

Guy Binet
Tarek Ahmed-Ali

Traitement du signal

Représentation des signaux
et systèmes continus



Table des matières

Notations	xi
1 Les signaux	1
1.1 MATHÉMATIQUES ET SIGNAL	1
1.2 CLASSIFICATION DES SIGNAUX.....	3
1.3 SIGNAUX CONTINUS DÉTERMINISTES	4
1.3.1 Définition	4
1.3.2 Signaux élémentaires	5
1.3.3 Causalité	7
1.3.4 Signal stable	8
1.4 ÉNERGIE ET PUISSANCE DES SIGNAUX.....	9
1.4.1 Signal à énergie finie	9
1.4.2 Signal à puissance moyenne finie	11
1.5 AUTOCORRÉLATION ET INTERCORRÉLATION.....	14
1.5.1 Signaux à énergie finie	14
1.5.2 Signaux à puissance moyenne finie	16
1.6 CONVOLUTION DES SIGNAUX.....	18
1.7 LA DISTRIBUTION DE DIRAC	20
1.7.1 « L'impulsion » de Dirac	20
1.7.2 La distribution de Dirac	21
2 Analyse spectrale	27
2.1 CAS DES SIGNAUX PÉRIODIQUES.....	28
2.1.1 Décomposition en série de Fourier sur $\mathbb{R}$	28
2.1.2 Pulsations « positives » et « négatives »	29
2.1.3 Puissance moyenne et théorème de Parseval	30
2.1.4 Notion de spectre	32
2.2 CAS DES SIGNAUX À ÉNERGIE FINIE	33
2.2.1 Décomposition fréquentielle	33
2.2.2 Énergie et théorème de Parseval	33
2.2.3 Densité spectrale d'énergie et corrélation	35
2.2.4 Relation d'incertitude	36
2.3 CAS DES SIGNAUX À PUISSANCE MOYENNE FINIE	38
2.3.1 La transformée de Fourier et les distributions	40
2.3.2 Densité spectrale et distributions	43

2.3.3	Cas des signaux périodiques	44
2.3.4	Cas d'un signal constant	45
2.3.5	Cas de la fonction signe	46
2.3.6	Cas de l'échelon d'Heaviside	47
2.3.7	Signaux aléatoires	48
3	Les systèmes continus	49
3.1	SYSTÈMES CONTINUS, FILTRES	49
3.2	SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS	51
3.2.1	Définition	51
3.2.2	Systèmes de convolution et réponse impulsionnelle	52
3.2.3	Causalité	53
3.2.4	Réponses fondamentales d'un SLI	54
3.2.5	Exemples de systèmes	56
3.3	FONCTION DE TRANSFERT	59
3.3.1	Résolution des équations différentielles	59
3.3.2	Solution générale des équations différentielles	63
3.3.3	Fonction de transfert	65
3.3.4	Stabilité d'un système	66
3.3.5	Fonction de transfert et système réel stable	68
3.3.6	Modes dominants et auxiliaires	71
3.3.7	Exemples	72
3.4	ASSOCIATIONS DE SYSTÈMES	84
3.5	SYSTÈME FONDAMENTAL DU 1 ^{er} ORDRE	87
3.5.1	Équation différentielle et fonction de transfert	87
3.5.2	Réponses à des signaux élémentaires	88
3.6	SYSTÈME FONDAMENTAL DU 2 ^e ORDRE	92
3.6.1	Équation différentielle et fonction de transfert	92
3.6.2	Modes et régimes	93
3.6.3	Réponses impulsionnelles et indicielles	95
3.7	MODÈLE D'UN SIGNAL	103
4	Analyse spectrale des systèmes	107
4.1	PRINCIPE ET TRANSMITTANCE	107
4.2	GAIN, DÉCIBELS ET FRÉQUENCES DE COUPURE	108
4.2.1	Décibel et analyse spectrale	108
4.2.2	Bande passante, pulsations et fréquences de coupure	109
4.2.3	Comportements élémentaires	111
4.3	PHASE MINIMALE - PHASE NON MINIMALE	112
4.3.1	Le théorème de Bayard-Bode pris en défaut	112
4.3.2	Système à phase minimale	114
4.4	ANALYSE FRÉQUENTIELLE RAPIDE	117
4.5	LE DIAGRAMME DE BODE	122
4.6	SYSTÈME FONDAMENTAL DU 1 ^{er} ORDRE	124

6.6	FORMES DE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT	182
6.6.1	Forme modale	182
6.6.2	Forme cascade	185
6.6.3	Forme canonique commandable	187
6.6.4	Forme canonique observable	192
6.7	MODÉLISATION D'UN SIGNAL.....	194
6.8	LES OBSERVATEURS.....	195
6.8.1	Principe et définitions	196
6.8.2	Mise au point et propriétés d'un observateur	198
7	Les systèmes bouclés	205
7.1	BOUCLE OUVERTE - BOUCLE FERMÉE	205
7.1.1	Boucle fermée	205
7.1.2	Stabilité du système bouclé	206
7.2	ÉTUDE ALGÈBRIQUE DE LA STABILITÉ	207
7.2.1	Équation caractéristique	207
7.2.2	Le critère de Routh-Hurwitz	208
7.2.3	Le lieu des racines	212
7.2.4	Exemples simples	215
7.3	MÉTHODE FRÉQUENTIELLE.....	227
7.3.1	Le critère de Nyquist	228
7.3.2	Le diagramme de Black	231
7.3.3	Les marges de stabilité	232
7.4	LES OSCILLATEURS À DÉPHASAGE.....	235
7.4.1	L'oscillateur à pont de Wien	235
7.4.2	L'oscillateur « phase-shift »	237
7.5	ASSERVISSEMENT.....	240
7.5.1	Asservissement avec retour unitaire	240
7.5.2	Signaux particuliers	244
7.5.3	Problème de régulation	245
7.5.4	La poursuite	246
7.5.5	Dynamiques de régulation et de poursuite	247
7.5.6	Problème de la commande	247
7.5.7	Cahier des charges et hypothèses simplificatrices	247
7.6	CORRECTEUR PROPORTIONNEL	250
7.7	CORRECTEUR PI	255
7.7.1	Analyse et synthèse du correcteur PI	255
7.7.2	Insuffisances du correcteur PI	259
7.8	CORRECTEUR PI AVEC AVANCE DE PHASE.....	262
7.8.1	Conception d'un correcteur PI avec avance de phase	262
7.8.2	Analyse des résultats	264

Annexes	267
A Espaces vectoriels L^1 et L^2	267
A.1 ENSEMBLES NÉGLIGEABLES.....	268
A.1.1 Ensembles négligeables	268
A.1.2 Propriété presque partout	268
A.1.3 Théorèmes	269
A.2 ESPACES DE HILBERT ET PROJECTIONS.....	269
A.2.1 Espaces préhilbertiens	269
A.2.2 Espaces de Hilbert	272
A.3 ESPACES L^1 et L^2	274
A.3.1 Définitions	274
A.3.2 Produit scalaire et norme dans $L^2(I)$	275
A.3.3 Inégalité de Schwartz dans $L^2(I)$	277
B Convolution	279
B.1 INTÉGRALES À PARAMÈTRES.....	279
B.1.1 Théorème de la convergence dominée	279
B.1.2 Dérivation sous le signe somme	280
B.2 PRODUIT DE CONVOLUTION.....	280
B.2.1 Définition	280
B.2.2 Propriétés	281
B.2.3 Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$	283
B.2.4 Convolution dans $L^2(\mathbb{R})$	284
C Séries de Fourier	285
C.1 DÉFINITIONS.....	285
C.1.1 Série de Fourier réelle dans $L^2(0, T)$	285
C.1.2 Série de Fourier à termes complexes dans $L^2(0, T)$	287
C.1.3 Relations entre les formes de décomposition	287
C.1.4 Translation temporelle	288
C.1.5 Théorème de Parseval sur $L^2(0, T)$	289
C.2 CAS DES FONCTIONS PÉRIODIQUES SUR $\mathbb{R}$	289
C.2.1 Périodicité des séries de Fourier	289
C.2.2 Propriétés	290
C.2.3 Dérivation des séries de Fourier	291
C.3 CONVERGENCES DES SÉRIES.....	292
C.3.1 Approximation, notion de limites	292
C.3.2 Convergence ponctuelle	293
C.3.3 Convergence uniforme	294
C.3.4 Convergence dans $L^1(I)$ et $L^2(I)$	296
C.4 CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER DANS $L^2(\mathbb{R})$	297
C.4.1 Expérience	297
C.4.2 Convergence ponctuelle	299
C.4.3 Convergence uniforme et phénomène de Gibbs	299

C.5	SÉRIES DE FOURIER USUELLES	303
C.5.1	Signaux du type « rectangle »	303
C.5.2	Signaux du type « triangle »	304
C.5.3	Signaux du type « dents de scie »	306
C.5.4	Signaux du type « sinusoïde »	308
D	La transformée de Fourier	311
D.1	DÉFINITION	311
D.2	PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES.....	312
D.2.1	Linéarité	312
D.2.2	Symétrie et conjugaison complexe	313
D.2.3	Changement d'échelle	313
D.2.4	Translation temporelle	314
D.2.5	Modulation	314
D.2.6	Signaux réels	315
D.3	TRANSFORMATION INVERSE.....	316
D.3.1	Transformation inverse	316
D.3.2	Condition d'existence	317
D.3.3	Convergence	317
D.3.4	Propriétés de la transformation inverse	317
D.3.5	Représentation spectrale	318
D.4	PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.....	318
D.5	TRANSFORMÉES USUELLES.....	321
D.5.1	Fonction rectangle	321
D.5.2	Fonction triangle	321
D.5.3	Fonction exponentielle décroissante causale	322
D.5.4	Fonction sinus cardinal	323
D.5.5	Fonction gaussienne	324
E	La transformée de Laplace	327
E.1	DÉFINITIONS DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE.....	328
E.1.1	Principe	328
E.1.2	Définitions	329
E.2	CONDITIONS D'EXISTENCE.....	330
E.2.1	La convergence	330
E.2.2	La convergence en valeur absolue	332
E.2.3	Lien avec la transformée de Fourier	335
E.3	PROPRIÉTÉS	336
E.3.1	Dérivée de la transformée de Laplace	336
E.3.2	Propriétés élémentaires	338
E.3.3	Transformées de primitives et de dérivées	340
E.3.4	Valeurs initiale et finale	343
E.3.5	Produit de convolution	346
E.3.6	Fonctions périodiques sur $\mathbb{R}^+$	347

E.4	INVERSION DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE	349
E.4.1	Définitions	349
E.4.2	Décomposition en éléments simples	350
E.4.3	Méthode des résidus	353
E.4.4	Un exemple simple	356
F	Sommaire sur les distributions	359
F.1	PRINCIPE DES DISTRIBUTIONS	359
F.1.1	L'idée de base	359
F.1.2	Espace $\mathbb{D}$ des fonctions test	360
F.1.3	Définition indirecte d'une fonction	361
F.1.4	Définition des distributions	362
F.2	PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES	363
F.2.1	Causalité	363
F.2.2	Linéarité	363
F.2.3	Translation	364
F.2.4	Facteur d'échelle	364
F.2.5	Produit des distributions	365
F.3	DISTRIBUTIONS DU TRAITEMENT DU SIGNAL	367
F.3.1	Échelon d'Heaviside	367
F.3.2	Constante K	367
F.3.3	Distribution de Dirac	367
F.3.4	Peigne de Dirac	370
F.3.5	Valeur principale $VP(1/s)$	371
F.4	DÉRIVATION	372
F.4.1	Définition	372
F.4.2	Exemples	374
F.4.3	Propriétés de la dérivation	375
F.4.4	Dérivées de la distribution de Dirac	377
F.4.5	Formules de Poisson	377
F.5	PRODUIT DE CONVOLUTION	379
F.5.1	Condition d'existence et définition	379
F.5.2	Translation et distribution de Dirac	380
F.5.3	Corrélation	380
F.5.4	Conditions suffisantes d'existence	381
F.5.5	Propriétés	381
G	Distributions et transformées	385
G.1	TRANSFORMÉE DE FOURIER	385
G.1.1	Cas des fonctions	385
G.1.2	Les distributions tempérées	386
G.1.3	La transformée de Fourier des distributions	387
G.1.4	Propriétés des distributions tempérées	388
G.1.5	Propriétés de la TF des distributions tempérées	389
G.1.6	Les transformées utiles	392

G.2 TRANSFORMÉE DE LAPLACE MONOLATÉRALE	396
G.2.1 Cas des fonctions	396
G.2.2 Définition	397
G.2.3 Propriétés	397
H RELATIONS DE « KK » ET DE « BB »	399
H.1 RELATIONS DE KRAMERS-KRÖNIG	399
H.1.1 Les relations	399
H.1.2 Démonstration	400
H.2 RELATION DE BAYARD-BODE.....	401
H.2.1 Relation générale	401
H.2.2 Relation simplifiée	404
H.2.3 Qualité de la méthode	405
Bibliographie	409
Index	411