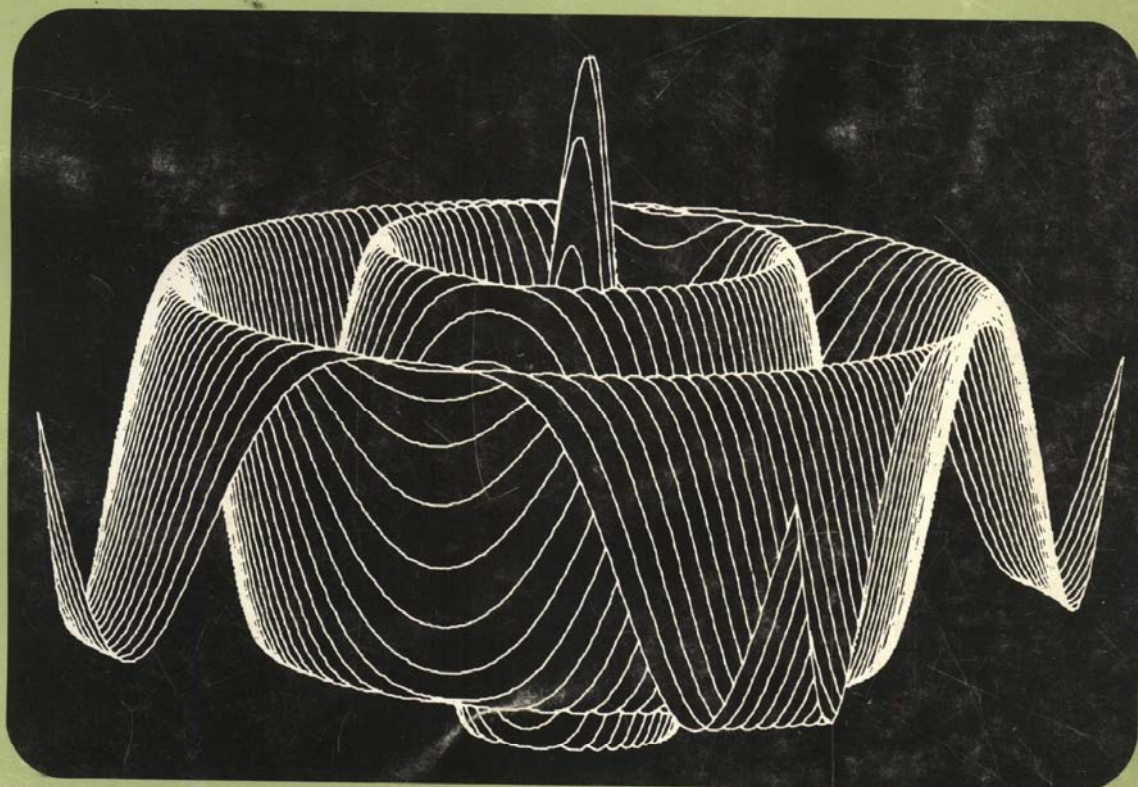


MATHÉMATIQUES *et* INFORMATIQUE

AUX CONCOURS SCIENTIFIQUES

Travaux dirigés, Problèmes corrigés et Exercices
pour les classes de Mathématiques Supérieures et Spéciales
et les premiers cycles scientifiques des Universités



Jacques MOISAN

Gérard DEBEAUMARCHÉ



TABLE DES MATIÈRES

AVERTISSEMENT	3
■ ALGÈBRE	5
I. ARITHMÉTIQUE	7
*1. PGCD et PPCM	8
A. Calculs en rationnels	8
B. Coefficients de Bézout	10
C. Exercices	14
*2. Nombres premiers	14
A. Crible d'Ératosthène	14
B. Tests de primarité et factorisation	16
*3. Calcul sur les entiers longs	18
A. Opérations*	18
B. Racine carrée entière	24
C. Exercices	27
*4. Fractions continues	28
A. Fractions continues	28
B. Meilleures approximations rationnelles d'un réel	29
C. Calcul des réduites des racines des entiers	30
*5. Exercices d'arithmétique	33
II. DÉNOMBREMENT ET TRIS	35
*1. Groupe symétrique	35
*2. Tris	44
A. Tri-bulle	45
B. Tri par insertion	46
C. Tri dichotomique	48
III. POLYNOMES	50
*1. Propriétés arithmétiques	50
Présentation	50
A. Algorithme de Hörner	51
B. Divisions de polynômes	53
C. Exercices	56
2. Polynômes d'interpolation de Lagrange et phénomène de Runge	56
Présentation	56
A. Existence et unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange	57

B. Algorithme de calcul du polynôme de Lagrange	57
C. Majoration de l'erreur commise en remplaçant f par P_n	58
D. Étude d'un exemple et phénomène de Runge	58
E. Meilleur choix des points d'interpolation	59
F. Instabilité de l'application $f \rightarrow P_n$	60

IV. NOMBRES COMPLEXES 68

*1. Calcul des racines $n^{\text{èmes}}$	68
*2. Résolution algébrique d'une équation du 3 ^{ème} degré à coefficients réels	69
*3. Entiers de Gauss	72

■ ALGÈBRE LINÉAIRE 79

I. LA MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS 81

*1. Manipulations élémentaires sur une matrice	81
A. Interprétation matricielle des manipulations élémentaires	81
B. Invariance du rang dans les manipulations élémentaires	82
*2. L'algorithme du pivot de Gauss sans échange de lignes	82
*3. L'algorithme du pivot partiel de Gauss	84
*4. L'algorithme du pivot partiel de Gauss-Jordan	85
*5. L'algorithme du pivot total de Gauss	86
*6. L'algorithme du pivot total de Gauss-Jordan	87
*7. Application à la résolution des systèmes de Cramer	88
*8. Application à l'inversion des matrices carrées	91
*9. Exercice : Méthode de Newton matricielle	95

II. AUTRES MÉTHODES ET APPLICATIONS 96

*1. Puissances d'une matrice carrée	96
*2. Factorisation LU d'une matrice carrée	98
3. Factorisation de Cholesky et problèmes de moindres carrés	102
A. Factorisation de Cholesky	102
B. Application aux problèmes de moindres carrés	103
4. Systèmes tridiagonaux et application à la recherche de fonctions-splines	109
A. Résolution d'un système tridiagonal	109
B. Application à la recherche de fonctions-splines	109
C. Majoration de l'erreur commise en remplaçant f par g	110
5. Résolution itérative des systèmes de Cramer	118
A. Matrices à stricte dominance diagonale	118
B. La méthode de Jacobi	119
C. La méthode de Gauss-Seidel	120
6. Conditionnement d'un système	124

III. CALCUL DU POLYNOME CARACTÉRISTIQUE D'UNE MATRICE (Méthode de Danilewski)	127
Méthode de Danilewski	127
IV. ORTHONORMALISATION DE SCHMIDT	135
1. Algorithme de Gram-Schmid	135
2. Factorisation QR	136
3. Décomposition de Householder	138
 ■ ANALYSE	 145
I. ÉTUDE DE SUITES	147
*Exemples d'études :	147
Calcul du nombre e	147
Approximations du nombre π à l'aide de suites et séries	149
Étude de la suite $(n\theta - [n\theta])$	159
II. RÉOLUTION DES ÉQUATIONS	166
*1. Méthode de dichotomie	166
*2. Méthodes itératives, méthode de Newton	168
III. ÉTUDES DE SÉRIES	178
1. Exemples d'études :	178
Étude de la série $\Sigma(1/n^2)$	178
Nombre moyen des retours au point de départ dans un promenade aléatoire	181
Étude de la série $\Sigma(1/n^3)$ par la méthode de Stirling	186
2. Formule d'Euler-Mac Laurin	189
Étude de la série $\Sigma(1/n^3)$ par la méthode d'Euler-MacLaurin	189
Calcul approché de la constante d'Euler par la méthode d'Euler-Mac Laurin	195
3. Séries de Fourier	196
Transformée de Fourier discrète	196
Application à la convolution	200
Calcul des coefficients de Fourier	203
IV. CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES	207
*1. Méthode des trapèzes et de Simpson	207
*2. Accélération de convergence de Romberg	211
3. Quadrature de Gauss-Tchebichev	217
4. Calcul d'intégrales doubles	222

■ REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES 225

Présentation générale 227

I. TRACÉ DE COURBES 229

1. Préliminaires 229

A. Exemple 229

B. Dérivation numérique (au rang un ou deux) 234

2. Enveloppes de droites 237

3. Développées, développantes 244

II. "RÉSOLUTION" GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 250

1. Méthodes d'Euler et d'Euler-Cauchy 250

2. Exemples d'étude qualitative 256

3. Tracé de courbes implicites 263

A. Programme 263

B. Exemple 265

II. REPRÉSENTATION TRIDIMENSIONNELLE 269

1. Problème de la représentation 269

2. Polyèdres convexes 272

3. Surfaces $z = f(x,y)$: méthode des lignes de crête 278

A. Lignes de crête 278

B. Programmation effective 281

■ ANNEXES 287

1. Programme complet de calcul sur les entiers longs 287

2. Opérations élémentaires sur les polynômes 291

3. Représentation de polyèdres convexes avec possibilité de saisie
et de sauvegarde dans un fichier 294

