

Erich KAMKE

THÉORIE DES ENSEMBLES



ÉDITIONS
JACQUES GABAY

510-64-1

 blong®

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. — *Notions préliminaires.*

1. Notion d'ensemble et première classification des ensembles	1
2. Trois exemples remarquables d'ensembles dénombrables	5
3. Un exemple d'ensemble non dénombrable	9
4. Sous-ensemble, réunion et intersection d'ensembles, en particulier d'ensembles dénombrables	10
5. Opérations sur les ensembles	16

CHAPITRE 2. — *Ensembles quelconques et nombres cardinaux.*

6. Extensions de la notion de nombre	21
7. Ensembles équivalents	23
8. Les nombres cardinaux	28
9. Premières notions sur l'échelle des nombres cardinaux	31
10. Théorème d'équivalence (ou théorème de F. Bernstein)	34
11. Somme de deux nombres cardinaux	38
12. Produit de deux nombres cardinaux	41
13. Somme d'un nombre quelconque de nombres cardinaux	47
14. Produit de deux nombres cardinaux, considéré comme cas particulier d'une somme	53
15. Produit d'un nombre quelconque de nombres cardinaux	55
16. Exponentiation des nombres cardinaux	60
17. Exemples de calcul de puissances	68

CHAPITRE 3. — *Remarques sur le fondement de la théorie des ensembles.*

18. Ensemble des parties	75
19. Axiome du choix	77
20. Autres conceptions du fondement de la théorie des ensembles. Conclusion	82

CHAPITRE 4. — *Ensembles ordonnés et types d'ordre.*

21. Définition des ensembles ordonnés	86
22. Similitude et types d'ordre	90
23. Somme de types d'ordre	94
24. Produit de deux types ordinaux	98
25. Puissance des classes de types	104
26. Ensembles denses	108
27. Ensembles continus	113

CHAPITRE 5. — *Ensembles bien ordonnés et nombres ordinaux.*

28. Définition des ensembles bien ordonnés et des nombres ordinaux	121
29. Addition d'un nombre quelconque de nombres ordinaux. Multiplication de deux nombres ordinaux	124
30. Sous-ensembles et applications semblables d'ensembles bien ordonnés	128
31. Comparaison des nombres ordinaux	130
32. Suites de nombres ordinaux	135
33. Calcul avec les nombres ordinaux	140
34. Décomposition des nombres ordinaux par l'addition	147
35. Décomposition des nombres ordinaux par la multiplication	155
36. Suite des nombres ordinaux et induction transfinie	163
37. Produit d'un nombre quelconque de nombres ordinaux	167
38. Exponentiation des nombres ordinaux	173
39. Polynômes de nombres ordinaux	179

CHAPITRE 6. — *Théorème de bonne ordonnance et théorèmes apparentés.*

40. Préliminaires	184
41. Théorème de bonne ordonnance et théorèmes des parties maximales	188
42. Théorème du point fixe. Théorème de Zorn	193

43. Base des nombres réels.....	196
44. Bonne ordonnance des nombres cardinaux.....	199
45. Autres règles de calcul avec les nombres cardinaux. Type d'ordre des classes.....	201
46. Nombres ordinaux et ensembles de points.....	210
INDEX DES AUTEURS.....	223
INDEX ALPHABÉTIQUE.....	225

CHAPITRE I

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

§ 1. Notion d'ensemble et première classification des ensembles

La théorie des ensembles (*Mengenlehre*, *theory of sets*) est due à Georg Cantor (1845-1918) qui en a jeté les bases et construit une remarquable synthèse. Par les notions qu'elle a introduites et les problèmes qu'elle a posés, elle a fécondé presque toutes les branches des mathématiques ou même conduit à des disciplines nouvelles. Citons, comme exemples, la théorie des ensembles de points, la nouvelle théorie des fonctions réelles, la topologie, l'analyse fonctionnelle, l'algèbre moderne. Mais elle a aussi, au-delà des mathématiques, donné une nouvelle impulsion à la logique scientifique et à la théorie de la connaissance. Nous n'exposerons dans ce livre que les traits essentiels de la théorie générale ou abstraite des ensembles; la théorie des ensembles de points ne sera qu'effleurée.

Dans le langage courant, l'idée d'ensemble évoque toujours un nombre fini d'objets, en tout cas au moins deux. Dans la théorie des ensembles, la notion reçoit une acception plus large. D'après G. Cantor on entend par **ensemble** *E* : le groupement en un tout d'objets, déterminés et bien distincts, de notre perception ou de notre entendement, et que l'on appelle les éléments de *E*.

Exemples. — Les nombres premiers entre 1 et 100 forment un ensemble de 25 éléments. La totalité des nombres pairs forme un ensemble d'une infinité d'éléments. Les sommets d'un carré, un