



l'intégrale

Jean-Marie Monier

Algèbre MPSI

Cours
et 700 exercices
corrigés

**NOUVEAU
PROGRAMME**

3^e édition

DUNOD

Table des matières

Première partie – Cours

Chapitre 1

Vocabulaire de la théorie des ensembles	3
1.1 Ensembles	4
1.1.1 Eléments de logique	4
1.1.2 Ensembles	6
1.1.3 Inclusion	6
1.1.4 Opérations dans $\mathfrak{P}(E)$	7
1.2 Relations	11
1.2.1 Généralités	11
1.2.2 Relations d'équivalence	14
1.2.3 Relations d'ordre	16
1.3 Applications	21
1.3.1 Définitions	21
1.3.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité	24
1.3.3 Restrictions et prolongements	28
1.3.4 Ordre et applications	29
1.3.5 Images directes ou réciproques de parties par une application	31
1.3.6 Familles	33

Chapitre 2

Structures algébriques	35
2.1 Lois de composition interne	35
2.2 Groupes	43
2.2.1 Généralités	43
2.2.2 Sous-groupes	45
2.2.3 Morphismes de groupes	49
2.3 Anneaux	52
2.3.1 Définitions	52
2.3.2 Calculs dans un anneau	52
2.3.3 Sous-anneaux	55
2.3.4 Supplément : Morphismes d'anneaux	56
2.3.5 Anneaux intègres	57
2.4 Corps	58
Compléments aux exercices	60

Chapitre 3

Nombres entiers, nombres rationnels

3.1 Propriétés de \mathbb{N}

- 3.1.1 Structure de \mathbb{N}
- 3.1.2 Le principe de récurrence
- 3.1.3 Divisibilité dans \mathbb{N}

3.2 Ensembles finis, ensembles infinis

- 3.2.1 Equipotence
- 3.2.2 Ensembles finis
- 3.2.3 Ensembles infinis

3.3 Analyse combinatoire

- 3.3.1 Permutations
- 3.3.2 Arrangements
- 3.3.3 Combinaisons

3.4 Le groupe symétrique

- 3.4.1 Structure de \mathfrak{S}_n
- 3.4.2 Transpositions
- 3.4.3 Cycles

3.5 Dénombrements

- 3.5.1 Dénombrements classiques
- 3.5.2 Exemples de dénombrements

3.6 Propriétés de \mathbb{Z}

3.7 Propriétés de \mathbb{Q}

Chapitre 4

Arithmétique dans \mathbb{Z}

4.1 Divisibilité

- 4.1.1 Généralités
- 4.1.2 Congruences

4.2 pgcd, ppcm

- 4.2.1 Généralités
- 4.2.2 Propriétés
- 4.2.3 Algorithme d'Euclide

4.3 Nombres premiers entre eux

- 4.3.1 Généralités
- 4.3.2 Théorème de Bézout
- 4.3.3 Propriétés
- 4.3.4 Applications

Chapitre 5

4.4 Nombres premiers	117
4.4.1 Généralités	117
4.4.2 Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier	118
4.4.3 Décomposition primaire	119
Compléments aux exercices	128

Polynômes, fractions rationnelles **135**

5.1 Algèbre $K[X]$	136
5.1.1 Définition	136
5.1.2 Addition	137
5.1.3 Multiplication	138
5.1.4 Loi externe	140
5.1.5 Composition	143
5.1.6 Dérivation	144
5.1.7 Fonctions polynomiales	145
5.1.8 Notion de polynôme à plusieurs indéterminées	149
5.2 Arithmétique dans $K[X]$	151
5.2.1 Divisibilité	151
5.2.2 Division euclidienne	152
5.2.3 Pgcd, ppcm	155
5.2.4 Polynômes premiers entre eux	160
5.2.5 Polynômes irréductibles	163
5.2.6 Supplément : Division suivant les puissances croissantes	165
5.3 Zéros des polynômes	167
5.3.1 Généralités	167
5.3.2 Polynômes scindés	170
5.3.3 Utilisation de la dérivation	174
5.3.4 Cas de $\mathbb{C}[X]$	176
5.3.5 Cas de $\mathbb{R}[X]$	180
5.4 Fractions rationnelles	185
5.4.1 Supplément : Corps $K(X)$	185
5.4.2 Décomposition en éléments simples	191

Chapitre 6

Espaces vectoriels	209
6.1 Structure d'espace vectoriel	210
6.2 Sous-espaces vectoriels	213
6.3 Dépendance et indépendance linéaires	218
6.3.1 Familles liées, familles libres	218
6.3.2 Sous-espace engendré par une partie	221
6.3.3 Supplément : Somme de plusieurs sev	223
6.3.4 Familles génératrices, bases	227
6.4 Théorie de la dimension	228

Chapitre 7

Applications linéaires

7.1 Généralités

- 7.1.1 Définitions
- 7.1.2 Noyau, image
- 7.1.3 Applications linéaires et familles de vecteurs

7.2 Opérations sur les applications linéaires

- 7.2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$
- 7.2.2 Composition
- 7.2.3 Le groupe $\mathcal{GL}(E)$

7.3 Cas de la dimension finie

- 7.3.1 Le théorème du rang et ses conséquences
 - 7.3.2 Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$
- Complément aux exercices

Chapitre 8

Matrices

8.1 Calcul matriciel

- 8.1.1 Notion de matrice
- 8.1.2 Matrices et applications linéaires
- 8.1.3 L'espace vectoriel $\mathbf{M}_{n,p}(K)$
- 8.1.4 Multiplication des matrices
- 8.1.5 Le groupe $\mathbf{GL}_n(K)$
- 8.1.6 Rang d'une matrice
- 8.1.7 Opérations élémentaires
- 8.1.8 Transposition
- 8.1.9 Trace d'une matrice carrée

8.2 Changement de bases

- 8.2.1 Matrices de passages
- 8.2.2 Changement de base pour un vecteur
- 8.2.3 Changement de bases pour une application linéaire
- 8.2.4 Changement de base pour un endomorphisme

8.3 Matrices remarquables

- 8.3.1 Matrices symétriques, matrices antisymétriques
 - 8.3.2 Matrices triangulaires
 - 8.3.3 Matrices diagonales
- Complément aux exercices

Chapitre 9

Déterminants, systèmes linéaires

9.1 Applications multilinéaires

- 9.1.1 Généralités
- 9.1.2 Applications multilinéaires alternées

239
240
240
244
245
249
249
249
153
57
57
61
53

5
6
6
7
3
)
i
1

9.2	Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base d'un ev de dimension n	309
9.2.1	Espace $\Lambda_n(E)$	309
9.2.2	Propriétés	311
9.3	Déterminant d'un endomorphisme	312
9.4	Déterminant d'une matrice carrée	314
9.5	Développement par rapport à une rangée	317
9.5.1	Cofacteurs et mineurs	317
9.5.2	Comatrice	321
9.6	Calcul des déterminants	323
9.6.1	Déterminant d'une matrice triangulaire	323
9.6.2	Manipulation de lignes et de colonnes	323
9.6.3	Cas $n = 2, n = 3$	326
9.6.4	Supplément : Déterminant de Vandermonde	327
9.7	Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie	331
9.8	Supplément : Rang et sous-matrices	333
9.9	Systèmes affines	336
9.9.1	Position du problème	336
9.9.2	Résolution	337

Chapitre 10

10	Espaces vectoriels euclidiens (1^{re} étude)	341
10.1	Produit scalaire	342
10.1.1	Généralités	342
10.1.2	Inégalités, normes euclidiennes	344
10.1.3	Orthogonalité	347
10.2	Espaces vectoriels euclidiens	350
10.2.1	Procédé d'orthogonalisation de Schmidt	350
10.2.2	Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales	354
10.2.3	Hyperplans	356
10.3	Groupe orthogonal	358
10.3.1	Endomorphismes orthogonaux	358
10.3.2	Matrices orthogonales	360
10.4	Géométrie vectorielle euclidienne plane	364
10.5	Géométrie vectorielle euclidienne en dimension 3	369
10.5.1	Endomorphismes orthogonaux de E_3	369
10.5.2	Produit vectoriel	378
	Complément aux exercices	383

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

Seconde partie

Indications et réponses des exercices



Chap. 1
Chap. 2
Chap. 3
Chap. 4
Chap. 5
Chap. 6
Chap. 7
Chap. 8
Chap. 9
Chap. 10

Index des notations

Index alphabétique

387
395
407
419
457
483
491
503
515
527
539
551

Jean-Marie Monier

3^e édition

ALGÈBRE MPSI

Cours et 700 exercices corrigés

Cette 3^e édition du *cours d'algèbre* de Jean-Marie Monier est entièrement conforme aux nouveaux programmes 2003 de la filière MPSI. Elle propose un cours complet, convivial et rigoureux, et de très nombreux exercices tous corrigés.

Chaque chapitre s'ouvre par une introduction signalant les **prérequis** et dégageant les **objectifs à atteindre**. Une nouvelle rubrique, intitulée « **Du cours aux exercices** », regroupe des conseils de méthodologie pour aider l'étudiant dans la résolution des exercices qui suivent. Des questions situées à la limite du programme sont traitées, en fin de chapitre, sous forme de compléments avec solutions détaillées. Enfin des notes en marge donnent des informations complémentaires au cours (rappels, schémas, conseils...), et des encadrés mettent en valeur les points les plus importants (théorèmes, définitions et propositions à retenir).

L'objectif de ce cours de mathématiques est de devenir l'outil de travail familier, efficace et adapté des élèves des classes préparatoires, des étudiants du 1^{er} cycle universitaire scientifique et des candidats aux concours externes et internes de recrutement de professeurs.

JEAN-MARIE MONIER
est professeur en classe
de Spéciales au lycée
La Martinière-Monplaisir
à Lyon.

COURS		EXERCICES		
1 ^{re} année	2 ^e année	1 ^{re} année	2 ^e année	
Analyse MPSI	Analyse MP	Analyse MPSI	Analyse MP	MPSI MP
Algèbre MPSI	Algèbre MP	Algèbre et géométrie MPSI	Algèbre et géométrie MP	
Géométrie MPSI, MP				
Analyse PCSI-PTSI	Analyse PC-PSI-PT	Analyse PCSI-PTSI	Analyse PC-PSI-PT	PCSI-PTSI PC-PSI-PT
Algèbre PCSI-PTSI	Algèbre PC-PSI-PT	Algèbre et géométrie PCSI-PTSI	Algèbre et géométrie PC-PSI-PT	
Géométrie PCSI-PTSI, PC-PSI-PT				
L'ORAL				
Niveau X, Centrale, Mines		Niveau CCP, e3a, e4a, ESIM		
337 exercices corrigés		409 exercices corrigés		MP-MP*
264 exercices corrigés		324 exercices corrigés		PC-PC*-PSI-PSI*-PT-PT*



ISBN 2 10 008291 4

<http://www.dunod.com>

