

— Traité de Génie Civil —
de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Volume 6

ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS

Méthode des éléments finis

François Frey et Jaroslav Jirousek



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Table des matières

AVANT-PROPOS	v
INTRODUCTION	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
1 Mécanique et méthodes numériques – Méthode des déplacements	
1.1 Mécanique numérique	1
1.2 Méthode des éléments finis	2
1.3 Cadre de l'ouvrage	5
1.4 Méthode des déplacements (structures en barres et poutres)	7
1.5 Exercices	16
1.6 Lexique	19
1.7 Annexe – Convention graphique	19
2 Méthode matricielle des déplacements (structures en barres et poutres)	
2.1 Introduction	21
2.2 Découper et assembler	21
2.3 Matrice de rigidité et vecteur charge de l'élément	22
2.4 Rotation	25
2.5 Combinaison d'états indépendants	29
2.6 Condensation	29
2.7 Assemblage	32
2.8 Conclusions	38
2.9 Exercices	38
2.10 Lexique	42
2.11 Annexe – Quelques notations	43
3 Vers la méthode des éléments finis	
3.1 Introduction	45
3.2 Interprétation physique	45
3.3 Attributs d'un élément fini	48
3.4 Conditions aux limites	51
3.5 Nécessité d'une théorie	53
3.6 Forme différentielle ou forte des équations de la mécanique des solides et des poutres ..	54

3.7	Forme intégrale ou faible des équations d'équilibre de la mécanique des solides et des poutres	57
3.8	Exercices	59
3.9	Lexique	61
4	Construire un élément fini – Choix des champs inconnus	
4.1	Nouveautés	63
4.2	Modèles d'éléments finis	65
4.3	Méthode de Galerkin	67
4.4	Caractéristiques de la méthode de Galerkin	68
4.5	Choix du champ des déplacements (interpolation)	69
4.6	Exercices	74
4.7	Lexique	75
5	Critères de convergence	
5.1	Notion de convergence	77
5.2	Critères de convergence – Point de vue physique	79
5.3	Assouplissement des critères et <i>patch test</i>	81
5.4	Critères de convergence – Un rien plus mathématique	82
5.5	Applications	85
5.6	Exercices	91
5.7	Lexique	92
6	Construire un élément fini – Caractéristiques de l'élément	
6.1	Introduction	95
6.2	Formulation de l'élément fini	95
6.3	Contraintes	98
6.4	Application	101
6.5	Exercices	106
6.6	Lexique	108
7	Elasticité et interpolation C^0	
7.1	Introduction	109
7.2	Interpolation 1D	109
7.3	Interpolation 2D	110
7.4	Interpolation 3D	116
7.5	Transformation isoparamétrique	117
7.6	Intégration numérique	122
7.7	Distorsion des éléments finis	127
7.8	Vecteur force consistant	128
7.9	Qualités d'un élément fini	130

7.10	Exercices	131
7.11	Lexique	133
7.12	Annexe – Formulation d'un élément fini isoparamétrique	133
8	Structures	
8.1	Structures et éléments finis	137
8.2	Déformations et contraintes en structures	137
8.3	Caractéristiques des éléments finis de structure	140
8.4	Structures minces (continuité C^1)	141
8.5	Théories des structures minces	142
8.6	Structures d'épaisseur modérée (continuité C^0)	146
8.7	Théories des structures d'épaisseur modérée	148
8.8	Lexique	152
9	Eléments finis des structures	
9.1	Introduction	153
9.2	Poutre de Bernoulli (cas plan)	153
9.3	Poutre de Timoshenko (cas plan)	156
9.4	Plaque de Kirchhoff	159
9.5	Plaque de Mindlin	167
9.6	Eléments de plaque fiables	169
9.7	Elément de plaque-membrane et élément de coque	172
9.8	Exercices	176
9.9	Lexique	178
10	Méthode des déplacements et assemblage	
10.1	Introduction	179
10.2	Transformation de coordonnées	180
10.3	Localisation	182
10.4	Assemblage et résolution	183
10.5	Bielles et ressorts d'appui	187
10.6	Exercices	188
10.7	Lexique	190
11	Convergence et erreur	
11.1	Introduction	191
11.2	Energie de déformation et convergence du modèle déplacement conforme	191
11.3	Convergence énergétique des autres modèles	195
11.4	Erreur de discrétisation et taux de convergence	196
11.5	Mesure de l'erreur	198
11.6	Estimation d'erreur a priori	199

11.7	Estimation d'erreur a posteriori	200
11.8	Superconvergence	201
11.9	Utilisation de l'erreur et adaptation du maillage	203
11.10	Lexique	206
12	Modélisation et discrétisation	
12.1	Introduction	207
12.2	Modélisation du comportement de la structure	208
12.3	Discrétisation de la structure modélisée	210
12.4	Responsabilité de l'ingénieur	214
12.5	Application	214
12.6	Exercices	217
13	Valeur de la méthode des éléments finis	
13.1	Puissance de la méthode des éléments finis	219
13.2	Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis	224
13.3	Examen critique de la méthode des éléments finis	225
14	Annexe – Calcul matriciel	
14.1	Introduction	229
14.2	Définitions, notations et conventions	229
14.3	Opérations sur les matrices	231
14.4	Déterminant, rang et trace d'une matrice carrée	233
14.5	Inverse d'une matrice carrée	234
14.6	Décomposition des matrices en sous-matrices	237
14.7	Dérivation et intégration d'une matrice	238
14.8	Norme d'un vecteur	239
14.9	Résolution d'un système d'équations linéaires	239
14.10	Transformations	244
14.11	Valeurs propres et vecteurs propres	246
15	Annexe – Matrices de rigidité et vecteurs charges des barres et poutres prismatiques	
15.1	Introduction	253
15.2	Structure spatiale – Poutre à 12 degrés de liberté – Axes locaux (x, y, z)	254
15.3	Structure plane chargée dans son plan – Poutre à 6 degrés de liberté	255
15.4	Structure plane chargée dans son plan – Poutre à 5 degrés de liberté (avec nœud articulation)	256
15.5	Poutre continue (cas plan ; sans déplacement axial)	257
15.6	Structure plane chargée perpendiculairement à son plan (grille de poutres) Poutre à 6 degrés de liberté	258
15.7	Barre d'un treillis spatial	259

15.8	Barre d'un treillis plan	260
15.9	Structure plane chargée dans son plan – Vecteurs charges pour une poutre à 6 degrés de liberté – Axes locaux (x, y)	260
15.10	Structure plane chargée dans son plan – Vecteurs charges pour une poutre à 5 degrés de liberté (avec nœud articulé) – Axes locaux (x, y)	263
16	Annexe – Intégration numérique	
16.1	Introduction	267
16.2	Principe de l'intégration numérique	267
16.3	Formules d'intégration numérique	268
16.4	Quelques règles d'utilisation	272
16.5	Intégration numérique sur les domaines bidimensionnels et tridimensionnels	272
	SOLUTION DES EXERCICES	277
	BIBLIOGRAPHIE	287
	INDEX	289
	NOTATIONS	293
	ABRÉVIATIONS ET SYMBOLES	297