

SCIENCES SUP

Cours et exercices corrigés

Licence 3^e année • Master • CAPES • Agrégation

72

INTRODUCTION À LA LOGIQUE

Théorie de la démonstration

2^e édition

Préface de Pierre-Louis Curien

**René David
Karim Nour
Christophe Raffalli**

DUNOD

Table des matières

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 • FORMULES ET DÉMONSTRATIONS DE LA LOGIQUE DU PREMIER ORDRE	9
1.1 Introduction	9
1.2 Les formules	11
1.2.1 Le langage	11
1.2.2 Les termes	12
1.2.3 Les formules	15
1.2.4 Variables libres et variables liées	19
1.2.5 Substitutions	21
1.2.6 Le calcul propositionnel	22
1.3 Les démonstrations en déduction naturelle	23
1.3.1 Introduction	23
1.3.2 Les séquents	24
1.3.3 Les règles de démonstration	25
1.3.4 Exemples de démonstration	33
1.3.5 Quelques démonstrations fausses	36
1.3.6 Déduction naturelle sans séquents	37
1.3.7 Une autre présentation des démonstrations	40
1.3.8 Règles dérivées	42
1.3.9 Simplification de la notation linéaire	46
1.4 Exemples	48
1.4.1 A propos d'involutions	48
1.4.2 Un théorème de commutation	49
1.4.3 Une propriété de $\mathbb{N}$	49

1.5	Démonstrations formelles et informelles	50
1.5.1	Retour sur les exemples précédents	50
1.5.2	Rédaction formelle - rédaction « en français »	51
1.5.3	Pour conclure	52
1.6	Premiers résultats théoriques	52
1.6.1	Un problème de formalisation	53
1.6.2	Quelques résultats sur la substitution	54
1.6.3	Choisir correctement la récurrence	57
1.7	Systèmes alternatifs de démonstration	58
1.7.1	Le calcul des séquents	58
1.7.2	Les systèmes de Hilbert	58
1.7.3	Les systèmes utilisés en démonstration automatique	60
1.7.4	Quelques commentaires	60
CHAPITRE 2 • COMPLÉTUDE DE LA LOGIQUE DU PREMIER ORDRE		67
2.1	Introduction	67
2.2	Interprétations	68
2.3	Le cas du calcul propositionnel	73
2.4	Un peu de théorie des modèles	75
2.5	Théorème de complétude	79
2.5.1	non contradictoire $\Rightarrow$ consistante	81
2.5.2	consistante $\Rightarrow$ non contradictoire	83
2.5.3	Théorème de compacité	86
2.6	Formes canoniques	87
2.6.1	Formules conjonctives et disjonctives	87
2.6.2	Formules prénexes	88
2.7	Skolémisation	89
CHAPITRE 3 • EXEMPLES DE THÉORIES		103
3.1	Introduction	103
3.2	Quelques théories algébriques	104
3.2.1	La théorie de l'égalité	104
3.2.2	La théorie des groupes	105
3.2.3	La théorie des anneaux et des corps	106
3.2.4	La théorie des espaces vectoriels	107
3.3	Exemples d'analyse	108
3.3.1	Unicité de la limite	108

3.3.2	Une propriété des fonctions continues	109
3.3.3	Un exemple de topologie	109
3.4	L'arithmétique de Peano	111
3.4.1	Les axiomes	111
3.4.2	Quelques propriétés théoriques de PA	112
3.4.3	Exemples de preuves dans PA	113
3.5	La théorie des ensembles de Zermelo Fraenkel	116
3.5.1	Les axiomes	116
3.5.2	Modélisation des mathématiques	119
3.5.3	Autres axiomes	121
3.6	Les phénomènes d'incomplétude	123
3.6.1	Quelques paradoxes	123
3.6.2	Indécidabilité de PA et de ZF	124
3.6.3	Incomplétude et non-contradiction de PA et ZF	127
3.6.4	Un exemple concret de l'incomplétude de PA	128
3.7	Quelques théories et structures décidables	129
3.7.1	Élimination des quantificateurs	129
3.7.2	La théorie des ordres denses	130
3.7.3	La théorie de l'égalité	132
3.7.4	Le théorème de Tarski	133
3.7.5	L'arithmétique de Presburger	136
CHAPITRE 4 • LOGIQUE INTUITIONNISTE ET MODÈLES DE KRIPKE		145
4.1	Introduction	145
4.2	Logique minimale, intuitionniste et classique	147
4.3	Traductions entre ces logiques	149
4.3.1	Quelques lemmes utiles	149
4.3.2	Traduction de Gödel	152
4.3.3	Traduction de Kuroda	155
4.3.4	Problèmes de décision	158
4.4	Sémantique du calcul propositionnel	158
4.4.1	Modèles de Kripke propositionnels	158
4.4.2	Théorème de complétude	160
4.4.3	Autres théorèmes de complétude	162
4.5	Sémantique de la logique du premier ordre	166
4.5.1	Un cas particulier	166
4.5.2	Le cas général	167
4.5.3	Théorème de complétude	169

4.5.4	Les théories à égalité décidable	171
4.5.5	Constructivité	172
4.6	Sémantique de la logique minimale	173
4.6.1	Théorème de complétude	173
4.6.2	Traduction de LM dans LI	173
4.7	L'arithmétique de Heyting	175
4.7.1	Relations entre PA et HA	175
4.7.2	Constructivité de HA	176
CHAPITRE 5 • CALCUL DES SÉQUENTS		185
5.1	Introduction	185
5.2	Les systèmes LK et LJ	186
5.2.1	Le système LK	186
5.2.2	Exemples dans LK	188
5.2.3	Formulation alternative des règles	191
5.2.4	Le système LJ	192
5.2.5	Exemples dans LJ	194
5.3	Dédution naturelle et calcul des séquents	195
5.3.1	$(\vdash_c \Rightarrow \vdash_{LK})$ et $(\vdash_i \Rightarrow \vdash_{LJ})$	195
5.3.2	$(\vdash_{LK} \Rightarrow \vdash_c)$ et $(\vdash_{LJ} \Rightarrow \vdash_i)$	197
5.4	Élimination des coupures	200
5.4.1	Réductions immédiates	203
5.4.2	Réductions commutatives	204
5.4.3	Réductions essentielles	207
5.4.4	Commentaires	209
5.5	Conséquences de l'élimination des coupures	211
5.5.1	Consistance des systèmes LK et LJ	211
5.5.2	Constructivité de la logique intuitionniste	212
5.5.3	Propriété de la sous-formule	215
5.5.4	Le théorème d'interpolation	216
CHAPITRE 6 • LOGIQUES D'ORDRE SUPÉRIEUR		223
6.1	Introduction	223
6.2	Le système	224
6.2.1	Les sortes	224
6.2.2	Les expressions	225
6.2.3	β -équivalence	228
6.2.4	Démonstrations	229

6.3	Exemples de logiques et de théories	230
6.3.1	Les logiques multisortes du premier ordre	231
6.3.2	Les logiques du second ordre	233
6.3.3	L'arithmétique du second ordre	234
6.3.4	Les nombres réels	236
6.3.5	La théorie des types simples	237
6.4	Extensionnalité et axiome du choix	238
6.5	Sémantique	241
CHAPITRE 7 • DÉMONSTRATION AUTOMATIQUE		247
7.1	Introduction	247
7.2	L'unification	248
7.2.1	L'algorithme élémentaire d'unification	248
7.2.2	Un algorithme plus performant	252
7.3	La méthode des tableaux	255
7.3.1	La structure des preuves	255
7.3.2	La méthode	257
7.3.3	Exemples	260
7.3.4	Correction de la méthode	262
7.4	La résolution	264
7.4.1	La méthode	264
7.4.2	Mise sous forme clausale	268
7.4.3	Optimisations	270
ANNEXE • LE LOGICIEL PHOX		275
CORRIGÉS DES EXERCICES		281
	Exercices du chapitre 1	281
	Exercices du chapitre 2	293
	Exercices du chapitre 3	303
	Exercices du chapitre 4	311
	Exercices du chapitre 5	322
	Exercices du chapitre 6	333
	Exercices du chapitre 7	339
BIBLIOGRAPHIE		347
INDEX		349

SCIENCES SUP

René David • Karim Nour • Christophe Raffalli



2^e édition

INTRODUCTION À LA LOGIQUE

Théorie de la démonstration

Cet ouvrage, entièrement révisé dans cette seconde édition, est un cours introductif à la logique mathématique et, en particulier, la théorie de la démonstration. On y donne la réponse du mathématicien aux questions « qu'est-ce qu'un énoncé ? une démonstration ? » ou plus fondamentalement, « qu'est-ce que les mathématiques ? », en l'illustrant par de nombreux exemples de mathématiques courantes. Il aborde également la logique intuitionniste qui donne des preuves constructives et les techniques de base de la démonstration automatique. Ces notions sont essentielles en informatique.

Pour aider le lecteur dans sa compréhension, ce cours contient de nombreux exemples et près de 170 exercices corrigés. Une annexe présente un assistant de démonstration, le logiciel PhoX, écrit par l'un des auteurs. Des compléments aux corrigés (preuves complètement formalisées ou réalisées avec le logiciel PhoX) ainsi que le logiciel Phox, sont disponibles sur le site des auteurs.

Ce livre, qui ne suppose aucun prérequis en logique, s'adresse plus particulièrement aux étudiants en troisième année de Licence ou en Master. Il pourra également intéresser les candidats au CAPES et à l'agrégation.

RENÉ DAVID

est professeur à
l'université de Savoie
(Chambéry).

KARIM NOUR et
CHRISTOPHE RAFFALLI

sont maîtres de
conférences à
l'université de Savoie
(Chambéry).

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE



ISBN 2 10 006796 6



<http://www.dunod.com>

