

SCIENCES SUP

$$bx + c$$

Cours et exercices corrigés

Licence • Master

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

**2. Fonctions récursives,
théorème de Gödel, théorie
des ensembles, théorie des modèles**

Préface de Jean-Louis Krivine

**René Cori
Daniel Lascar**

DUNOD

TABLE DES MATIERES DU TOME I

Préface	v
Table des matières du tome I	vii
Table des matières du tome II	x
Contents	xiii
Avant-propos	1
Introduction	3
Mode d'emploi	11
 Chapitre 1 : Calcul propositionnel	15
1. Syntaxe	17
Les formules propositionnelles	17
Démonstrations par induction sur l'ensemble des formules	21
Arbre de décomposition d'une formule	23
Le théorème de lecture unique	25
Définitions par induction sur l'ensemble des formules	28
Substitutions dans une formule propositionnelle	29
2. Sémantique	32
Distributions de valeurs de vérité, tables de vérité	32
Tautologies, formules logiquement équivalentes	38
Quelques tautologies	42
3. Formes normales, systèmes complets de connecteurs	46
Opérations dans $\{0,1\}$ et formules	46
Formes normales	50
Systèmes complets de connecteurs	53
4. Lemme d'interpolation	55
Théorème de définissabilité	57
5. Théorème de compacité	59
Satisfaction d'un ensemble de formules	59
Le théorème de compacité du calcul propositionnel	62
Exercices	68
 Chapitre 2 : Algèbres de Boole	79
1. Rappels d'algèbre et de topologie	81
Algèbre	81
Topologie	84
Application au calcul propositionnel	90
2. Définition des algèbres de Boole	91
Propriétés des anneaux de Boole, relation d'ordre	91
Les algèbres de Boole en tant qu'ensembles ordonnés	95

3. Atomes dans une algèbre de Boole	99
4. Homomorphismes, isomorphismes, sous-algèbres	101
Homomorphismes et isomorphismes	101
Sous-algèbres de Boole	106
5. Idéaux et filtres	109
Propriétés des idéaux	109
Idéaux maximaux	112
Filtres	114
Ultrafiltres	115
Bases de filtre	118
6. Le théorème de Stone	120
L'espace de Stone d'une algèbre de Boole	121
Le théorème de Stone	125
Les espaces booléens sont des espaces de Stone	126
Exercices	130
Chapitre 3 : Calcul des prédicats	137
1. Syntaxe	139
Langages du premier ordre	139
Les termes du langage	141
Les substitutions dans les termes	148
Les formules du langage	149
Variables libres, variables liées, formules closes	152
Les substitutions dans les formules	155
2. Les structures	158
Les réalisations d'un langage	160
Sous-structures, restrictions	162
Homomorphismes, isomorphismes	164
3. Satisfaction des formules dans les structures	167
Interprétation des termes du langage dans une structure	167
Satisfaction des formules du langage dans une structure	170
Equivalence universelle et conséquence sémantique	177
4. Formes prénexes et formes de Skolem	188
Formes prénexes	188
Formes de Skolem	191
5. Premiers pas en théorie des modèles	197
Satisfaction dans une sous-structure	197
Equivalence élémentaire	201
Langage associé à une structure, formules à paramètres	207
Relations et fonctions définissables dans une structure	210
6. Modèles non égalitaires	213
Exercices	216
Chapitre 4 : Théorèmes de complétude	227
1. Démonstrations formelles	229
Règles et axiomes	229
Démonstrations formelles	232
Théorème de finitude et lemme de déduction	235

2. Les modèles de Henkin	238
Les témoins de Henkin	238
Le théorème de complétude	241
3. La méthode de Herbrand	245
Quelques exemples	246
Les avatars d'une formule	248
4. Les démonstrations par coupure	254
La règle de coupure	254
Complétude de la méthode	257
5. La méthode de résolution	261
Unification	261
Les démonstrations par résolution	267
Exercices	277
 Solutions des exercices du tome I	 281
Chapitre 1	282
Chapitre 2	305
Chapitre 3	326
Chapitre 4	350
 Bibliographie	 361
Notations	365
Index	373

TABLE DES MATIERES DU TOME II

Préface	v
Table des matières du tome I	vii
Table des matières du tome II	x
Contents	xiii
Avant-propos	1
Mode d'emploi	3
 Chapitre 5 : Récursivité	7
1. Fonctions et ensembles récursifs primitifs	9
Les premières définitions	9
Exemples et propriétés de clôture	11
Codages des suites	15
2. Fonctions récursives	18
La fonction d'Ackermann	18
Le schéma μ et les fonctions partielles récursives	22
3. Machines de Turing	26
Description des machines de Turing	26
Les fonctions T-calculables	28
Les fonctions partielles T-calculables sont récursives	33
Machines de Turing universelles	37
4. Les ensembles récursivement énumérables	41
Ensembles récursifs et récursivement énumérables	41
Le théorème smn	47
Les théorèmes de point fixe	51
Exercices	55
 Chapitre 6 : Formalisation de l'arithmétique - Théorèmes de Gödel	63
1. Les axiomes de Peano	67
Les axiomes	67
L'ordre sur les entiers	72
2. Les fonctions représentables	76
3. Arithmétisation de la syntaxe	81
Codage des formules	81
Codage des démonstrations	85

4. Les théorèmes d'incomplétude et d'indécidabilité	91
Indécidabilité de l'arithmétique et du calcul des prédicats	91
Les théorèmes d'incomplétude de Gödel	93
Exercices	103
 Chapitre 7 : Théorie des ensembles	111
1. Les théories Z et ZF	113
Les axiomes	113
Couples, relations et applications	120
2. Les ordinaux et les entiers	125
Ensembles bien ordonnés	125
Les ordinaux	127
Opérations sur les ordinaux	135
Les entiers	139
3. Démonstrations et définitions par induction	141
L'induction	141
L'axiome du choix	144
4. Cardinalité	147
Les classes cardinales	147
Opérations sur les classes cardinales	150
Les cardinaux finis	153
Le dénombrable	157
Les cardinaux	160
5. L'axiome de fondation et le schéma de réflexion	167
L'axiome de fondation	167
Quelques résultats de consistance relative	170
Cardinaux inaccessibles	174
Le schéma de réflexion	176
Exercices	181
 Chapitre 8 : Un peu de théorie des modèles	189
1. Sous-structures et extensions élémentaires	191
Sous-structures élémentaires	191
Le test de Tarski-Vaught	195
2. Construction d'extensions élémentaires	197
Applications élémentaires	197
La méthode des diagrammes	199
3. Les théorèmes d'interpolation et de définissabilité	205
4. Produits réduits et ultraproducts	211
5. Théorèmes de préservation	216
Préservation par sous-structure	216
Préservation par union de chaîne	219
Préservation par produit réduit	223

6. Les théories aleph-zéro-catégoriques	227
Le théorème d'omission des types	227
Structures aleph-zéro-catégoriques	233
Exercices	239
 Solutions des exercices du tome II	 249
Chapitre 5	250
Chapitre 6	267
Chapitre 7	279
Chapitre 8	300
 Bibliographie	 323
Notations	327
Index	335