, en utilisant (3.1), on distingue trois cas selon l'ordre n de G . Pour $n = 4$, et vu que $\gamma_L(G) = 3 = n - 1$, alors le Théorème 2.3 montre que G est isomorphe à G_1 ou G_2 . Ainsi, dans la suite nous allons nous restreindre aux cas où $n = 5$ et 6.

Cas 1: $n = 5$.

Il est clair que $|X_5| = 0$ et d'après le Fait 4, on a $|X_4| = 0$ et $|X_3| = 1$ ou 2. Supposons d'abord que $|X_3| = 1$. Soit x l'unique sommet de X_3 , a, b, c ses trois voisins de G , et d le sommet restant de G . Alors chaque sommet dans $\{a, b, c, d\}$ est de degré au plus deux. Sachant que G est connexe, d doit être adjacent à l'un des sommets a, b, c , disons a (par symétrie). Cependant, comme $d_G(a) = 2$, alors a n'est adjacent ni à b ni à c . De même, d n'est pas adjacent à au moins un des sommets b, c , disons

c. Si $bc \in E(G)$, alors $bd \notin E(G)$ car $d_G(b) = 2$. Dans ce cas, $\{a, b\}$ est un EDL de G , contradiction. Donc $bc \notin E(G)$ ce qui implique que $\{a, b, c\}$ est un ensemble indépendant de G . Si $bd \notin E(G)$, alors $G_{ad} = K_{1,3}$, contradiction avec la Proposition 3.4-(ii). Autrement, si $bd \in E(G)$, alors $G = G_4$.

Supposons maintenant que $|X_3| = 2$ et soient x, y les seuls sommets de X_3 et a, b, c les autres sommets de G . Si x et y ne sont pas adjacents dans G , alors ces deux sommets doivent être adjacents aux sommets a, b, c . Comme l'un des sommets a, b, c est de degré deux, alors il n'y a aucune arête entre eux; d'où $G = G_3$. D'un autre côté, si x et y sont adjacents dans G , alors d'après le principe des tiroirs, x et y doivent avoir un voisin commun dans $\{a, b, c\}$, disons b . Le sommet b n'a pas de voisin dans $\{a, c\}$ (vu que $d_G(b) = 2$). Aussi, étant donné que $x, y \in X_3$, alors il existe deux arêtes entre $\{x, y\}$ et $\{a, c\}$. Si x et y sont adjacents à a ou c (disons a), alors c est isolé dans G (car x, y sont de degré trois et a est de degré deux), contradiction. Ainsi, par symétrie, on peut supposer que ax et cy sont les seules arêtes qui existent entre $\{x, y\}$ et $\{a, c\}$. Mais dans ce cas $\{x, y\}$ est un EDL de G , contradiction.

Cas 2: $n = 6$. D'après Le Fait 2, on considère deux cas.

Cas 2.1. $|X_5| = 1$.

Soit x l'unique sommet de X_5 et a, b, c, d, z ses cinq voisins dans G . Du Fait 3, on a $|X_4| = |X_1| = 0$ et $|X_3| = 3$ ou 5 . Si $|X_3| = 5$, alors $|E(G)| = 10$, et de plus, puisque chaque sommet dans $G - \{x\}$ est de degré deux, alors $G - \{x\}$ est un cycle C_5 , donc $G = G_7$. Maintenant, supposons que $|X_3| = 3$. Alors $|X_2| = 2$ et $|E(G)| = 9$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $X_3 = \{a, b, c\}$ et $X_2 = \{d, z\}$. Si X_3 est une clique, alors il est facile de voir qu'il n'existe aucune arête entre X_3 et X_2 . Par conséquent, dz doit être une arête de G (vu que $d, z \in X_2$). Dans ce cas, x est un sommet support de degré quatre dans G_{de} , contradiction avec la Proposition 3.4-(iii). D'où X_3 n'est pas une clique et donc par symétrie, on peut supposer que $ab \notin E(G)$. De ce fait, a doit avoir au moins un voisin parmi les sommets d, z , disons d (car a est de degré trois). Cependant, comme d est de degré deux, alors il n'a aucun voisin dans $\{b, c, z\}$. Pour que le sommet b soit de degré trois il doit être adjacent à c et z . Étant donné que le sommet z est de degré deux alors $za, zc \notin E(G)$. De même, pour que le sommet a soit de degré trois a doit être adjacent à c . Ainsi $G = G_6$.

Cas 2.2. $|X_5| = 0$. D'après la seconde partie du Fait 4, on distingue trois cas.

Cas 2.2.1. $|X_4| = 2$.

Soient $x, y \in X_4$ et a, b, c, d les sommets restants de G . D'après le Fait 1, x et y sont adjacents, et en appliquant le principe des tiroirs, ces deux sommets doivent avoir deux voisins communs parmi a, b, c, d , disons b, c . Dans ce cas, il est facile de voir que x, y possèdent exactement un seul voisin dans $\{a, d\}$. Si x et y ont un autre voisin commun parmi a, d , disons a , alors $xd, yd \notin E(G)$. Par ailleurs, d doit avoir un voisin parmi a, b, c , disons c . Ceci implique que x et y sont des sommets de degré quatre dans G_{dc} , contradiction avec la Proposition 3.4-(iii). Donc, sans perte de généralité, on peut supposer que ax, dy sont les seules arêtes entre $\{x, y\}$ et $\{a, d\}$. Si $ad \in E(G)$, alors encore une fois on constate que x et y sont des sommets de degré quatre dans G_{ad} , contradiction. Ainsi $ad \notin E(G)$. Vu que $\delta(G) \geq 2$ (suite au Fait 1) et chacun des sommets b, c est de degré au plus trois, alors sans perte de généralité, on peut supposer que ab et cd sont les seules arêtes entre $\{b, c\}$ et $\{a, d\}$; d'où $G = G_5$.

Cas 2.2.2. $|X_4| = 1$.

Soit x l'unique sommet dans X_4 et a, b, c, d sont ses quatre voisins dans G . Notons par z le sommet restant. Il est clair que chaque sommet autre que x est de degré au plus trois. D'un autre côté, étant donné que $\delta(G) \geq 2$ (suite au Fait 1), z doit avoir au moins deux voisins parmi a, b, c, d , disons a et b (par symétrie). Par conséquent, puisque z est de degré au plus trois, alors au moins un sommet parmi c, d n'est pas adjacent à z , disons d . Supposons que $ec \in E(G)$. Comme $\delta(G) \geq 2$, alors d doit avoir un voisin parmi a, b, c , disons c . Dans ce cas, x et $\bar{c}z$ sont des sommets de degré quatre dans G_{cz} , contradiction. Ce qui implique que $zc \notin E(G)$ et donc a et b sont les seuls voisins de z dans G . Si $ab \in E(G)$, alors x et y sont de degré trois. De plus, il n'existe aucune arête entre $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$. Ce qui entraîne que $cd \in E(G)$ puisque $\delta(G) \geq 2$, d'où $G = G_9$. Maintenant supposons que $ab \notin E(G)$. Si c ou d , disons c n'est le voisin ni de a ni de b , alors $G_{dx} = G_4$, mais ceci contredit la Proposition 3.4-(ii). Ainsi, les sommets c et d doivent avoir un voisin dans $\{a, b\}$. De plus, sachant que $a, b \notin X_4$, alors sans perte de généralité on peut supposer que ad et bc sont les seules arêtes entre $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$. Si $cd \notin E(G)$, alors $\bar{a}x$ est un sommet support de degré quatre dans G_{ax} , contradiction avec la Proposition 3.4-(iii). Donc $cd \in E(G)$; d'où $G = G_8$.

Cas 2.2.3. $|X_4| = 0$.

Dans ce cas, chaque sommet dans G est de degré au plus trois (car $|X_5| = 0$). Si

$|X_3| = 0$, alors il est facile de voir que $G \in \{G_{19}, G_{20}\}$. Supposons alors que $|X_3| \neq 0$ et considérons les deux cas suivants.

Cas 2.2.3.1. $|X_1| \neq 0$.

Soit $x \in X_3$ et a, b, c ses trois voisins dans G , notons par d et z les sommets restants dans G . Etant donné que $|X_1| \neq 0$, alors au moins un sommet autre que x doit être dans X_1 . De ce fait, on affirme que

$$\text{chaque sommet dans } \{a, b, c\} \text{ a au plus un voisin dans } \{d, z\}. \quad (3.5)$$

Supposons que 3.5 n'est pas vraie. Supposons également que les sommets z et d sont les voisins de l'un des sommets a, b, c , disons b . Ceci signifie que $b \notin X$ et par suite un sommet parmi a, c, d, z doit appartenir à X_1 . Mais dans ce cas, \overline{xb} serait un sommet support de degré quatre dans G_{xb} , contradiction avec la Proposition 3.4-(iii). D'où (3.5) est valide.

Comme G est connexe, alors il existe au moins une arête entre $\{d, z\}$ et $\{a, b, c\}$. Par symétrie, on peut supposer que $ad \in E(G)$. Donc $a \notin X_1$ et d'après (3.5), $az \notin E(G)$. On distingue deux possibilités selon le fait que la feuille est un voisin de x ou non.

Possibilité 1. b ou c appartient à X_1 , disons c .

Il est à remarquer que c n'a aucun voisin dans $\{a, b, d, z\}$. Nous allons montrer que $dz \in E(G)$. Supposons le contraire. Sachant que G est connexe, alors $bz \in E(G)$, et d'après (3.5), on a $bd \notin E(G)$. Dans ce cas, $G_{ax} = H_0$, contradiction avec la Proposition 3.4-(ii), d'où $de \in E(G)$. Par ailleurs, b possède un voisin dans $\{d, z\}$ car sinon la contraction de l'arête ax donne le graphe G_{ax} qui est isomorphe à H_0 , contradiction. En tenant compte de ce fait avec (3.5), on constate que

$$(i) \ bz \in E(G) \text{ ou } bd \notin E(G) \text{ ou } (ii) \ bz \notin E(G) \text{ ou } bd \in E(G). \quad (3.6)$$

Si $ab \notin E(G)$, alors $\{a, b, c\}$ est un ensemble indépendant. Ceci et (3.6) donnent $G_{dz} = G_4$, contradiction avec la Proposition 3.4-(ii). Donc $ab \in E(G)$. Dans ce cas, si la condition (i) de l'expression (3.6) est vérifiée, alors la contraction de l'arête ax donne le graphe G_{ax} , qui est isomorphe à G_4 , contradiction. D'où d'après (3.6), la condition (ii) est vérifiée et par conséquent $G = G_{14}$.

Possibilité 2. b et c ne sont pas dans X_1 .

Sachant que $a \notin X_1$ et $|X_1| \neq 0$, alors au moins l'un des deux sommets d, z doit être dans X_1 . Rappelons que $ad \in E(G)$ et $az \notin E(G)$. Dans ce cas, deux situations se présentent en fonction de la présence ou non d'un voisin de z dans $\{b, c\}$.

Situation 1. Supposons que z n'a aucun voisin dans $\{b, c\}$. Comme G est connexe, alors $de \in E(G)$. Par conséquent, $d \notin X_1$ et par suite $z \in X_1$. Etant donné que d est de degré au plus trois, alors au moins une parmi db, dc n'est pas une arête de G , disons $dc \notin E(G)$. Examinons la structure de G et cherchons si bd est une arête de G ou pas. Supposons d'abord que $bd \notin E(G)$. Puisque $b, c \notin X_1$ et a est de degré au plus trois, alors $bc \in E(G)$. Si ab et ac ne sont pas des arêtes de G , alors $G = G_{18}$. Si l'une d'elles est une arête alors l'autre ne l'est pas vu que a est de degré au plus trois. Dans chaque cas, on obtient $G = G_{15}$. A présent, supposons que $bd \in E(G)$. Comme $c \notin X_1$, alors c possède un voisin dans $\{a, b\}$, disons b (par symétrie). Il est clair que $ab \notin E(G)$ (car b est de degré au plus trois). Dans ce cas, $G_{cx} = G_4$, contradiction.

Situation 2. Supposons que z a un voisin dans $\{b, c\}$, disons b (par symétrie). Il s'ensuit que d'après (3.5), $bd \notin E(G)$. Comme d ou z appartient à X_1 , disons z , alors b est l'unique voisin de z dans G . Maintenant, nous allons discuter la structure de G selon que cd, ab, ac, bc sont des arêtes de G ou non. Supposons d'abord que $cd \in E(G)$. Etant donné que a, b, c sont de degré au plus trois, ces sommets induisent au plus une arête. S'il n'existe aucune arête entre eux alors $G_{bx} = G_4$, contradiction. Si au moins une entre ab, bc est une arête de G , alors $G_{bx} = G_4$, contradiction. Cependant, si $ac \in E(G)$, alors $G = G_{15}$. A présent, supposons que $cd \notin E(G)$. Du fait que $c \notin X_1$, alors il doit avoir un voisin dans $\{a, b\}$, disons b (par symétrie). Sachant que b est de degré au plus trois alors $ab \notin E(G)$. Si $ac \in E(G)$, alors $G = G_{14}$. Autrement, si $ac \notin E(G)$, alors $G_{bx} = H_0$, contradiction.

Cas 2.2.3.2. $|X_1| = 0$.

Dans ce cas, $V(G) = X_3 \cup X_2$, (rappelons que $|X_3| \neq 0$ et $|X_4| = |X_5| = 0$). Puisque le nombre de sommets de degré impair dans un graphe est pair, alors $|X_3| \in \{2, 4, 6\}$. Dans la suite, on distingue trois possibilités selon la valeur de $|X_3|$.

Possibilité 1. $|X_3| = 2$.

En conséquence $|X_2| = 4$ et par suite $|E(G)| = 7$. Posons $X_3 = \{x, y\}$ et $X_2 = \{a, b, c, d\}$ et supposons d'abord que $xy \notin E(G)$. Alors d'après le principe des tiroirs, x

et y doivent avoir deux voisins communs dans X_2 , disons b et c . Ce qui implique qu'il n'y a pas d'arête entre $\{b, c\}$ et $\{a, d\}$, étant donné que b et c sont de degré deux. Il est à noter qu'aucun des sommets a et d ne peut être un voisin commun de x et y , autrement a ou d serait un sommet isolé dans G , ce qui est impossible. Par ailleurs, puisque les sommets x et y doivent chacun avoir un voisin dans $\{a, d\}$, on peut supposer que les seules arêtes reliant $\{x, y\}$ à $\{a, d\}$ sont xa et yd . Également, a doit être adjacent à d vu que tous les deux appartiennent à X_2 . Dans ce cas, $G_{ad} = K_{2,3} = G_3$, ce qui contredit la Proposition 3.4-(ii).

Supposons à présent que $xy \in E(G)$. Dans ce cas, x et y possèdent au plus un voisin commun dans X_2 . En effet, si x et y ont deux voisins communs dans X_2 , disons a et b , alors il n'existe aucune arête entre $\{c, d\}$ et $\{x, y, a, b\}$. Or, cela contredirait la connexité de G . Supposons d'abord que x et y n'ont pas de voisin commun. Sans perte de généralité, on peut supposer que xa, xb, yc, yd sont les seules arêtes entre X_3 et X_2 . Donc l'ensemble des arêtes induites par X_2 est soit $\{ab, cd\}$, soit l'un des deux ensembles $\{ac, bd\}$ et $\{ad, bc\}$. Par conséquent G est isomorphe soit à G_{17} ou bien à G_{16} . Supposons maintenant que x et y ont exactement un voisin commun, disons a . Par conséquent, il s'ensuit que le sommet a n'a aucun voisin dans l'ensemble $\{b, c, d\}$ puisque son degré dans G est égal à deux. De plus, sachant que les sommets x et y appartiennent à l'ensemble X_3 , alors chacun d'entre eux doit avoir exactement un voisin dans l'ensemble $\{b, c, d\}$. De ce fait et par symétrie, on peut supposer que $xb, yc \in E(G)$. Pour que d soit de degré deux, d doit être adjacent à b et c , et à aucun sommet dans $\{x, y, a\}$. Cependant, cela implique que G_{xy} serait isomorphe à G_4 , ce qui contredit la Proposition 3.4-(ii).

Possibilité 2. $|X_3| = 4$.

Alors $|X_2| = 2$ et par suite $|E(G)| = 8$. Posons $X_3 = \{a, b, c, d\}$ et $X_2 = \{x, y\}$ et considérons les deux situations suivantes.

Situation 1. x est adjacent à y . Si x et y ont un voisin commun dans X_3 , disons a , alors x et y n'ont pas de voisin dans $\{b, c, d\}$ (puisque $x, y \in X_2$). Il s'ensuit alors que a doit avoir exactement un voisin dans $\{b, c, d\}$, disons b . Mais dans ce cas, les sommets c et d ne peuvent pas avoir un degré égal à trois, contradiction. Donc x et y n'ont pas un voisin commun dans X_3 et par symétrie, on peut supposer que ax et dy sont les seules arêtes entre X_2 et X_3 . D'autre part, étant donné que $b, c \in X_3$, alors toutes les

arêtes reliant $\{b, c\}$ à $\{a, d\}$, ainsi que l'arête bc , sont présentes dans G . De ce fait, vu que G possède exactement 8 arêtes, alors $ad \notin E(G)$, d'où $G = G_{12}$.

Situation 2. x n'est pas adjacent à y . Supposons que deux sommets dans X_3 , disons a, b sont des voisins communs de x et y . Puisque $a, b \in X_3$, alors il ya exactement deux arêtes entre $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$. Cela implique qu'au moins l'un des sommets c et d ne peut être de degré trois, contradiction. Maintenant, supposons que x et y ont un seul voisin commun, disons a . Etant donné que x et y sont dans X_2 , alors chacun d'eux a exactement un voisin dans $\{b, c, d\}$. Par symétrie, on peut supposer que $bx, cy \in E(G)$. Pour que d soit de degré trois, d doit être adjacent à tous les autres sommets de X_3 . De manière similaire, on peut montrer que l'arête bc appartient à G . Dans ce cas, $G_{bc} = K_{2,3}$, contradiction. Enfin, supposons que x et y n'ont aucun voisin commun. Sans perte de généralité, on peut supposer que a et b (respectivement, c et d) sont des voisins de x (respectivement, y). On remarque que chaque sommet dans $G - \{x, y\}$ est de degré deux. De ce fait et par symétrie, il s'ensuit que $G - \{x, y\}$ est isomorphe à l'un des deux cycles d'ordre quatre suivants : le cycle $a-b-c-d-a$ ou le cycle $a-c-b-d-a$. D'où G est isomorphe soit à G_{11} ou bien à G_{13} .

Possibilité 3. $|X_3| = |V(G)| = 6$.

Alors G est un graphe 3-régulier avec $|E(G)| = 9$. Soit $x \in X_3$ et a, b, c ses trois voisins, notons par d et z les autres sommets de G . Si z et d ne sont pas adjacents, alors z et d sont adjacents à tous les sommets de $\{a, b, c\}$. Donc $G = K_{3,3}$ et d'après le Théorème 2.3, $\gamma_L(K_{3,3}) = 4$, contradiction. Si z et d sont adjacents, alors d'après le principe des tiroirs, ils ont un voisin commun parmi les sommets a, b, c , disons b . Dans ce cas, b n'a aucun voisin dans $\{a, c\}$ et chacun des sommets z, d doit avoir un voisin dans $\{a, c\}$ (pour qu'il soit de degré égal à trois). Si z et d ont le même voisin dans $\{a, c\}$, disons a , alors $c \in X_1$ (puisque tous les autres sommets sont de degré trois), contradiction. Donc, par symétrie, on peut supposer que ad, cz sont les seules arêtes entre $\{d, z\}$ et $\{a, c\}$. Par ailleurs, pour que a soit de degré trois, il doit être adjacent à c . Par conséquent, le graphe G serait isomorphe à G_{10} . Ce qui termine la preuve du Théorème 3.5. \square

CHAPITRE 4

NOMBRE DE DOMINATION LOCALISATRICE SUPERIEUR

Dans ce présent chapitre, nous allons caractériser les graphes connexes d'ordre $n \geq 4$ pour lesquels le nombre de domination localisatrice supérieur est égal à $n-2$. Il convient de rappeler que Chellali et Mimouni [19] ont montré que tout graphe non trivial connexe d'ordre n satisfait $\Gamma_L(G) \leq n-1$, avec égalité si seulement si G est un graphe complet ou une étoile. Les travaux présentés dans ce chapitre sont en cours de soumission pour publication.

Le résultat principal de ce chapitre est formulé comme suit.

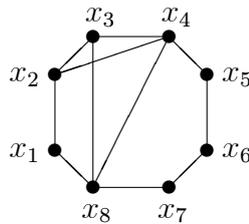
Théorème 4.1. *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 4$. Alors $\Gamma_L(G) = n-2$ si et seulement si $G \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ (où $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ et \mathcal{F}_3 sont les trois familles de graphes illustrées dans les Figures 4.2, 4.3 et 4.4).*

Avant de donner la preuve de ce théorème, nous avons besoin de quelques définitions et résultats intermédiaires qui nous seront utiles dans la suite.

4.1 Familles spéciales de graphes.

Pour caractériser les graphes connexes pour lesquels $\Gamma_L(G) = n-2$, nous allons introduire trois familles de graphes, notées $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ et \mathcal{F}_3 . Pour ce faire, cependant, il est nécessaire d'introduire les définitions supplémentaires suivantes. Soit $G = (V, E)$ un graphe, A, B des sous-ensembles de V , et u, v des sommets de V . Si u est adjacent à v , alors on dit que u voit v , sinon, on dit que u rate v . Par ailleurs, si u voit (respectivement, rate) tous les sommets de A , alors on dit que u voit (respectivement, rate) A . En outre, si tout sommet de A voit (respectivement, rate) B , alors on dit que A voit (respectivement, rate) B .

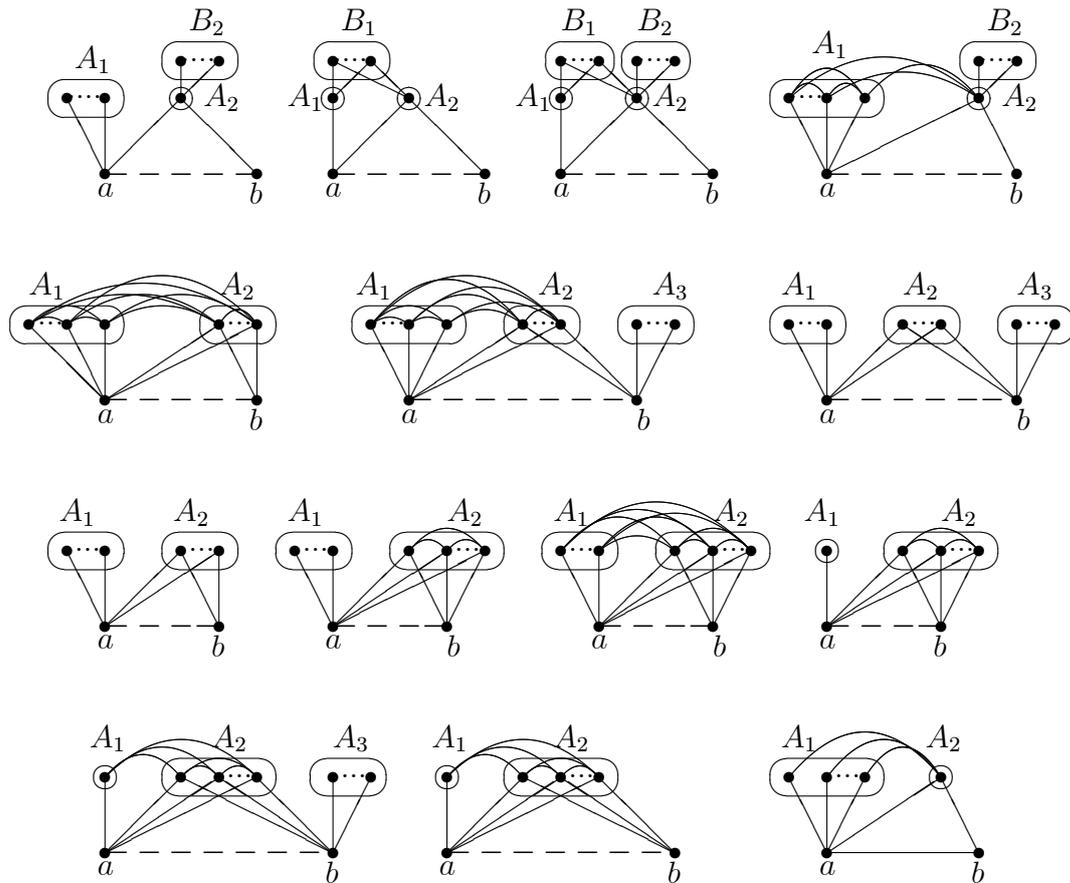
La Figure 4.1 représente un graphe G avec huit sommets x_1, x_2, \dots, x_8 , où le sommet x_1 voit les sommets x_2 et x_8 et rate les sommets restants, tandis que le sommet

FIGURE 4.1. Graphe G

x_4 voit $\{x_2, x_3, x_5, x_8\}$ et rate $\{x_1, x_6, x_7\}$. Par ailleurs, $\{x_3, x_4\}$ voit $\{x_2, x_8\}$ et rate $\{x_1, x_6, x_7\}$.

Famille \mathcal{F}_1 : Un graphe G est dans \mathcal{F}_1 si l'ensemble de ses sommets peut-être partitionné en six sous ensembles $\{a, b\}$, A_1 , A_2 , A_3 , B_1 et B_2 tel que

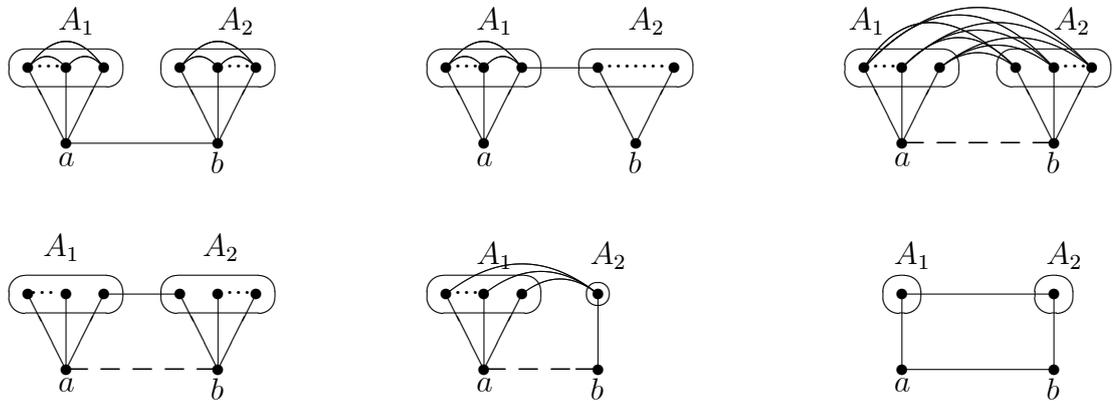
- Au moins un des deux ensembles A_3 et $B_1 \cup B_2$ est vide, et les ensembles A_1 , A_2 sont non vides.
- Les ensembles A_3 et $B_1 \cup B_2$ sont des stables.
- Si $B_1 \cup B_2 \neq \emptyset$, alors $|A_2| = 1$. En particulier, si $B_1 \neq \emptyset$, alors $|A_1| = 1$ et B_1 voit $A_1 \cup A_2$, et si $B_2 \neq \emptyset$, alors B_2 voit A_2 .
- a voit $A_1 \cup A_2$, b voit $A_2 \cup A_3$ et ab est optionnelle.
- Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, A_i est soit une clique ou bien un stable, tel que une des conditions suivantes est vérifiée.
 - $A_1 \cup A_2$ est une clique.
 - $A_1 \cup A_2$ est un stable.
 - A_1 est un stable et A_2 est une clique avec $|A_2| \geq 2$, tels que A_1 voit ou rate A_2 et $A_3 \cup B_1 \cup B_2 = \emptyset$.
 - A_1 est un stable avec $|A_1| \geq 2$ et $|A_2| = 1$, tels que A_1 voit A_2 , de plus, a voit b et $A_3 \cup B_1 \cup B_2 = \emptyset$.
 - $|A_1| = 1$ et A_2 est une clique avec $|A_2| \geq 2$, tels que $B_1 \cup B_2 = \emptyset$, de plus, soit A_1 rate A_2 et $A_3 = \emptyset$ ou bien A_1 voit A_2 .

FIGURE 4.2. Famille \mathcal{F}_1

Famille \mathcal{F}_2 . Un graphe G appartient à la famille \mathcal{F}_2 si l'ensemble de ses sommets peut-être partitionné en trois sous ensembles $\{a, b\}$, A_1 et A_2 tel que

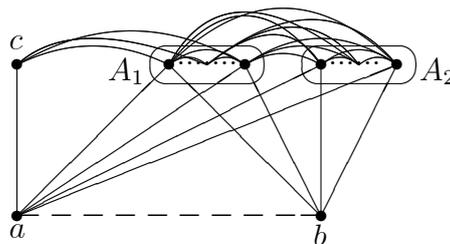
- a voit A_1 et b voit A_2 .
- Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, A_i est soit une clique ou bien un stable, tel que une des conditions suivantes est vérifiée.
 - Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, A_i est une clique avec $|A_i| \geq 2$, telle que a voit b .
 - Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, A_i est un stable avec $|A_i| \geq 2$, tel que ab est optionnelle, de plus, soit A_1 voit A_2 ou bien il existe exactement une arête entre A_1 et A_2 .
 - A_1 est une clique avec $|A_1| \geq 2$ et A_2 est un stable tels qu'il existe exactement une arête entre A_1 et A_2 .

- A_1 est un stable avec $|A_1| \geq 2$ et $|A_2| = 1$, tels que A_1 voit A_2 et ab est optionnelle.
- $|A_1| = 1$ et $|A_2| = 1$ tels que A_1 voit A_2 et a voit b .

FIGURE 4.3. Famille \mathcal{F}_2

Famille \mathcal{F}_3 . Un graphe G appartient à la famille \mathcal{F}_3 si l'ensemble de ses sommets peut-être partitionné en trois sous ensembles $\{a, b, c\}$, A_1 et A_2 tel que

- $A_1 \cup A_2$ est une clique.
- a voit $A_1 \cup A_2 \cup \{c\}$, b voit $A_1 \cup A_2$, c voit $A_1 \cup \{a\}$ et ab est optionnelle.

FIGURE 4.4. Famille \mathcal{F}_3 .

Posons $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$. Pour clore cette section, nous allons montrer que tout membre G de la famille \mathcal{F} satisfait $\Gamma_L(G) = n - 2$.

Proposition 4.2. *Si $G \in \mathcal{F}$, alors $\Gamma_L(G) = n - 2$.*

Preuve. En se basant sur la définition de \mathcal{F} , il est facile de constater que tout graphe appartenant à cette classe ne peut être ni une étoile ni un graphe complet. Par conséquent, en vertu du Théorème 2.32, on peut conclure que $\Gamma_L(G) \leq n - 2$. Pour

montrer l'égalité, il suffit de déterminer un dominant localisateur minimal D de G de taille $n - 2$. Pour ce faire, nous devons envisager les trois situations suivantes. Dans la première situation, on suppose que $G \in \mathcal{F}_1$. Dans ce cas, si $B_1 \cup B_2 \neq \emptyset$, alors on prend $D = A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2$, où au plus un des ensembles B_1 et B_2 peut-être vide. Cependant, si $B_1 \cup B_2 = \emptyset$, alors $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, où A_3 peut-être vide. Dans la deuxième situation, on suppose que $G \in \mathcal{F}_2$. Si A_1 est une clique de taille au moins deux et A_2 est un stable, alors on désigne par xy l'unique arête reliant A_1 à A_2 telle que $x \in A_1$ et $y \in A_2$. Dans ce cas, on prend $D = ((A_1 - \{x\}) \cup \{a\}) \cup ((A_2 - \{y\}) \cup \{b\})$. Concernant les autres cas, on prend $D = A_1 \cup A_2$. Dans la troisième situation, on suppose que $G \in \mathcal{F}_3$ et on prend $D = A_1 \cup A_2 \cup \{c\}$. Dans les trois situations, il est facile de vérifier que l'ensemble D est un EDL minimal de G d'ordre $n - 2$. D'où $\Gamma_L(G) \geq n - 2$. \square

4.2 Définitions et observations

Dans le reste de ce chapitre, étant donné un $\Gamma_L(G)$ -ensemble S de taille $n - 2$, nous emploierons les définitions et les notations suivantes.

- $V - S = \{x, y\}$
- $A_x = \{v \in S : v \text{ voit } x \text{ et rate } y\}$.
- $A_y = \{v \in S : v \text{ voit } y \text{ et rate } x\}$.
- $A_{xy} = \{v \in S : v \text{ voit } \{x, y\}\}$ et $B = \{v \in S : v \text{ rate } \{x, y\}\}$.
- $B_x = \{v \in B : v \text{ voit } A_x \cup A_{xy} \text{ et rate } A_y\}$.
- $B_y = \{v \in B : v \text{ voit } A_y \cup A_{xy} \text{ et rate } A_x\}$.

De ces définitions, il en découle les trois observations suivantes.

Observation 4.3. $B_x \cup \{x\}$ (respectivement, $B_y \cup \{y\}$) voit $A_x \cup A_{xy}$ (respectivement, $A_y \cup A_{xy}$) et x (respectivement, y) rate $A_y \cup B_y$ (respectivement, $A_x \cup B_x$).

Observation 4.4. Les ensembles A_x, A_y, A_{xy} et B sont mutuellement disjoints. Ainsi,

$$S = A_x \cup A_y \cup A_{xy} \cup B.$$

Observation 4.5. *La définition de S implique que soit A_x , soit A_y est non vide. Par conséquent, nous pouvons supposer par symétrie que*

$$|A_x| \geq |A_y|, \text{ où } |A_x| \geq 1 \text{ et } A_y \text{ peut-être vide.}$$

4.3 Lemmes préliminaires

Nous avons besoin d'une série de lemmes pour la preuve du Théorème 4.1. Dans tout ce qui suit, G serait un graphe connexe et S un $\Gamma_L(G)$ -ensemble de taille $n - 2$. Par ailleurs, $A_x \neq \emptyset$ selon l'Observation 4.5.

Lemme 4.6. *Si $B \neq \emptyset$, alors*

- (i) *B est un stable, $B_x \cap B_y = \emptyset$ et $B = B_x \cup B_y$.*
- (ii) *$|A_{xy}| \leq 1$. De plus, si $B_s \neq \emptyset$ pour un certain s dans $\{x, y\}$, alors $|A_s| \leq 1$.*
- (iii) *$A_y \neq \emptyset$ si et seulement si $A_{xy} = \emptyset$.*

Preuve. (i) Si v appartient à B et qu'il voit un sommet dans B , alors $S - \{v\}$ est un EDL de G , ce qui contredit la minimalité de S . Donc B est un stable. La deuxième partie découle de la définition de B_x et B_y . Pour la dernière partie, également d'après la définition de B_x et B_y , on a $B_x \cup B_y \subseteq B$. Ainsi, il suffit de montrer que $B \subseteq B_x \cup B_y$. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $B - (B_x \cup B_y)$ possède au moins un sommet, disons v . Etant donné que B est un stable et G est connexe, v doit voir au moins un sommet dans $S - B$. Ceci conduit à la même contradiction précédente. Par conséquent, $B - (B_x \cup B_y)$ est vide, ce qui implique que $B \subseteq B_x \cup B_y$.

(ii) Si $|A_{xy}| \geq 2$ (respectivement, $|A_s| \geq 2$), alors pour tout sommet v dans A_{xy} (respectivement, dans A_s), l'ensemble $S - \{v\}$ constitue un EDL de G , contradiction. Par conséquent, on a $\max\{|A_{xy}|, |A_s|\} \leq 1$.

(iii) La condition suffisante est évidente. Montrons alors la condition nécessaire. Si $A_{xy} \neq \emptyset$, alors d'après (ii), on peut prendre $A_{xy} = \{v\}$. Dans ce cas, comme v voit B et $\{x, y\}$ rate B , alors $S - \{v\}$ est un EDL de G , contradiction. \square

Lemme 4.7. *Si $D \in \{A_x, A_y, A_{xy}\}$, alors D est soit une clique, soit un stable dans G .*

Preuve. Le cas où $|D| \in \{1, 2\}$ est trivial. Supposons donc que $|D| \geq 3$. Si D n'est ni une clique ni un stable, alors il possède au moins deux sommets non adjacents, dont l'un, disons v , n'est pas isolé dans D . Dans ce cas, l'ensemble $S - \{v\}$ serait un EDL de G , contradiction. \square

Lemme 4.8. *Soit $z \in A_{xy}$ et supposons que A_y est non vide. Alors,*

- (i) *si z voit A_x (respectivement, A_y), alors z rate A_y (respectivement, A_x),*
- (ii) *A_x rate A_y .*

Preuve. (i) Sinon $S - \{z\}$ serait un EDL de G , contradiction.

(ii) Supposons au contraire qu'il existe deux sommets $u \in A_x$ et $v \in A_y$ tels que u voit v . Alors d'après (i), on peut supposer par symétrie que z rate u . Mais dans ce cas, étant donné que $A_{xy} \neq \emptyset$, l'ensemble $S - \{u\}$ forme un EDL de G , contradiction. \square

Lemme 4.9. *Si A_{xy} est non vide et A_x est une clique d'ordre au moins deux, alors*

- (i) *$A_x \cup A_{xy}$ est une clique,*
- (ii) *si $A_y \neq \emptyset$, alors A_y est un stable qui rate $A_x \cup A_{xy}$.*

Preuve. (i) Soit $u \in A_x$ et $z \in A_{xy}$. Alors z voit u car sinon $S - \{u\}$ serait un EDL de G , contradiction. D'où A_{xy} voit A_x . Par ailleurs, z voit tous les autres sommets de A_{xy} car sinon A_{xy} serait un stable (d'après le Lemme 4.7) et par conséquent, en tenant en considération le fait que z voit A_x , l'ensemble $S - \{z\}$ doit être également un EDL de G , contradiction.

(ii) En combinant le Lemme 4.9-(i) avec le Lemme 4.8-(i) et (ii), on conclut que A_y rate $A_x \cup A_{xy}$. Montrons à présent que A_y est un stable. Le cas où $|A_y| = 1$ est trivial. Donc admettons que $|A_y| \geq 2$, et supposons au contraire que A_y n'est pas un stable. En vertu du Lemme 4.7, A_y est une clique. Par conséquent, selon le Lemme 4.9-(i), $A_y \cup A_{xy}$ doit être également une clique. Mais ceci contredit le fait que A_y rate $A_x \cup A_{xy}$. \square

Lemme 4.10. *Supposons que A_{xy} est non vide et A_x est un stable d'ordre au moins deux. Alors*

- (i) *Si $A_y \neq \emptyset$, alors A_x rate A_{xy} ,*

(ii) Si $A_y \neq \emptyset$ est un stable et S n'est pas un stable, alors $|A_y| = 1$ et $A_y \cup A_{xy}$ est une clique.

(iii) Si $A_y = \emptyset$ et $|A_{xy}| \geq 2$, alors A_{xy} est une clique et A_x voit (ou rate) A_{xy} .

Preuve. (i) Soit $u \in A_x$. D'après le lemme 4.8-(ii), u rate A_y . Dans ce cas, u rate aussi A_{xy} car sinon $S - \{u\}$ serait un EDL de G , contradiction. D'où A_x rate A_{xy} .

(ii) Soit $z \in A_{xy}$. Tout d'abord, il convient de noter qu'en vertu du Lemme 4.6-(iii), $B = \emptyset$ puisque A_{xy} et A_y sont non vides. Commençons par montrer la première partie. Supposons au contraire que $|A_y| \geq 2$. Alors d'après (i) et par symétrie, A_y rate A_{xy} . En combinant ce fait avec (i), on voit que A_{xy} rate $A_x \cup A_y$. Ceci, en tenant compte du Lemme 4.8-(ii) et du fait que S n'est pas un stable, A_{xy} doit être une clique de taille au moins deux. Mais dans ce cas, $S - \{z\}$ serait un EDL de G , contradiction. D'où $|A_y| = 1$.

Montrons maintenant la deuxième partie, c'est à dire $A_y \cup A_{xy}$ est une clique. D'après les Lemmes 4.10-(i) 4.8-(ii), on voit que A_x rate $A_{xy} \cup A_y$. De ce fait, si $|A_{xy}| = 1$, alors $A_y \cup A_{xy}$ est une clique puisque $|A_y| = 1$ et S n'est pas un stable. Considérons à présent le cas où $|A_{xy}| \geq 2$ et posons $A_y = \{v\}$. Nous allons montrer que A_{xy} est une clique. Supposons au contraire que A_{xy} est un stable. Etant donné que S n'est pas un stable et A_x rate $A_{xy} \cup A_y$, v voit au moins un sommet dans A_{xy} , disons z . Dans ce cas, $S - \{z\}$ serait un EDL de G , contradiction. D'où A_{xy} est une clique. Si v rate un certain sommet $z \in A_{xy}$, alors $S - \{z\}$ serait un EDL de G , contradiction. D'où v voit A_{xy} , ce qui implique que $A_y \cup A_{xy}$ est une clique.

(iii) Puisque $|A_{xy}| \geq 2$, alors $B = \emptyset$ selon la première partie du Lemme 4.6-(ii). Nous commençons par montrer que A_{xy} est une clique. Supposons le contraire. Alors, d'après le Lemme 4.7, A_{xy} est donc un stable. Etant donné que A_x et A_{xy} sont des stables, A_y est vide et S n'est pas un stable, il existe au moins un sommet, disons $z \in A_{xy}$ qui voit au moins un sommet dans A_x . Mais dans ce cas, $S - \{z\}$ serait un EDL de G , contradiction. D'où A_{xy} est une clique.

Montrons maintenant la deuxième partie. Supposons au contraire qu'il y a un sommet, disons w appartenant à A_x (respectivement, A_{xy}) qui voit un sommet et rate un autre dans A_{xy} (respectivement, A_x). Etant donné que $A_y = \emptyset$, $S - \{w\}$ serait un EDL de G , contradiction. \square

Lemme 4.11. *Si A_x et A_y sont des singletons, A_{xy} est non vide et S n'est pas un stable, alors $A_x \cup A_{xy}$ ou $A_y \cup A_{xy}$ est une clique.*

Preuve. Posons $A_x = \{u\}$ et $A_y = \{v\}$. Commençons par examiner le cas où $|A_{xy}| = 1$. Puisque S n'est pas un stable, l'un des deux sommets u et v doit être adjacent à l'unique sommet de A_{xy} . D'où, la proposition est prouvée.

Supposons maintenant que $|A_{xy}| \geq 2$. Alors, en vertu du Lemmes 4.6-(ii), $B = \emptyset$. D'autre part, comme A_{xy} et A_y sont non vides, alors A_x rate A_y selon le Lemme 4.8-(ii). Nous allons montrer en premier lieu que A_{xy} est une clique. Supposons au contraire que A_{xy} est un stable. Etant donné que $B = \emptyset$ et S n'est pas un stable, un sommet parmi u et v , disons u (par symétrie) doit voir au moins un sommet de A_{xy} , disons z . Dans ce cas, l'ensemble $S - \{z\}$ est un EDL de G , contradiction. D'où A_{xy} est une clique. Maintenant, nous allons montrer que A_{xy} voit A_x ou A_y . En effet, si A_{xy} rate $A_x \cup A_y$, alors pour tout $z \in A_{xy}$, $S - \{z\}$ est un EDL de G , contradiction. Donc, il existe au moins une arête, disons wz entre A_{xy} et $A_x \cup A_y$ telle que $w \in A_x \cup A_y$ et $z \in A_{xy}$. Par symétrie, on peut supposer que $w = u$. Si u rate un sommet dans $A_{xy} - \{z\}$, alors $S - \{u\}$ est un EDL de G , contradiction. D'où, u voit A_{xy} , ce qui implique que $\{u\} \cup A_{xy}$ est une clique. Cela conclut la preuve de ce lemme. \square

A présent, nous sommes en mesure de montrer le théorème qui caractérise les graphes pour lesquels $\Gamma_L(G) = n - 2$.

4.4 Preuve du Théorème 4.1

Preuve. La Proposition 4.2 établit que la condition suffisante est remplie. Nous allons maintenant démontrer que cette condition est également nécessaire. Soit S est un $\Gamma_L(G)$ -ensemble de taille $n - 2$ et posons $V - S = \{x, y\}$. D'après les Lemmes 4.6 et 4.7, on peut supposer tout au long de cette preuve que $B = B_x \cup B_y$ et que chacun des ensembles A_x , A_y et A_{xy} est soit une clique, soit un stable. Nous allons maintenant examiner deux cas selon que A_{xy} est vide ou non.

Cas 1. $A_{xy} \neq \emptyset$.

Si S est un stable de G , alors d'après les Observations 4.3 et 4.4, on a $B = \emptyset$. Dans

ce cas, $G \in \mathcal{F}_1$ avec

$$a = x, b = y, A_1 = A_x, A_2 = A_{xy}, A_3 = A_y, B_1 = B_x, B_2 = B_y, \quad (4.1)$$

tels que $B_1 \cup B_2 = \emptyset$ et A_3 peut-être vide.

Supposons maintenant que S n'est pas un stable. Comme $A_{xy} \neq \emptyset$ et $A_x \neq \emptyset$, le Lemme 4.6-(ii) et (iii) indique que

$$\text{si } B_s \neq \emptyset \text{ pour un certain } s \in \{x, y\}, \text{ alors } |A_{xy}| = 1 \text{ et } A_y = \emptyset. \quad (4.2)$$

Dans ce qui suit, nous allons distinguer deux cas selon la taille de A_x .

Cas 1.1. $|A_x| \geq 2$.

Notons d'abord que $B_x = \emptyset$ d'après la deuxième partie du Lemme 4.6-(ii). Dans la suite, nous allons discuter la structure de G selon que A_x soit une clique ou bien un stable. Tout d'abord, supposons que A_x est une clique. Etant donné que $B_x = \emptyset$, le Lemme 4.9 montre que $G \in \mathcal{F}_1$ où (4.1) est remplie, avec $B_1 = \emptyset$ et $A_3 = A_y$ qui peut être vide. En outre, en utilisant (4.2), on voit que si $|A_y| \geq 2$ ou $|A_{xy}| \geq 2$, alors $B_2 = B_y = \emptyset$. En revanche, si $|A_y| \leq 1$ et $|A_{xy}| = 1$, alors B_2 peut-être non vide.

Supposons maintenant que A_x est un stable. Il convient de mentionner que le cas où A_y est une clique d'ordre au moins deux est déjà considéré (par symétrie) dans Cas 1.1. Par conséquent, nous supposerons désormais que A_y (s'il existe) est un stable. En vertu du Lemme 4.10-(ii) et (iii), on a $|A_y| \leq 1$. De ce fait, deux cas sont à distinguer selon que A_y est vide ou il contient uniquement un seul sommet.

Cas 1.1.1. $|A_y| = 1$.

En utilisant (4.2), on voit que $B_y = \emptyset$, ce qui implique que $B = \emptyset$ (puisque $B_x = \emptyset$). En prenant ceci en considération avec les Lemmes 4.8-(ii) et 4.10-(i) et (ii), on conclut que $G \in \mathcal{F}_1$ avec $a = y, b = x, A_1 = A_y, A_2 = A_{xy}, A_3 = A_x$ et $B_1 \cup B_2 = \emptyset$.

Cas 1.1.2. $A_y = \emptyset$.

Ici, nous allons distinguer deux possibilités selon la taille de A_{xy} .

Possibilité 1. $|A_{xy}| \geq 2$.

Alors $B = \emptyset$ selon le Lemme 4.6-(ii). Par conséquent, en utilisant le Lemme 4.10-(iii), on voit que $G \in \mathcal{F}_1$ où (4.1) reste valide et $A_3 = B_1 \cup B_2 = \emptyset$.

Possibilité 2. $|A_{xy}| = 1$.

Posons $A_{xy} = \{z\}$. Si z rate A_x , alors $B_y \neq \emptyset$ puisque S n'est pas un stable. Ceci implique que $G \in \mathcal{F}_1$ où (4.1) est satisfaite, $B_2 \neq \emptyset$ et $B_1 \cup A_3 = \emptyset$. Supposons maintenant que z voit un sommet, disons u dans A_x et définissons l'ensemble suivant.

$$R_1 = \{w \in A_x \cup \{y\} : w \text{ voit } \{x, z\}\}.$$

Puisque u voit $\{x, z\}$, alors $R_1 \neq \emptyset$. Si $y \notin R_1$, alors x rate y , ce qui implique que $G \in \mathcal{F}_1$ où

$$\begin{aligned} a = z, \quad b = x, \quad A_1 = B_y \cup \{y\}, \quad A_2 = R_1, \quad A_3 = A_x - R_1, \\ \text{où } B_1 \cup B_2 = \emptyset \text{ et } A_x - R_1 \text{ peut-être vide.} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Si $y \in R_1$, alors x voit y , ce qui implique que $G \in \mathcal{F}_1$ tel que soit $B_y \neq \emptyset$, et dans ce cas (4.3) est satisfaite avec $A_1 = B_y$; ou bien $B_y = \emptyset$, et dans ce cas, $a = x$, $A_3 \cup B_1 \cup B_2 = \emptyset$ et l'une des deux options suivantes est vraie.

- $A_x - R_1 \neq \emptyset$, ce qui implique que $b = z$, $A_1 = A_x - R_1$ et $A_2 = R_1$
- $A_x - R_1 = \emptyset$, ce qui implique que $b = y$, $A_1 = A_x$ et $A_2 = \{z\}$.

Cas 1.2. $|A_x| = 1$.

D'après l'Observation (4.5), on a $|A_y| \leq 1$. De ce fait, nous allons distinguer deux cas selon la taille de A_y .

Cas 1.2.1. $|A_y| = 1$.

D'après le Lemme 4.6-(iii), $B = \emptyset$ car A_{xy} et A_y sont non vides. Ainsi, en vertu du Lemme 4.11, et par symétrie, on peut supposer que $A_x \cup A_{xy}$ est une clique. Ainsi, d'après le Lemme 4.8-(i) et (ii) et étant donné que $B = \emptyset$, on voit que $G \in \mathcal{F}_1$ où (4.1) est vérifiée et $B_1 \cup B_2 = \emptyset$.

Cas 1.2.2. $A_y = \emptyset$.

Supposons d'abord que $A_x \cup A_{xy}$ est une clique. Si $|A_{xy}| = 1$, alors $G \in \mathcal{F}_1$ tel que (4.1) est satisfaite, $A_3 = \emptyset$ et chacun des ensembles B_1 et B_2 peut-être vide. Si $|A_{xy}| \geq 2$, alors $B = \emptyset$ selon le Lemme 4.6-(ii), et dans ce cas, encore une fois $G \in \mathcal{F}_1$ tel que (4.1) est vérifiée et $A_3 \cup B_1 \cup B_2 = \emptyset$.

Supposons maintenant que $A_x \cup A_{xy}$ est un stable. Comme S n'est pas un stable, alors l'un des ensembles B_x et B_y doit être non vide. Etant donné que A_{xy} est non vide, le Lemme 4.6-(ii) implique que A_{xy} est un singleton. Mais là encore, on constate que $G \in \mathcal{F}_1$ tel que (4.1) est valide, $A_3 = \emptyset$ et au moins l'un des ensembles B_1 et B_2 est non vide.

Enfin, supposons que $A_x \cup A_{xy}$ n'est ni une clique ni un stable. Clairement $|A_{xy}| \geq 2$, et par conséquent $B = \emptyset$ selon le Lemme 4.6-(ii). Si A_x rate A_{xy} , alors étant donné que S n'est pas un stable, on constate que A_{xy} est une clique. Ceci implique que $G \in \mathcal{F}_1$ tel que $a = x$, $b = y$, $A_1 = A_x$, $A_2 = A_{xy}$ et $A_3 \cup B_1 \cup B_2 = \emptyset$. Supposons à présent que A_x voit au moins un sommet dans A_{xy} , disons z . Si A_{xy} est un stable, alors étant donné que $|A_{xy}| \geq 2$ et $B = \emptyset$, $S - \{z\}$ serait un EDL de G , contradiction. D'où, A_{xy} est une clique. Posons $A_x = \{u\}$ et

$$R_2 = \{w \in A_{xy} : w \text{ voit } u\}.$$

Puisque u voit z , il est aisé de constater que $R_2 \neq \emptyset$. En outre, étant donné que $\{u\} \cup A_{xy}$ n'est pas une clique, $A_{xy} - R_2 \neq \emptyset$. Ceci implique que $G \in \mathcal{F}_3$ avec $a = x$, $b = y$, $c = u$, $A_1 = R_2$ et $A_2 = A_{xy} - R_2$.

Case 2. $A_{xy} = \emptyset$.

Clairement A_x et A_y sont non vides, et d'après l'observation 4.5, $|A_x| \geq |A_y| \geq 1$. Soit $u \in A_x$ et $v \in A_y$ et supposons d'abord que S est un stable de G . Alors $B = \emptyset$, et puisque G est connexe, x voit y . Considérons le cas où $|A_x| = 1$. Alors $A_x = \{u\}$ et d'après l'Observation (4.5), on a aussi $A_y = \{v\}$. Dans ce cas, $G \in \mathcal{F}_2$ avec $a = x$, $b = y$, $A_1 = \{u\}$ et $A_2 = \{v\}$. Si $|A_x| \geq 2$, alors $G \in \mathcal{F}_1$ avec $a = x$, $b = v$, $A_1 = A_x$, $A_2 = \{y\}$, $A_3 \cup B_1 = \emptyset$ et $B_2 = A_y - \{v\}$ (B_2 peut-être vide).

Nous allons maintenant examiner le cas où S n'est pas stable, ce qui nous amène à distinguer deux cas différents.

Cas 2.1 $|A_x| = 1$.

D'après l'Observation (4.5), on trouve $|A_y| = 1$. Supposons que $B = \emptyset$. Puisque S n'est pas stable, alors u voit v . Par ailleurs, si x voit y , alors $G \in \mathcal{F}_2$ avec $a = x$, $b = y$, $A_1 = \{u\}$ et $A_2 = \{v\}$. Autrement, si x rate y , alors $G \in \mathcal{F}_1$ avec $a = u$, $b = y$, $A_1 = \{x\}$, $A_2 = \{v\}$ et $A_3 \cup B_1 \cup B_2 = \emptyset$.

Passons maintenant au cas où $B \neq \emptyset$. Alors au moins l'un des ensembles B_x et B_y (disons B_x) est non vide. Supposons en premier lieu que x voit y et u rate v . De ce fait, on a deux options à distinguer.

- Soit $B_y = \emptyset$, ce qui implique $G \in \mathcal{F}_1$ tel que $a = u$, $b = y$, $A_1 = B_x$, $A_2 = \{x\}$, $A_3 = \{v\}$ et $B_1 \cup B_2 = \emptyset$.
- Soit $B_y \neq \emptyset$ et dans ce cas, $G \in \mathcal{F}_2$ tel que $a = u$, $b = v$, $A_1 = B_x \cup \{x\}$ et $A_2 = B_y \cup \{y\}$.

Maintenant, supposons que x rate y et u voit v . Dans ce cas, $G \in \mathcal{F}_1$ tel que $a = u$, $b = y$, $A_1 = B_x \cup \{x\}$, $A_2 = \{v\}$, $B_2 = B_y$ (B_2 peut-être vide) et $A_3 \cup B_1 = \emptyset$.

Enfin, supposons que x voit y et u voit v . Là encore, on distingue deux options.

- Soit $B_y = \emptyset$, ce qui implique que $G \in \mathcal{F}_1$ tel que $a = u$, $b = y$, $A_1 = B_x$, $A_2 = \{x, v\}$ et $A_3 \cup B_1 \cup B_2 = \emptyset$.
- Soit $B_y \neq \emptyset$ et donc $G \in \mathcal{F}_2$ tel que $a = u$, $b = v$, $A_1 = B_x \cup \{x\}$ et $A_2 = B_y \cup \{y\}$.

Cas 2.2. $|A_x| \geq 2$. Alors $B_x = \emptyset$ d'après le Lemme 4.6-(ii).

Cas 2.2.1 A_x rate A_y . Puisque G est connexe, alors x voit y . Dans la suite, nous allons considérer deux possibilités.

Possibilité 1. A_x et A_y sont des stables.

Etant donné que S n'est pas un stable, alors $B_y \neq \emptyset$ et par conséquent $A_y = \{v\}$ selon le Lemme 4.6-(ii). De ce fait, on constate que $G \in \mathcal{F}_1$ tel que $a = x$, $b = v$, $A_1 = A_x$, $A_2 = \{y\}$, $A_3 = B_y$ et $B_1 \cup B_2 = \emptyset$.

Possibilité 2. A_x est une clique.

Considérons d'abord la cas où A_y est un stable. Si $|A_y| \geq 2$, alors $B_y = \emptyset$ d'après le Lemme 4.6-(ii). Dans ce cas, $G \in \mathcal{F}_1$ tel que $a = u$, $b = y$, $A_1 = A_x - \{u\}$, $A_2 = \{x\}$, $A_3 = A_y$ et $B_1 \cup B_2 = \emptyset$. Si $|A_y| = 1$, alors $A_y = \{v\}$, et dans ce cas, on a deux options à distinguer.

- Soit $B_y = \emptyset$, ce qui implique que $G \in \mathcal{F}_1$ tel que $a = u$, $b = y$, $A_1 = A_x - \{u\}$, $A_2 = \{x\}$, $A_3 = \{v\}$ et $B_1 \cup B_2 = \emptyset$.
- Soit $B_y \neq \emptyset$, et donc $G \in \mathcal{F}_2$ tel que $a = u$, $b = v$, $A_1 = (A_x - \{u\}) \cup \{x\}$ et $A_2 = B_y \cup \{y\}$.

Si A_y est une clique d'ordre au moins 2, alors $B_y = \emptyset$. Dans ce cas, $G \in \mathcal{F}_2$ tel que $a = x$, $b = y$, $A_1 = A_x$ et $A_2 = A_y$.

Cas 2.2.2. u voit v . Dans ce cas, A_x est un stable, autrement $S - \{u\}$ serait un EDL de G , contradiction. Dans la suite, on considère deux possibilités.

Possibilité 1. $|A_y| \geq 2$.

Alors $B_y = \emptyset$ d'après le Lemme 4.6-(ii). D'où $B = \emptyset$ puisque $B_x = \emptyset$, et par symétrie avec A_x , l'ensemble A_y est également un stable. De ce fait, on affirme que A_x voit A_y . En effet, si u rate des sommets dans A_y , alors étant donné que u voit v , $S - \{u\}$ serait un EDL de G , contradiction. D'où u voit A_y et par symétrie, v voit aussi A_x . Un raisonnement similaire au précédent appliqué à tout sommet de $A_x \cup A_y$, montre que A_x voit A_y . Ceci termine la preuve de l'affirmation. De cette affirmation, étant donné que A_x et A_y sont des stables d'ordre au moins deux et que $B = \emptyset$, on conclut que $G \in \mathcal{F}_2$ où $a = x$, $b = y$, $A_1 = A_x$ et $A_2 = A_y$.

Possibilité 2. $|A_y| = 1$.

Dans ce cas, $A_y = \{v\}$. Posons

$$R_3 = \{w \in A_x : w \text{ voit } v\}.$$

Puisque que v voit u , alors $R_3 \neq \emptyset$. Supposons d'abord que $B_y \neq \emptyset$. Dans ce cas, $G \in \mathcal{F}_1$ où $a = v$, $b = x$, $B_1 \cup B_2 = \emptyset$ et $A_3 = A_x - R_3$ (A_3 peut-être vide). De plus,

- si x voit y , alors $A_1 = B_y$ et $A_2 = R_3 \cup \{y\}$;
- si x rate y , alors $A_1 = B_y \cup \{y\}$ et $A_2 = R_3$.

Examinons maintenant le cas où $B_y = \emptyset$. Supposons d'abord que x rate y . Dans ce cas, $G \in \mathcal{F}_1$ où $a = v$, $b = x$, $A_1 = \{y\}$, $A_2 = R_3$, $B_1 \cup B_2 = \emptyset$ et $A_3 = A_x - R_3$ (A_3 peut-être vide). Supposons maintenant que x voit y . Alors

- si $A_x - R_3 = \emptyset$, alors $G \in \mathcal{F}_2$ avec $a = x$, $b = y$, $A_1 = A_x$ et $A_2 = A_y$.
- si $A_x - R_3 \neq \emptyset$, alors $G \in \mathcal{F}_1$ tel que $a = x$, $b = v$, $A_1 = A_x - R_3$, $A_2 = R_3 \cup \{y\}$ et $A_3 \cup B_1 \cup B_2 = \emptyset$.

Ceci achève la preuve du Théorème 4.1. □

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au cours de cette thèse, notre attention s'est portée sur un concept spécifique de la domination dans les graphes, à savoir la domination localisatrice. Nous avons concentré nos études sur deux axes principaux. Dans le premier axe, nous avons examiné les graphes dont le nombre de domination localisatrice diminue sous l'effet de la contraction d'une arête quelconque. Plus précisément, nous avons caractérisé tous les graphes connexes $3\text{-}\gamma_L$ -point-critiques. Dans le deuxième axe, nous avons poursuivi notre étude sur la domination localisatrice en considérant un autre paramètre, à savoir le nombre de domination localisatrice supérieur Γ_L . Au cours de notre recherche bibliographique, nous avons remarqué que peu de recherches ont été menées sur ce paramètre. Ce manque d'intérêt pour son étude peut être expliqué par les difficultés liées au problème de minimalité. Notre contribution sur ce paramètre a été portée essentiellement sur la caractérisation des graphes connexes d'ordre au moins 4 pour lesquels le nombre de domination localisatrice supérieur est égal à $n - 2$.

Les travaux de recherches réalisés durant cette thèse ouvrent la voie à d'autres perspectives dans ce domaine. Les problèmes de recherche identifiés se résument comme suit.

- Poursuivre l'étude sur la caractérisation des graphes $k\text{-}\gamma_L$ -point-critiques pour $k \geq 4$, ainsi que la caractérisation des graphes $k\text{-}\gamma_L^t$ -point-critiques pour tout entier $k \geq 2$.
- Considérer d'autres classes de graphes critiques ou stables sous l'effet de la suppression d'un sommet ou d'une arête l'ajout ou la contraction d'arête pour γ_L et γ_L^t .
- Explorer le paramètre de la domination localisatrice Γ_L et trouver des bornes pour des classes de graphes simples tels que les graphes blocs, cactus, et bipartis.
- Caractériser les graphes extrémaux atteignant les bornes obtenues et établir des conditions nécessaires et suffisantes pour la minimalité des ensembles dominants localisateurs.

- Etablir des relations entre Γ_L et les autres paramètres (domination) tels que $\gamma_{\times 2}$, γ_L^t , γ_L^{pr} , ρ etc
- Caractériser les arbres, tels que $\Gamma_L(T) = \beta_0(T)$ et $\gamma_L(T) = \Gamma_L(T)$.
- Etudier la complexité algorithmique des graphes k - γ_L -point-critiques pour $k \geq 1$.
- Chercher des algorithmes efficaces qui déterminent la valeur exacte de Γ_L dans certaines classes de graphes ayant une structure simple telle que les arbres blocs, cactus, et bipartis.

RÉFÉRENCES

- [1] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen, C. Suffel, *Domination alteration sets in graphs*. Discrete Mathematics 74 (1983) 153-161.
- [2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*. 2ème edition. Dunod, Paris, 1973.
- [3] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, *Identifying and Locating-dominating Codes on Chains and Cycles*. European Journal of Combinatorics 25 (2004) 969–987.
- [4] M. Blidia, M. Chellali, *Locating-domination dot-critical graphs*. J. Comb. Math and Comb. Computing 104 (2018) 121–141.
- [5] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron, *Independence and 2-domination in trees*. Australasian Journal of Combinatorics 33 (2005) 317–327.
- [6] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron, N. Meddah, *On k -independence in graphs with emphasis on trees*. Discrete Math 307 (2007) 2209–2216.
- [7] M. Blidia, M. Chellali, S. Khelifi, F. Maffray, *Double domination edge removal critical graphs*. Australasian Journal of Combinatorics 48 (2010) 285–299.
- [8] M. Blidia, M. Chellali, R. Lounès, F. Maffray, *Characterizations of trees with unique locating dominating sets*. J. Combin. Math. Combin. Comput 76 (2011) 225–232.
- [9] M. Blidia, O. Favaron, R. Lounes, *Locating-domination, 2-domination and independence in trees*. Australasian Journal of Combinatorics 33 (2005) 317–327.
- [10] M. Blidia, M. Chellali, F. Maffray, J. Moncel, A. Semri, *Locating-domination and identifying codes in trees*. Australasian Journal of Combinatorics 39 (2007) 219–232.
- [11] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph theory*. Springer, 2008.

- [12] R. C. Brigham, P. Z. Chinn, R. D. Dutton, *A study of vertex domination-critical graphs*. Tech. Report M-2, Department of Mathematics, University of Central Florida (1984).
- [13] R. C. Brigham, P. Z. Chinn, R. D. Dutton, *Vertex domination-critical graphs*. Networks 18 (1988) 173–179.
- [14] R. C. Brigham, R. D. Dutton, *An extremal problem for edge domination in sensitive graphs*. Discrete Appl. Math. 20 (1988) 113–125.
- [15] T. Burton, D. P. Sumner, *Domination dot-critical graphs*. Discrete Mathematics 306 (2006) 11–18.
- [16] J. Caceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, M. L. Puertas, *Locating dominating codes: bounds and extremal cardinalities*. Appl. Math. Comput 220 (2013) 38–45.
- [17] J. Carrington, F. Harary, T. W. Haynes, *Changing and unchanging the domination number of a graph*. J. Combin. Comput. 9 (1991) 57–63.
- [18] M. Chellali, *On locating and differentiating-total domination in trees*. Discussiones Mathematicae Graph Theory 28 (3) (2008) 383–392.
- [19] M. Chellali, M. Mimouni, P. Slater, *On locating-domination in graphs*. Discussiones Mathematicae. Graph Theory 30 (2010) 223–235.
- [20] M. Chellali, N. J. Rad, *Locating-total domination critical graphs*. Australasian Journal of Combinatorics 45 (2009) 227–234.
- [21] M. Chellali, N. J. Rad, *Open neighborhood locating-dominating in Graphs*. Eletronic Journal of Graph Theory and Applications 2 (2) (2014) 87–98.
- [22] M. Chellali, N. J. Rad, *On (fully) total domination dot-stable graphs*. The Bulletin of ICA 66 (2012) 109–120.
- [23] XG. Chen, M. Y. Sohn, *Bounds on locating-total domination number of a tree*. Discrete Appl. Math. 159 (2011) 769–773.

- [24] Z. Chengye, Y. Yuansheng, S. Linlin, *Domination dot-critical graphs with no critical vertices*. Discrete Mathematics 308 (2008) 3241–3248.
- [25] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, S. T. Hedetniemi, *Total domination in graphs*. Networks 10 (1980) 211–219.
- [26] E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*. Net-works 7 (1977) 247–261.
- [27] E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi, *Independent graphs*. Congr. Numer. X (1974) 471–491.
- [28] W. Dali, M. Blidia, *A characterization of locating-domination edge critical graph*. Australasian Journal of Combinatorics 44 (2009) 297–300.
- [29] W. Dali, M. Blidia, *A characterization of total locating-domination edge critical graph*. Discussiones Mathematicae Graph Theory 31 (2011) 197–202.
- [30] W. Dali, M. Blidia, *On locating and locating-total domination edge addition critical graphs*. Utilitas Mathematica 94 (2014) 199–219.
- [31] C. F. De Jaenish, *Applications de l'analyse mathématique au jeu d'échecs*. Petrograd, 1862.
- [32] W. J. Desormeaux, T. W. Haynes, M. A. Henning, *Total domination critical and stable upon edge addition*. Discrete Applied Mathematics 310 (2010) 3446–3454.
- [33] W. J. Desormeaux, T. W. Haynes, M. A. Henning, *Total domination critical and stable upon edge removal*. Discrete Applied Mathematics 158 (2010) 1587–1592.
- [34] R. Diestel, *Graph Theory*. Springer, second edition, New York, 2000.
- [35] G.A. Dirac, *Note on the colouring of graphs*. Mathematische Zeitschrift 54 (4) (1951) 347–353.
- [36] NT. Dung, NTT. Tam, HL. Truong, HN. Yen, *Critical paired dominating sets and irreducible decompositions of powers of edge ideals*. Acta Mathematica Vietnamica 44 (2019) 587–601.

- [37] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 8 (1741) 128–140.
- [38] M. Edwards, *Criticality concepts for paired domination in graphs*. Master of Sciences, Department of Mathematics and Statistics, 2006.
- [39] P. Erdos, F. Harary, W.T Tutte, *On the dimension of a graph*. Deepblue.lib.unich.edu, (1965).
- [40] M. Farber, *Domination, independent domination and duality in stronger chordal graphs*. Discrete Applied Mathematics 7 (1984) 115–130.
- [41] A. Finbow, B. L. Hartnell, *On locating-domination sets and well-covered graphs*. Congr. Numer. 65 (1988) 191–200.
- [42] J. F. Fink, M. S. Jacobson, *n-domination in graphs, n-dependence and forbidden subgraphs*. [in:] *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer*. John Wiley and Sons, New York, (1985) 283–300.
- [43] F. Foucaud, M. A. Henning, *Location-domination and matching in cubic graphs*. Discrete Math. 339 (2016) 1221–1231.
- [44] F. Foucaud, M. A. Henning, *Location-domination in line graphs*. Discrete Math. 340 (2017) 3140–3153.
- [45] F. Foucaud, M. A. Henning, C. Lowenstein, T. Sasse, *Locating-dominating sets in twin-free graphs*. Discrete Appl. Math. 200 (2016) 52–58.
- [46] J. F. Frick, G. H. Frickey, C. M. Maynhardt, R. D. Skaggs, *Critical graphs with respect to vertex identification*. Utilitas Mathematica 76 (2008) 213.
- [47] J. Fulman, *Domination in vertex and edge critical graphs*. Manuscript, Department of Mathematics, Harvard University (1994).
- [48] J. Fulman, D. Hanson, G. MacGillivray, *Vertex domination-critical graphs*. Networks 25 (1995) 41–43.
- [49] D. Garijo, A. González, A. Márquez, *The difference between the metric dimension and the determining number of a graph*. Appl. Math. Comput. 249 (2014).

- [50] M. C. Golumbic, *Algorithmic graph theory and perfect Graphs*. Annals of Discrete Mathematics 57, 2nd Edition, North Holland, 2004.
- [51] F. Harary, T. W. Haynes, *Double domination in graphs*. Ars Combin 55 (2000) 201–213.
- [52] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *Fundamentals of domination in graphs*. Marcel Dekker New York, 1998.
- [53] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *Domination in Graphs*. Advanced Topics, Marcel Dekker New York, 1998.
- [54] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, M. A. Henning (Eds), *Topics in Domination in Graphs*. Developments in Mathematics, Springer, Cham 64 (2020).
- [55] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, M. A. Henning (Eds), *Structures of Domination in Graphs*. Developments in Mathematics, Springer, Cham 66 (2021).
- [56] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, M. A. Henning, *Domination in Graphs: Core Concepts*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2023.
- [57] T. W. Haynes, P. J. Slater, *Paired domination in graphs*. Networks 32 (1998) 199–206.
- [58] T. W. Haynes, A. M. Henning, J. Howard, *Locating and total dominating sets in trees*. Discrete Applied Mathematics 154 (2006) 1293–1300.
- [59] T. W. Haynes, D. W. Thacker, *Double domination edge critical graphs*. Utilitas Mathematica 78 (2009) 139–149.
- [60] S. T. Hedetniemi, R. C. Laskar, *Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of parameters*. Discrete mathematics 86 (1990) 257–477.
- [61] S. T. Hedetniemi, R. C. Laskar, *Introduction*. Discrete Mathematics 86 (1990) 3–9.
- [62] M. A. Henning, *A Survey of selected recent results on total domination in graphs*. Discrete Mathematics 309 (2009) 32–63.
- [63] M. A. Henning, C. Löwenstein, *Locating-total domination in claw-free cubic graphs*. Discrete Mathematics 312 (21) (2012) 3107–3116.

- [64] M. A. Henning, J. McCoy, *Locating and paired-domination sets in graphs*. Discrete Applied Mathematics 157 (2009) 3268–3280.
- [65] S. Huang, E. Shan, L. Kang, *Perfect matchings in paired domination vertex critical graphs*. Journal of Combinatorial Optimization 23 (2012) 507–518.
- [66] M. A. Henning, C. M. Mynhardt, *The diameter of paired-domination vertex critical graphs*. Czechoslovak Mathematical Journal 58 (2008) 887–897.
- [67] M. A. Henning, L. C. Van der Merwe, *Properties of total domination edge-critical graphs*. Discrete Applied Mathematics 157 (2009) 1969–1973.
- [68] M. A. Henning, N. J. Rad, *On total domination vertex critical graphs of high connectivity*. Discrete Applied Mathematics 158 (2010) 147–153.
- [69] M. A. Henning, C. Lowenstein, *Locating-total domination in claw-free cubic graphs*. Discret. Math 312 (2012) 3107–3116.
- [70] M. A. Henning, N. J. Rad, *Locating-total domination in graphs*. Discrete Applied Mathematics 160 (2012) 1986–1993.
- [71] M. A. Henning, L. C. Van der Merwe, *The maximum diameter of total domination edge-critical graphs*. Discrete Applied Mathematics 312 (2012) 397–404.
- [72] X. Hou, M. Edwards, *Paired domination vertex critical graphs*. Graphs and Combinatorics 24 (2008) 453–459.
- [73] S. Khelifi, M. Chellali, *Double domination edge removal critical graphs*. Australasian Journal of Combinatorics 48 (2010) 285–299.
- [74] S. Khelifi, M. Chellali, *Double domination critical and stable graphs upon vertex removal*. Discuss. Mathematicae. Graph Theory 32 (2012) 643–657.
- [75] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty, L. B. Levitin, *On a new class of codes for identifying vertices in graphs*. IEEE Transactions On Information Theory 44 (2) (1998) 599–611.
- [76] A. Lobstein, *Watching systems, identifying, locating dominating and discriminating codes in graphs*. <http://perso.telecom-paristech.fr/lobstein/debutBIBidetlocdom.pdf>.

- [77] A. Lobstein, O. Hudry, I. Charon, *Locating-domination and identification*, in: *Topics in domination in graphs*. Developments in Mathematics 64. Springer, Cham, pp. (2020) 251–299.
- [78] **M. Mimouni, N. Ikhlef-Eschouf, M. Zamime**, *On connected $3-\gamma_L$ -dot-critical graphs*. Bulletin of the Iranian Mathematical Society 48 (3) (2022) 979–991.
- [79] **M. Mimouni**, *Domination localisatrice dans les graphes*. Thèse de Magister de L'USDB 1, 2009.
- [80] J. Moncel, *Codes identifiants dans les graphes*. Thèse de Doctorat de L'UJF, 2005.
- [81] O. Ore, *Theory of graphs*. Amer Soc Coloq Pub 38 Providence R I, 1962.
- [82] N. J. Rad, *A note on $\gamma_L^t(G)$ -vertex critical graphs*. Journal of Discrete Mathematical sciences and cryptography 12 (2009) 319–322.
- [83] J. Ramirez-Alfonsin, B. Reed, *Perfect graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley, 2001.
- [84] S. Rickett, T. W. Haynes, *Total domination dot-stable graphs*. Discrete Applied Mathematics 159 (2011) 1053–1057.
- [85] V. Samodivkin, *Changing and unchanging of the domination number of a graph*. Discrete Math. 308 (2008) 5015–5025.
- [86] A. Semri, *Sur quelques propriétés structurelles des graphes*. Thèse de Doctorat de L'USTHB, 2006.
- [87] S. J. Seo, P. J. Slater, *Open neighborhood locating-dominating in Trees*. Discrete Applied Mathematics 159 (6) (2011) 484–489.
- [88] P. J. Slater, *Locating Dominating sets and locating-dominating sets*. Y.Alavi and A.J.Schwenk (eds), Graph Theory, Combinatorics and Applications, Proc.Seventh Quad, Internat, Conference on the Theory and Applications of graphs, Wiley and Sons, (1995) 1073–1079.
- [89] P. J. Slater, *Domination and location in acyclic graphs*. Networks 17 (1987) 55–64.

- [90] P. J. Slater, *Dominating and reference sets in graphs*. J Mathematical and Physical Sciences 22 (1988) 445–455.
- [91] D. P. Sumner, *Critical concepts in domination*. Discrete Mathematics 86 (1990) 33–46.
- [92] D. P. Sumner, P. Blitch, *Domination critical graphs*. J. Combin. Theory Ser. B 34 (1983) 65–76.
- [93] D. W. Thacker, *Double domination edge critical graphs*. Master thesis, East Tennessee State University, (2006).
- [94] H. B. Walikar, B. D. Acharya, *Domination critical graphs*. Nat. Acad. Sci. Lett 2 (1979) 70–72.
- [95] H. Wang, L. Kang, *Matching properties in double domination edge critical graphs*. Discrete Mathematics, algorithms and applications 2 (2010) 1571–64.
- [96] Y. C. Zahao, E. F. Shan, R. Z. Gao, *Upper locating-domination numbers of cycles*. Journal of Mathematical Research and Exposition 31 (2011) 757–760.