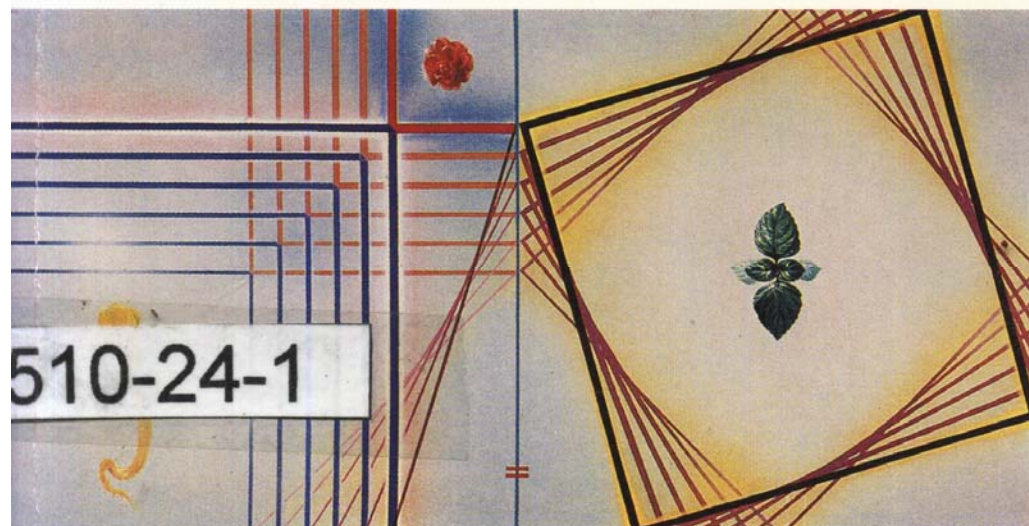
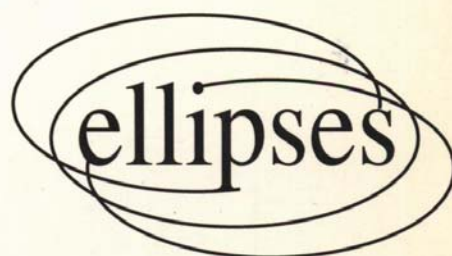


LE CALCUL INTÉGRAL

Licence de
Mathématiques

Henri BUCHWALTER



SOMMAIRE

CHAPITRE 1 : FONCTIONS INTÉGRABLES

1.1	Rappels ensemblistes	1
1.2	Arithmétique de $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$	3
1.3	Anneaux et tribus	3
	Tribu borélienne de $\mathbb{R}^P$	5
	Tribus et partitions	5
1.4	Applications mesurables et fonctions mesurables réelles	6
	Les fonctions mesurables positives finies ou non	7
	Les fonctions mesurables réelles	8
	Les fonctions étagées	9
	Théorème d'approximation	9
1.5	Intégrales et mesures	10
	Intégrale (supérieure) et mesure	10
	Propriété de Beppo Lévi	12
	Mesure image, mesure à densité	13
1.6	Construction des mesures	14
	Mesures sur un anneau $\mathcal{R}$	14
	Théorème de monotonie décroissante	15
	Mesure longueur sur $\mathbb{R}$ ou mesure de Borel	15
	Extension d'une mesure. Mesure extérieure	16
	Ensembles négligeables	17
	Théorème de Carathéodory	18
	Problème de l'unicité. Les π -classes et les λ -classes	20
	Théorème de Dynkin	20
	Mesures σ -finies et unicité du prolongement	21
1.7	Mesures sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^P$	22
	Mesure de Borel sur $\mathbb{R}$. Tribu de Lebesgue	22
	Mesure de Borel sur $\mathbb{R}^P$	23
	Mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$	24
	Mesures diffuses et mesures discrètes	28
1.8	Fonctions intégrables	28
	Théorème de Fatou	28
	Fonctions intégrables	30

Théorème de convergence dominée de Lebesgue	32
Intégration terme à terme des séries	33
Fonctions complexes intégrables	33
Intégration sur une partie A	33
Intégration par rapport à une mesure image	35
Mesure de Borel sur $\mathbb{R}^p$ et homothéties	36
Intégration des fonctions sphériques sur $\mathbb{R}^p$	36
Le volume V_p de la boule euclidienne	37
1.9 Intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue	38
Intégrale sur $[a, b]$	38
Intégrale généralisée sur un intervalle I	40
1.10 Fonctions définies par des intégrales	42
Théorème de continuité	42
Théorème de dérivabilité	42
Théorème d'holomorphie	44
Les fonctions B et Γ d'Euler	47
Théorème d'Artin	48
Les formules de Weierstrass et de Gauss	50
La formule des compléments	51
La formule de Legendre-Gauss	52
La formule de Stirling	52
La fonction Γ dans le champ complexe	53
1.11 Le théorème de Riesz-Alexandroff et les mesures de Radon	54
Régularité des mesures boréliennes	54
Théorème de Riesz-Alexandroff	56
Formes linéaires positives sur l'espace $C_0(T)$	56
Remarque historique : Point de vue ensembliste ou fonctionnel	57
1.12 Applications au calcul des probabilités	58
Indépendance d'événements, indépendance de sous-tribus	60
Critère d'indépendance	61
Théorème des coalitions	61
Tribu asymptotique et loi du zéro-un	62
Théorème de Borel-Cantelli	63
Les variables aléatoires réelles	64
Loi du χ^2 à un degré de liberté	64
Variables aléatoires indépendantes	65
Vecteurs aléatoires	65
Loi du χ^2 à 2, 3, p degrés de liberté	65
Espérance mathématique et moments. Variance	66
Les inégalités de Markoff et Tchebyscheff	69

Produit de deux variables aléatoires réelles intégrables	70
Inégalité de Cauchy-Schwarz. Covariance	70
Cas d'indépendance	70
Règle de Bienaymé-Tchebyscheff	71
Loi faible des grands nombres	71
Loi faible de Bernoulli et fréquence statistique	72
Variance en dimension p	73
Matrice de covariance	74

CHAPITRE 2 : INTÉGRATION SUR UN ESPACE PRODUIT

2.1	Produit de deux espaces mesurables	77
	Cas des tribus boréliennes	78
2.2	Produit de deux mesures σ -finies	79
	Les fonctions intégrables et le théorème de Fubini	83
2.3	La formule du changement de variables	89
	Translations	89
	Transformations linéaires	90
	La formule générale du changement de variables	94
	Passage en coordonnées polaires	98
	Passage en coordonnées sphériques	99
2.4	Indépendance et mesure produit	103
	Vecteurs gaussiens et lois gaussiennes (centrées)	103

CHAPITRE 3 : CONVOLUTION ET TRANSFORMATION DE FOURIER

3.1	Les espaces L^1 et L^2	109
	L'espace $\mathfrak{L}^2 = \mathfrak{L}^2(\Omega, \Sigma, \mu)$	109
	Les espaces L^1 et L^2	110
	L'espace de Hilbert L^2	111
	Théorèmes de densité	113

3.2	Produit de convolution	115
	Produit de convolution de deux mesures bornées	117
	Somme de vecteurs aléatoires indépendants	118
3.3	Transformation de Fourier et fonction caractéristique	120
	Liaison avec le produit de convolution	122
	Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire	122
	Loi de Poisson	123
	Loi binomiale	123
	Loi d'Euler	123
	Loi de Cauchy	124
	Lois gaussiennes sur $\mathbb{R}^n$	124
	Loi de Cauchy sur $\mathbb{R}^n$	126
	Transformation de Fourier et différentiabilité	127
	L'espace de Schwartz $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	128
	La formule d'inversion pour les fonctions	129
	Modules de continuité dans L^1 et L^2	132
	L'espace de Wiener $\mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$	133
	La formule d'inversion pour les mesures bornées	135
3.4	Transformation de Fourier et convolution sur L^2	139
	Calcul de $\mathcal{F}f$ pour $f \in L^2$	141
	Produit de convolution dans L^2	142